

Расчет
на прочность
ДЕТАЛЕЙ
МАШИН

И. А. Биргер
Б. Ф. Шорр
Г. Б. Иосилевич

И.А.Биргер
Б.Ф. Шорр
Г. Б. Иосилевич

Расчет на прочность ДЕТАЛЕЙ МАШИН

СПРАВОЧНИК

Издание третье,
переработанное
и дополненное



Москва «Машиностроение» 1979

ББК 34.41

В 64

УДК 621.01 : 539.4 (031)

Рецензент д-р техн. наук, проф. Г. С. Маслов

Биргер И. А. и др.

Б64 Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1979. — 702 с., ил.

В пер.: 3 р. 20 к.

В справочнике изложены методы расчета на прочность различных соединений и передач, пружин, валов, подшипников, деталей поршневых двигателей, турбомашин и компрессоров; приведены сведения по определению напряжений и деформаций в элементах конструкций. Третье издание справочника (второе изд. 1966 г.) переработано и дополнено расчетами на прочность винтовых и цепных передач, расчетами контактных напряжений, расчетами деталей на выносливость, малоцикловую усталость, термпрочность, сведениями по автоматизированному проектированию.

Справочник предназначен для инженеров-конструкторов и расчетчиков машиностроительных заводов, проектно-конструкторских организаций.

31302-020
Б $\frac{31302-020}{038(01)-79}$ 20-79. 2702000000

ББК 34.41
6П5.1

© Издательство «Машиностроение», 1979 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы надежности, прочности, долговечности и ресурса являются важнейшими в современной технике.

Вследствие непрерывного возрастания требований к быстроходности, экономичности, долговечности, надежности и к снижению массы машин расчеты на прочность становятся все более сложными. Они должны учитывать различные режимы работы, реальные свойства материалов, условия нагружения, технологические, эксплуатационные и другие факторы.

В расчетах на прочность деталей машин и конструкций все шире используют результаты, полученные в теории стержней, пластин, оболочек, в теории упругости, пластичности и ползучести, в механике разрушения. Все это приводит к тому, что в процессе разработки машины конструктор часто не имеет возможности провести достаточно обоснованные расчеты на прочность, и такие расчеты выполняют расчетные отделы.

В книге изложены методы расчета деталей машин на прочность в форме, удобной для использования непосредственно при проектировании машин и конструкций. При этом была учтена возможность различной теоретической подготовки конструкторов.

В первом разделе даны основные сведения, необходимые для элементарных расчетов на прочность.

Во втором разделе в большинстве случаев также приведены простейшие расчетные формулы и таблицы, для некоторых типовых элементов конструкций даны уточненные методы расчета. Основное внимание уделено выявлению физических основ задачи, простоте, удобству расчета, анализу допустимого уровня напряженности.

В технических расчетах все нужное оказывается простым, а все сложное оказывается ненужным. Основные расчеты приведены в форме, рекомендуемой в ГОСТах и нормативных руководствах, или в форме, используемой в отечественной и зарубежной расчетной практике, что позволяет использовать расчеты для накопления статистических данных по напряженности деталей.

В третьем разделе даны методы определения напряжений в стержнях, пластинах и оболочках, необходимые при расчетах на прочность, жесткость, устойчивость и колебания.

В связи с расширяющимся использованием в инженерных расчетах электронных вычислительных машин (ЭВМ) в настоящее издание включены дополнительные главы по численным методам расчета конструкций с учетом упругости, пластичности, ползучести конструкционных материалов.

Значительное внимание уделено материалам справочного характера.

В четвертом разделе рассмотрены вопросы оценки прочности и надежности деталей машин. Специальная глава посвящена вопросам автоматизированного проектирования, приобретающим большое значение во многих передовых областях современной техники.

В третьем издании этой книги большинство глав написаны заново, а часть глав существенно переработана.

Главы 4, 17—19, 21, 22, 24, 25, 32, 33, 35 и 36 написаны д-ром техн. наук проф. И. А. Биргером, главы 1, 2, 11, 15, 20 и 23 — д-ром техн. наук проф. Б. Ф. Шорром, главы 6—8, 13 и 14 — д-ром техн. наук проф. Г. Б. Иосилевичем. Главы 3, 5, 10, 12, 26—31 и 34 написаны И. А. Биргером и Г. Б. Иосилевичем, глава 16 — И. А. Биргером и Б. Ф. Шорром.

По просьбе авторов глава 9 написана канд. техн. наук А. И. Ерошкиным.

К сожалению, один из авторов предыдущих изданий д-р техн. наук проф. Р. М. Шнейдерович не смог принять участия в подготовке настоящего издания.

ОСНОВЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

НАПРЯЖЕНИЕ И ДЕФОРМАЦИЯ

Во время работы на детали действуют внешние силы (вес, давление пара, центробежные силы и т. д.), под действием которых они меняют размеры и форму, т. е. *деформируются*. Для нормальной работы необходимо, чтобы деформации были незначительными.

Если подвесить груз Q к стержню (рис. 1), то он удлинится на величину Δl , после чего деформация прекратится. Ей препятствуют внутренние силы, возникающие между частицами тела. Для определения внутренних сил применяют метод сечений. Рассечем мысленно стержень плоскостью P и отбросим верхнюю часть. Чтобы нижняя часть стержня осталась в равновесии, в сечении P к ней должны быть приложены внутренние силы, уравнивающие груз Q (рис. 2, а). На различные площадки ΔF будут действовать различные силы ΔP . Как показывает опыт, отношение

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta F} \quad (1)$$

при растяжении стержня во всех точках данного сечения остается постоянным. Величину p называют *полным напряжением*. Когда напряжения в различных точках сечения неодинаковы, например при изгибе, их определяют из того же соотношения (1), но действующие силы ΔP относят к очень малым площадкам. В технике напряжение принято измерять в кгс/см² или кгс/мм²*

Полное напряжение раскладывают на две составляющие (рис. 2, б). *Нормальным напряжением* σ называют составляющую напряжения, направленную по нормали к площадке. *Касательным напряжением* τ называют составляющую напряжения, действующую в плоскости площадки.

Различать нормальные и касательные напряжения необходимо потому, что материал по-разному сопротивляется их действию.

Напряжение рассматривают всегда для определенной точки и для определенного положения площадки, проходящей через эту точку. Если известны напряжения, действующие по трем взаимно перпендикулярным площадкам в окрестности точки, то могут быть определены напряжения в любой другой площадке, проходящей через ту же точку.

Нормальное напряжение считают положительным, если оно растягивающее. Знак нормального напряжения важен для расчета на прочность, так как конструкционные материалы сопротивляются растягивающим напряжениям хуже, чем сжимающим. Знак касательного напряжения не существует.

Из условия равновесия элемента объема следует, что касательные напряжения в перпендикулярных площадках равны между собой (см. рис. 2, б). Через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, в которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называют *главными*, а действующие в них нормальные напряжения — *главными напряжениями*. Одно из глав-

* В Международной системе единиц (СИ) силу измеряют в ньютонах (Н), а напряжения в паскалях (1 Па = Н/м²) или в мегапаскалях (1 МПа = 10⁶ Па ≈ 10 кгс/см² = 0,1 кгс/мм²).

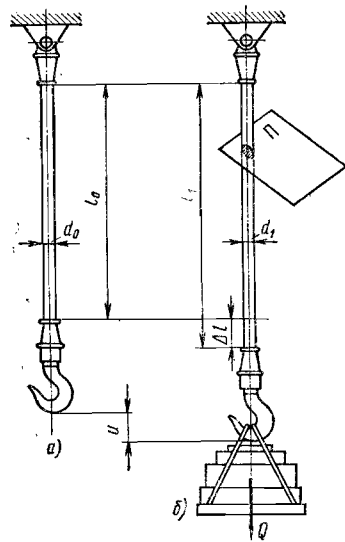


Рис. 1. Удлинение стержня и перемещение его конца под действием растягивающей нагрузки:
а — положение стержня до деформации; б — в деформированном состоянии

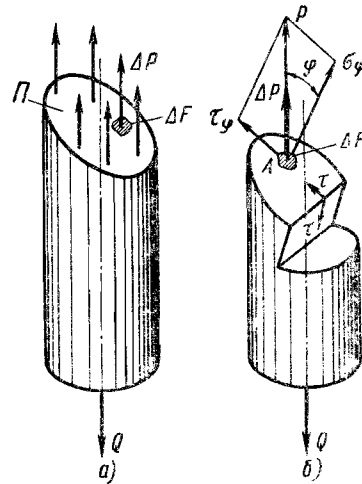


Рис. 2. Внутренние силы упругости

ных напряжений является наибольшим полным напряжением в данной точке, другое — наименьшим.

При деформации тела взаимное положение его отдельных точек меняется, точки получают *перемещения*. Например, под действием груза Q (рис. 1) нижний конец стержня перемещается (опускается) на величину u , в то время как верхний конец остается неподвижным. Различие в перемещениях связано с изменением длины стержня под нагрузкой. Абсолютное удлинение $\Delta l = l_1 - l_0$ в данном примере равно перемещению u и зависит от длины стержня. Собственно *деформация* стержня характеризуется *относительным удлинением*

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2)$$

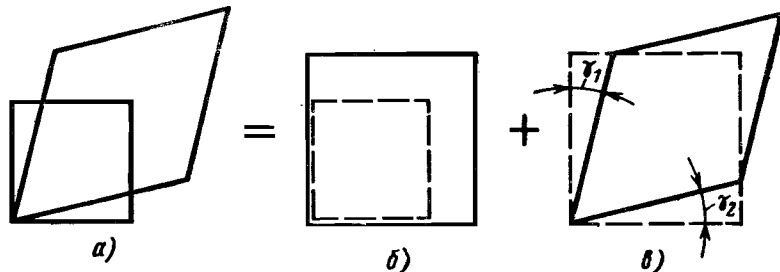


Рис. 3. Разложение общей деформации на относительные удлинения и сдвиги:
а — общая деформация; б — изменение объема, связанное с удлинениями сторон; в — изменение формы, связанное со сдвигами: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Относительное удлинение — безразмерная величина, иногда выражается в процентах. Например, если стержень, имевший длину $l_0 = 1 \text{ м}$, удлиняется на $\Delta l = 1 \text{ мм}$, то $\epsilon = \frac{1}{1000} \cdot 100 = 0,1\%$.

В общем случае деформация элемента тела может быть разложена на относительные удлинения, вызывающие изменение объема, и *сдвиги*, вызывающие изменение формы элемента (рис. 3). Сдвиг γ_i ($i = 1; 2$) равен углу, на который изменяется первоначально прямой угол элемента.

Если в данной точке тела известны удлинения и сдвиги по трем взаимно перпендикулярным направлениям, то могут быть определены деформации по любому другому направлению.

Удлинения сторон элемента тела $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ приводят к относительному изменению его объема V_0 :

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} \approx \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3. \quad (3)$$

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Во многих деталях стержневой формы основная нагрузка действует вдоль оси стержня (штки прессов, шатуны, рабочие лопатки паровых турбин и пр.), которые в этих условиях растягиваются или сжимаются. Используя метод сечений, можно установить, что в любом сечении растянутого (сжатого) стержня равнодействующая внутренних сил P равна внешней силе Q , действующей на оставшуюся часть стержня (рис. 2).

Опыт показывает, что в плоских сечениях, удаленных от места приложения внешней силы Q на расстояние большее, чем диаметр стержня, напряжения распределяются по сечению практически равномерно, а сами сечения, перпендикулярные к оси стержня, остаются плоскими и перпендикулярными к оси и после деформации. Это положение носит название *гипотезы плоских сечений*. Напряжение в поперечном сечении стержня

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad (4)$$

где F — полная площадь сечения, а напряжения в наклонном сечении, нормаль к которому составляет с осью стержня угол φ (см. рис. 2, б),

$$\sigma_\varphi = \sigma \cos^2 \varphi; \quad \tau_\varphi = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi. \quad (5)$$

Если в стержне имеется местное ослабление, то в расчет следует вводить минимальную площадь сечения (площадь нетто). В этом случае по формуле (4) определяют *номинальное напряжение*, не учитывающее концентрации напряжений.

При растяжении продольные волокна стержня получают относительное удлинение $\epsilon = \Delta l/l_0$, а поперечные размеры уменьшаются. Величину $\epsilon_n = (d_1 - d_0)/d_0$ (см. рис. 1) называют *относительной поперечной деформацией*.

Экспериментально установлено, что до определенных пределов относительное удлинение пропорционально напряжению (*закон Гука*)

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (6)$$

Коэффициент E , зависящий от материала стержня и температуры, называют *модулем упругости*, он имеет размерность напряжения.

Из формул (2), (4), (6) следует

$$\Delta l = \frac{Pl_0}{EF} \quad (7)$$

Произведение EF характеризует *жесткость сечения стержня при растяжении*: чем больше жесткость, тем меньше удлинение.

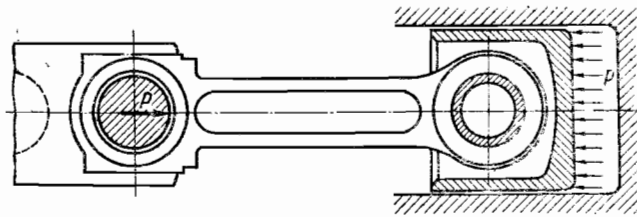


Рис. 4. Деформация сжатия стержня шатуна

Эксперименты также показывают, что относительная поперечная деформация

$$\epsilon_{\perp} = -\nu \epsilon, \tag{8}$$

где ν — коэффициент поперечного сжатия (коэффициент Пуассона), зависит от материала стержня. Величина ν лежит в пределах $0 \leq \nu \leq 0,5$.

Значения E и ν для некоторых материалов при нормальной температуре приведены в табл. 1.

1. Физические свойства некоторых материалов при $T = 20^\circ\text{C}$

Материал	Плотность ρ , г/см ³	Модуль упругости $E \cdot 10^{-4}$ кгс/мм ²	Коэффициент Пуассона ν	Коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^6$, 1/°C	Коэффициент теплопроводности λ , ккал/(м·ч·°C)
Углеродистые стали (сталь 20, сталь 45 и др.)	7,85	2,0—2,2	0,3	11	40—60
Легированные стали (30ХГСА, 12ХНЗА)	7,85	2,0—2,2	0,3	11—12	30—40
Жаропрочные сплавы (ХН77ТЮР, 12Х18Н9Т и др.)	8,0—8,2 6,5—7,5	2,0—2,2 1,0—1,5	0,3 0,25	12—17 11	10—20 30—50
Чугун	7,2—7,8	1,0—1,5	0,25	11	30—50
Алюминиевые сплавы (АЛ4, Д1 и др.)	2,6—2,9	0,71—0,72	0,31	20—25	110—150
Магниеые сплавы (МА5 и др.)	~ 1,8	0,4—0,45	0,34	27	60—100
Титановые сплавы (ВТ3 и др.)	~ 4,5	1,1	0,3	8,5	7—14

При деформации сжатия (рис. 4) применимы те же формулы, что при растяжении, однако сжимающее напряжение считают отрицательным. Длина стержня при сжатии уменьшается, поперечное сечение увеличивается. Модули упругости при растяжении и сжатии для большинства металлов и сплавов имеют одинаковые значения, но для свинца, серого чугуна средней прочности, а также для дерева, фанеры, железобетона — различные. Объем тел при растяжении увеличивается, при сжатии — уменьшается.

ИЗГИБ

Лежащий на опорах вал (рис. 5) изгибается под действием веса закрепленного на нем диска. Деформацию изгиба испытывают также рельсы, балки, зубья колес, лопатки газовых турбин и многие другие детали. Для определения величины внутренних сил при изгибе также пользуются методом сечений. Найдя из условий равновесия вала (балки) в целом опорные реакции (на рис. 5 они равны $P/2$), проводят мысленно поперечное сечение, отбрасывают одну часть вала и рассматривают условия равновесия оставшейся части. Внутренние силы, действующие в плоскости попереч-

ного сечения P , сводятся к поперечной силе Q и изгибающему моменту M (в рассматриваемом случае они равны соответственно $P/2$ и $Px/2$). При некоторых условиях нагружения в балке может возникнуть только изгибающий момент. Такой изгиб называют чистым.

Нагрузка при изгибе прикладывается в виде сосредоточенной силы, сосредоточенного момента или распределенной по длине сплошной нагрузки q (например, от собственного веса). Размерность сплошной нагрузки q — кгс/см, поперечной силы Q — кгс, изгибающего момента M — кгс·см; их положительные направления показаны на рис. 6.

Для изгибающего момента применяют следующее правило знаков: момент считают положительным, если он создает сжатие в верхних волокнах балки (стержня).

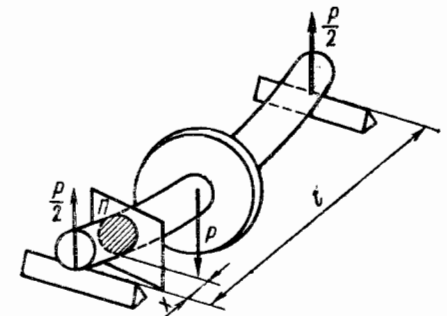


Рис. 5. Изгиб двухопорного вала с диском

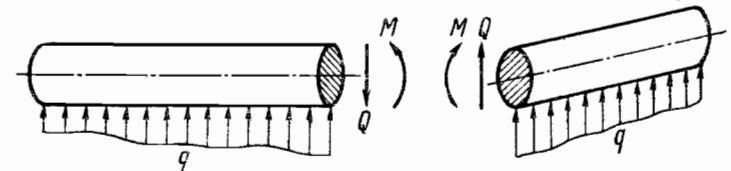


Рис. 6. Положительные направления сплошной нагрузки q , поперечной силы Q и изгибающего момента M

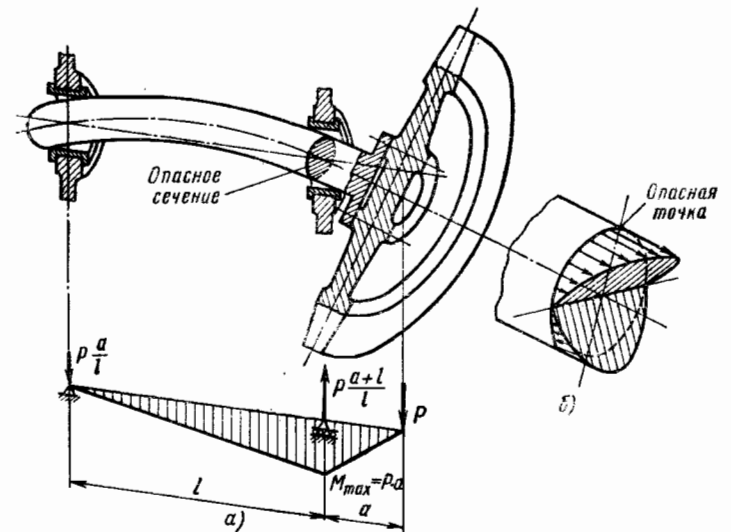


Рис. 7. Изгиб двухопорного вала с консольным диском: а — эпюра изгибающих моментов; б — распределение нормальных напряжений в опасном сечении

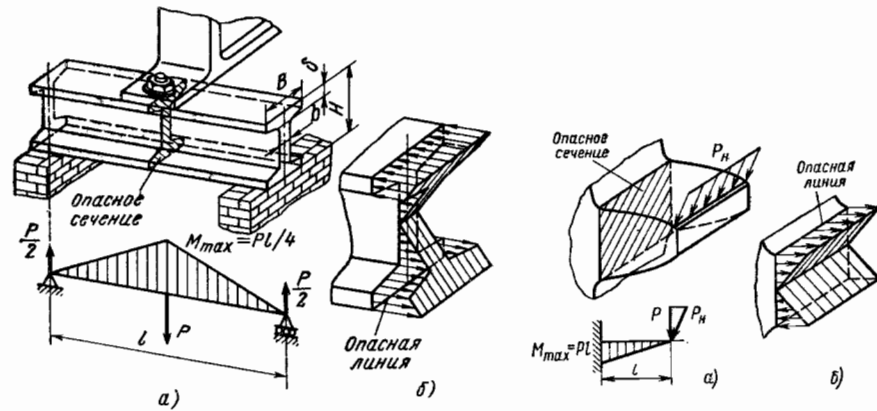


Рис. 8. Изгиб двутавровой балки: а — эпюра изгибающих моментов; б — распределение нормальных напряжений в опасном сечении

Проведя линию, параллельную оси балки, и отложив на ней величины Q и M , действующие в соответствующих сечениях, получим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Эпюры позволяют весьма просто определить наиболее нагруженные сечения. Эпюра M для двухопорного вала с консольным диском приведена на рис. 7, наиболее нагружено сечение вала у правой опоры.

В поперечных сечениях балки действуют нормальные и касательные напряжения. Основное значение для длинных балок (стержней) имеют нормальные напряжения, распределяющиеся в сечении по линейному закону. Это является следствием закона Гука и гипотезы плоских сечений, согласно которой плоское поперечное сечение при деформации изгиба остается плоским и перпендикулярным к деформированной оси балки.

Нормальные напряжения связаны с действием изгибающих моментов.

В точках, лежащих на нейтральной оси, которая проходит через центр тяжести сечения, нормальные напряжения отсутствуют. Наибольшей величины напряжения достигают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, причем

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}, \quad (9)$$

где W — момент сопротивления при изгибе, см^3 ;

$$W = \frac{J}{h_{\max}}, \quad (10)$$

здесь J — момент инерции сечения, см^4 ; h_{\max} — расстояние от оси до наиболее удаленной точки.

Для круглого сечения диаметром d

$$W = \frac{\pi d^3}{32}; \quad (11)$$

для прямоугольного сечения с основанием b и высотой h

$$W = \frac{bh^2}{6}; \quad (12)$$

Рис. 9. Изгиб зуба зубчатого колеса: а — эпюра изгибающих моментов; б — распределение нормальных напряжений в опасном сечении

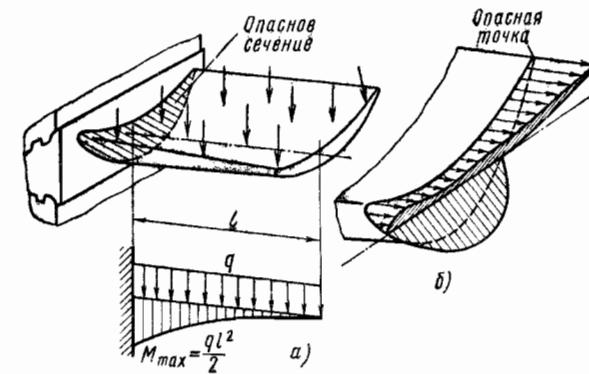
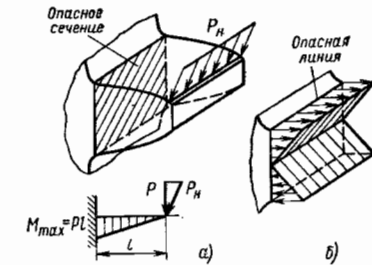


Рис. 10. Изгиб турбинной лопатки силами давления газов: а — эпюра изгибающих моментов; б — распределение нормальных напряжений в опасном сечении

для двутаврового сечения с указанными на рис. 8 размерами

$$W \approx \frac{bH^2}{6} + B\delta H. \quad (13)$$

На рис. 7—10 приведены примеры определения опасных сечений для некоторых случаев изгиба и показано распределение нормальных напряжений в типичных сечениях.

Касательные напряжения связаны с действием поперечных сил. При чистом изгибе касательные напряжения равны нулю, а в общем случае они обычно малы по сравнению с нормальными напряжениями, и в приближенных расчетах на изгиб ими часто пренебрегают.

Под действием нагрузок балки прогибаются, особенно сильно на свободном конце при консольном креплении (рис. 9, 10) и в середине пролета между опорами (рис. 8). При действии сосредоточенной силы P максимальный прогиб балки определяют по формуле

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{kEJ}, \quad (14)$$

где k — коэффициент, зависящий от расположения опор и характера нагрузки.

Для двухопорной балки с силой посередине $k = 48$, для консольной балки с силой на свободном конце $k = 3$.

Произведение EJ характеризует жесткость сечения балки на изгиб. При том же весе наибольшую жесткость на изгиб и наименьшие напряжения имеют балки двутаврового сечения.

СРЕЗ И СМЯТИЕ

В работе заклепок (рис. 11), шпонок (рис. 12), штифтов основное значение имеют деформации среза и смятия. Действительное распределение напряжений в этих случаях сложное, и расчеты ведут по условным напряжениям, которые определяют в предположении равномерного их распределения по площади среза или смятия.

Касательное напряжение при срезе

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{P_{\text{ср}}}{F_{\text{ср}}}, \quad (15)$$

где $P_{\text{ср}}$ — сила, вызывающая срез; $F_{\text{ср}}$ — площадь среза.

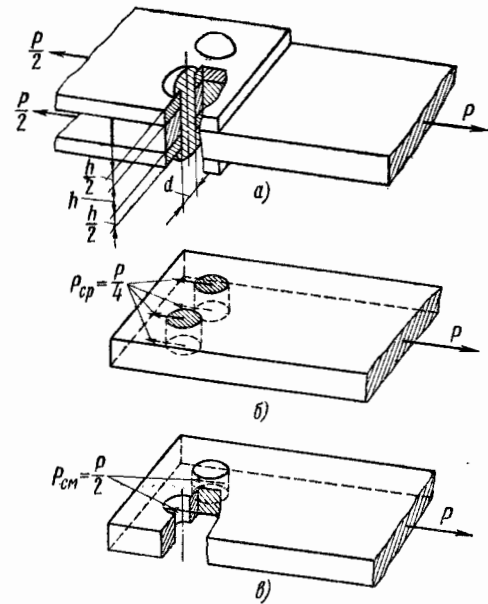


Рис. 11. Схема работы заклепочного соединения: а — схема узла; б — срез заклепок; б₁ — смятие листов

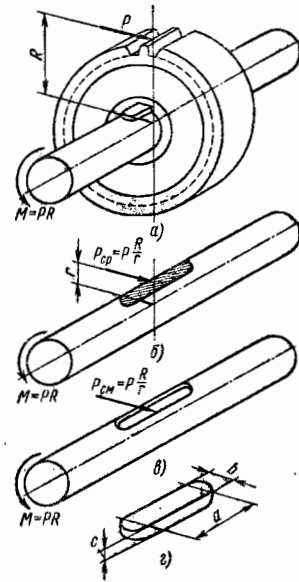


Рис. 12. Схема работы шпоночного соединения: а — схема узла; б — срез шпонки; б₁ — смятие поверхности шпоночной канавки; б₂ — схема шпонки

Для двух заклепок при двустороннем срезе (рис. 11)

$$P_{cp} = 0,25P; F_{cp} = \frac{\pi d^2}{4}$$

Для шпонки (рис. 12)

$$F_{сш} = \left(a + \frac{\pi b}{4}\right) b$$

Напряжение смятия

$$\sigma_{см} = \frac{P_{см}}{F_{см}}, \tag{16}$$

где $P_{см}$ — сила, вызывающая смятие; $F_{см}$ — площадь смятия.

При смятии по цилиндрической поверхности для заклепок (см. рис. 11) считают $F_{см} = dh$; для шпонки (см. рис. 12) $F_{см} \approx 0,5 ca$.

КРУЧЕНИЕ

Валы (рис. 13) и ряд других деталей машин испытывают деформацию кручения. Если вал, имеющий частоту вращения n об/мин, передает мощность N кВт, то крутящий момент в поперечном сечении вала

$$M_k = 97\,400 \frac{N}{n} \text{ кгс} \cdot \text{см}. \tag{17}$$

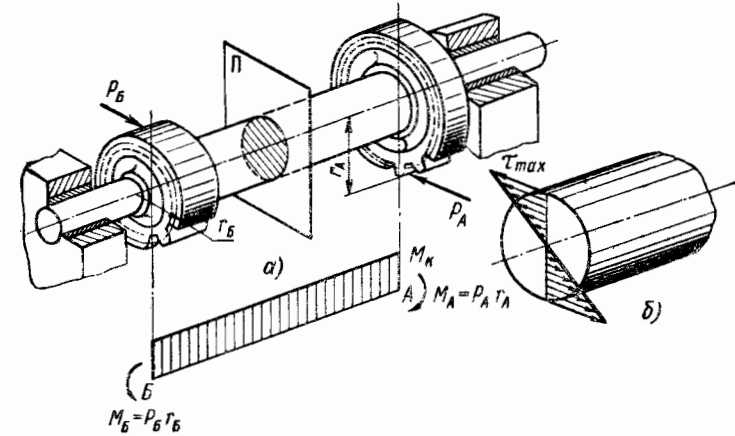


Рис. 13. Кручение вала:

а — эпюра крутящих моментов; б — распределение напряжений в опасном сечении

При измерении N в л. с.

$$M_k = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Для определения опасного сечения в валах строят эпюры крутящих моментов (рис. 13, а).

При кручении круглого вала в поперечном сечении действуют касательные напряжения, которые распределяются по радиусу вала по линейному закону. В центре вала напряжение равно нулю, у поверхности достигает максимального значения

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}, \tag{18}$$

где W_k — момент сопротивления сечения кручению, см^3 .

Для полого вала

$$W_k = \frac{\pi d^3}{16} (1 - \alpha^4), \tag{19}$$

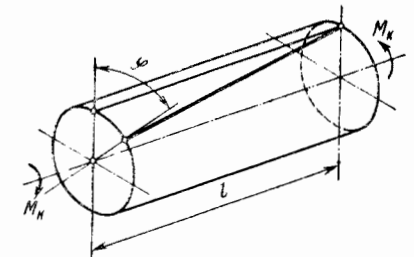


Рис. 14. Деформация кручения вала

где d — внешний диаметр вала; d_1 — внутренний диаметр вала; $\alpha = d_1/d$.

При одинаковой прочности полый вал легче сплошного.

Угол закручивания вала в градусах на длине l (рис. 14)

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p} \frac{180}{\pi}, \tag{20}$$

где J_p — полярный момент инерции сечения вала, см^4 :

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - \alpha^4); \tag{21}$$

G — модуль сдвига, $\text{кгс}/\text{см}^2$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \approx 0,38E$.

Произведение $G J_p$ характеризует жесткость сечения вала на кручение.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Возле отверстий, галтелей, кольцевых выточек, у шпоночных и шлицевых пазов, у основания резьбы и в других местах, где резко меняется конфигурация детали, а также там, где одна деталь напрессовывается на другую, напряжения распределяются неравномерно, т. е. возникает *концентрация напряжений*.

Отношение наибольшего напряжения в зоне концентрации к номинальному напряжению называют *коэффициентом концентрации напряжений*:

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, \tag{22}$$

или

$$\alpha_\tau = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n}. \tag{23}$$

Номинальные напряжения рассчитывают по формулам сопротивления материалов, максимальные — методами теории упругости или же определяют экспериментально.

При растяжении пластинки с отверстием (рис. 15) в качестве номинального напряжения принимают

$$\sigma_n = \sigma \frac{b}{b-d},$$

где σ — напряжение по нагруженным сторонам пластинки. Если $d \ll b$, то $\alpha_\sigma = 3$. Для пластинки с двумя выточками (рис. 16) коэффициент концентрации напряжений зависит главным образом от отношения величины радиуса закругления ρ у дна выточки к ширине d , а также от отношения t/d . При $\rho \rightarrow \infty$ величина $\alpha_\sigma \rightarrow \infty$. Коэффициент концентрации напряжений в основании зуба зубчатого колеса (см. рис. 8, гл. 11) может быть представлен приближенной зависимостью

$$\alpha_\sigma = 1 + 0,15 \frac{S}{\rho},$$

где S — ширина основания зуба; ρ — радиус закруглений.

Чем резче меняется форма тела, тем больше величина коэффициента концентрации. В обычных встречающихся конструкциях $\alpha_\sigma < 4$. При конструировании напряженных деталей машин

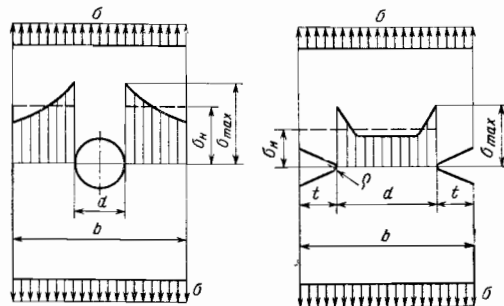


Рис. 15. Концентрация напряжений у отверстия

Рис. 16. Концентрация напряжений у выточки

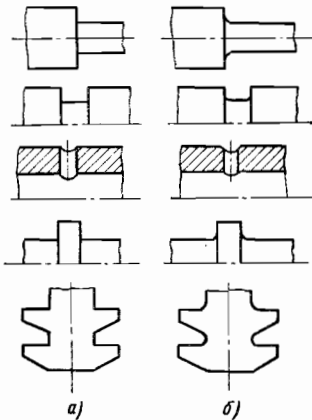


Рис. 17. Неправильное (а) и правильное (б) выполнение конструктивных элементов

необходимо предусматривать меры по снижению концентрации напряжений (подробнее см. гл. 28). Примеры правильного и неправильного конструирования некоторых типичных элементов показаны на рис. 17.

Большие местные напряжения возникают также при передаче усилия с одной детали на другую, прижатую к ней небольшим участком поверхности, например в зонах соприкосновения зубьев зубчатых колес, в шариковых и роликовых подшипниках, в замковых соединениях рабочих лопаток турбомашин с диском и т. п. Такие напряжения называют *контактными*. Так как с увеличением нагрузки размер контактной площадки увеличивается, то контактные напряжения возрастают медленнее, чем нагрузка. Для обеспечения контактной прочности материалы подвергают поверхностному упрочнению, повышающему их твердость (более подробно см. гл. 35).

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

При нагреве тела расширяются, т. е. испытывают температурную деформацию

$$\epsilon = \alpha \Delta T, \tag{24}$$

где α — коэффициент температурного линейного расширения материала (см. табл. 1); ΔT — изменение температуры тела.

Если нагреваемая деталь (стержень, рис. 18, а) закреплена в жестком корпусе, который остается холодным, то длина стержня также должна остаться без изменения и в нем возникнут сжимающие температурные напряжения

$$\sigma = -E\alpha\Delta T. \tag{25}$$

При охлаждении температурные напряжения будут растягивающими.

Температурные напряжения возникают также и в тех случаях, когда температура в различных точках детали неодинакова или когда связанные между собой нагретые детали сделаны из материалов с различными коэффициентами линейного расширения.

В горячих частях детали и в деталях с большим коэффициентом линейного расширения температурные напряжения обычно бывают сжимающими.

Величина температурных напряжений зависит от свойств материала, от конфигурации детали, от закона распределения температур и может быть весьма значительной.

Пример. При охлаждении на ΔT ступенчатого стержня (рис. 18, б) температурные напряжения в узкой части

$$\sigma = E\alpha\Delta T \frac{1 + 2 \frac{a}{l}}{1 + 2 \frac{a}{l} \frac{F_1}{F_2}}.$$

Если $F_1 = 0,5 F_2$ и $l = 0,1 a$, то $\sigma = 10,5 E\alpha\Delta T$, что для стального стержня уже при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ дает $\sigma = 2420$ кгс/см².

Чем выше теплопроводность материала (см. табл. 1), тем равномернее прогревается деталь и тем ниже температурные напряжения при прочих равных условиях.

НАПРЯЖЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Различают следующие напряженные состояния:

а) *линейное* (одноосное) — когда из трех главных напряжений только одно не равно нулю. В одноосном напряженном состоянии находятся детали при растяжении, сжатии, чистом изгибе:

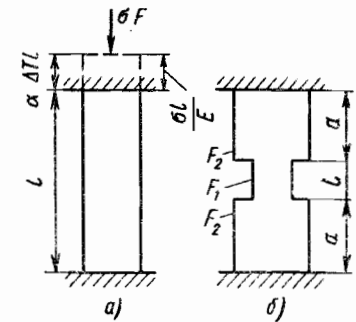


Рис. 18. К расчету температурных напряжений

б) *плоское* (двухосное) — когда из трех главных напряжений два не равны нулю. Практически в двухосном напряженном состоянии находятся вращающиеся диски, тонкостенные сосуды под внутренним давлением, стержни при чистом кручении и при поперечном изгибе. Свободные от нагрузок участки поверхности деталей любой конфигурации всегда находятся в двухосном напряженном состоянии;

в) *объемное* (трехосное) — когда все три главных напряжения не равны нулю (толстостенные трубы под внутренним давлением, области контактов различных тел, внутренние области массивных деталей).

Деформации большей частью развиваются по всем направлениям, т. е. соответствуют объемному (трехосному) деформированному состоянию. Состояние, близкое к двухосной деформации, реализуется при нагружении длинных толстостенных труб внутренним давлением.

Характер напряженно-деформированного состояния влияет на условия развития деформаций и разрушения детали.

МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ

К основным механическим свойствам материала относят:

прочность — способность сопротивляться нагрузкам без разрушения;

деформативность — способность изменять размеры и форму без разрушения;

упругость — способность восстанавливать первоначальные размеры и форму после снятия нагрузки;

пластичность — способность получать не разрушаясь значительную деформацию, остающуюся после снятия нагрузки; противоположное свойство называют *хрупкостью*;

твердость — способность сопротивляться при местных контактных воздействиях пластической деформации или хрупкому разрушению в поверхностном слое;

выносливость — способность сопротивляться разрушению от усталости, т. е. от возникновения и развития трещины под влиянием многократно повторяющихся нагружений.

Характеристики прочности, пластичности и твердости определяют при постепенно возрастающих нагрузках, они служат для оценки статической прочности материала. *Выносливость* определяют при циклически меняющихся нагрузках, по ней судят о работоспособности материала при переменных напряжениях.

Один и тот же материал при различных условиях и скоростях нагружения и при разных температурах может обладать различными механическими свойствами. Количественная оценка механических свойств производится при испытании стандартных образцов в определенных условиях нагружения.

СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Прочность при растяжении. Испытание материалов на растяжение — наиболее простое и распространенное. Чтобы результаты испытаний были сравнимы, применяют геометрически подобные образцы обычно круглого сечения. Образец растягивают на разрывной машине и определяют зависимость удлинения расчетной части образца Δl от нагрузки P вплоть до разрушения. По этим данным строят диаграмму растяжения (рис. 1), т. е. зависимость относительного удлинения $\epsilon = \Delta l/l_0$ от условного напряжения $\sigma = P/F_0$, где F_0 — площадь поперечного сечения образца до деформации.

В начале нагружения между напряжением и деформацией существует линейная зависимость, что позволяет при расчетах пользоваться законом Гука. Напряжение, при котором отступление от линейной зависимости между напряжениями и деформациями впервые достигает некоторой заданной величины, называют *пределом пропорциональности* $\sigma_{пц}$ (точка 1 на рис. 1). Если в какой-либо момент начать разгружать образец (точка А), то зависимость между напряжением и деформацией при разгрузке изобразится прямой линией АВ, практически параллельной линии нагрузки ОI. Деформация в точке А состоит из упругой части $\epsilon_{упр}$, которая устраняется после снятия нагрузки, и остаточной (пластической) части $\epsilon_{ост}$, которая остается после снятия нагрузки. Напряжение, при котором остаточные деформации впервые достигают некоторой заданной величины (обычно порядка 0,002—0,003%), называют *пределом упругости* σ_y (точка 2). Предел упругости часто считают совпадающим с пределом пропорциональности.

При нагружении за пределом упругости остаточные деформации заметно увеличиваются. Для малоуглеродистой стали деформация некоторое время растет без нарастания напряжений, что дает площадку текучести (рис. 2). Напряжение, соответствующее площадке текучести, называют *пределом текучести* σ_T .

Многие материалы не имеют площадки текучести. Для них определяется условный предел текучести — напряжения, при котором остаточные деформации достигают некоторой заданной величины (обычно 0,2%); условный предел текучести,

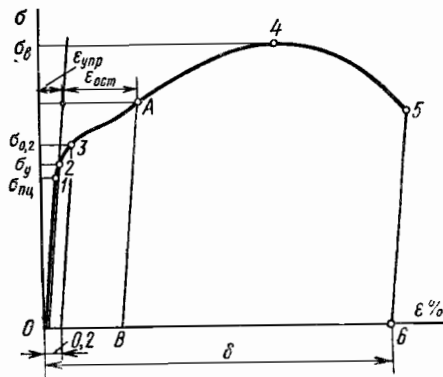
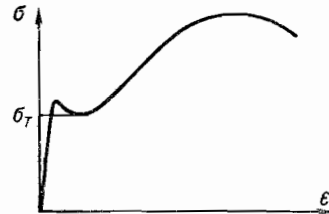


Рис. 1. Диаграмма растяжения

Рис. 2. Диаграмма растяжения с площадкой текучести



соответствующий указанной величине остаточной деформации, обозначают $\sigma_{0.2}$ (точка 3 на рис. 1).

Вначале образец равномерно растягивается по всей длине; при большой деформации происходит потеря устойчивости пластической деформации и образуется местное сужение — шейка, в результате чего условное напряжение уменьшается, хотя истинное напряжение, определяемое по действительной минимальной площади сечения образца, продолжает возрастать. Хрупкие материалы разрушаются без образования заметной шейки.

Максимальное условное напряжение, которое выдерживает образец, называют кратковременным сопротивлением или *пределом прочности* σ_B (точка 4). Истинное напряжение в момент окончательного разрушения образца называют истинным *пределом прочности* — S_K .

При испытании на растяжение определяют также характеристики пластичности материала: *относительное удлинение* и *относительное сужение* (уменьшение площади поперечного сечения) при разрыве.

Относительное удлинение, численно равное отрезку $0-6$ (рис. 1), вычисляют по формуле

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} 100\%, \tag{1}$$

где l_k — суммарная длина разорвавшихся участков расчетной части образца; l_0 — длина расчетной части образца до деформации.

Так как после образования шейки образец деформируется по длине неравномерно, то величина δ в определенной степени зависит от расчетной длины образца. Поэтому удлинение, определенное на образце, расчетная длина которого в 5 раз превышает диаметр, иногда обозначают δ_5 .

Относительное сужение поперечного сечения

$$\psi = \frac{F_0 - F_k}{F_0} 100\%, \tag{2}$$

где F_0 — площадь сечения расчетной части образца до деформации; F_k — конечная площадь сечения по шейке образца после разрушения.

Механические свойства сталей и других конструкционных материалов приведены в разделе «Расчеты на прочность».

При пластической деформации объем материала практически не меняется, поэтому до момента образования шейки $F_0 l_0 \approx F_k l_k$ и

$$\delta^* \approx \frac{\psi}{1 - \psi}. \tag{3}$$

После образования шейки формулой (3) определяется местное удлинение в зоне шейки, поэтому значение δ^* по формуле (3) оказывается большим, чем δ по формуле (1). Истинный предел прочности

$$S_K \approx \sigma_B \frac{F_0}{F_k} = \frac{\sigma_B}{1 - \psi} = \sigma_B (1 + \delta^*).$$

При больших пластических деформациях приращение относительной деформации

$$de = \frac{dl}{l},$$

где l — текущая длина образца.
Полное истинное удлинение

$$e = \int_{l_0}^{l_k} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_k}{l_0} \approx \ln \frac{1}{1 - \psi} = \ln (1 + \delta^*). \tag{4}$$

Истинное удлинение меньше условного, однако до значений, типичных для конструкционных материалов, различие между ними невелико. Например, при $\delta^* = 30\%$ величина $e = 26\%$. В справочниках обычно приводят значения δ и ψ .

Прочность при сжатии. Стандартных испытаний материалов на сжатие обычно не проводят, так как такие испытания сопряжены с большими трудностями (при некотором эксцентриситете приложения сжимающей силы образцы начинают изгибаться; их форма из-за трения в захватах становится бочкообразной, образцы из пластичных материалов не разрушаются, а сплющиваются). Для большинства конструкционных материалов модуль упругости, предел пропорциональности (упругости) и условный предел текучести при растяжении и сжатии можно считать одинаковыми. Предел прочности хрупких материалов (чугуны) при сжатии может быть значительно выше, чем при растяжении.

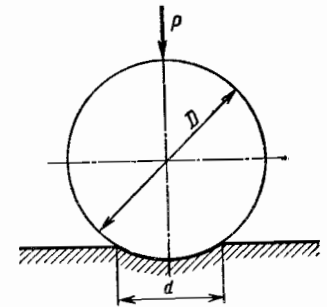


Рис. 8. К определению твердости по Бринеллю

Твердость. Обычно чем тверже материал, тем выше его статическая прочность. Так как испытание на твердость проводится без разрушения детали, широко применяют приближенную оценку прочности и правильности термобработки по величине твердости.

Твердость по Бринеллю (HB) определяют вдавливанием в испытуемый материал шарика из закаленной стали диаметром 10 мм под нагрузкой 3000 кгс. Число HB равно отношению силы, вдавливающей шарик, к площади поверхности полученного отпечатка (рис. 3):

$$HB = \frac{2P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}. \tag{5}$$

Для оценки твердости иногда используют диаметр отпечатка d в мм. Чем выше твердость, тем меньше диаметр отпечатка (табл. 1).

Твердость закаленной стали определяют по Роквеллу (шкала C) вдавливанием алмазного конуса. Число твердости HRC соответствует разности глубин проникновения конуса под действием основной нагрузки (150 кгс) и предварительной (10 кгс).

Для сталей между значениями чисел твердости HB , HRC и пределом прочности σ_B существуют устойчивые соотношения, приведенные в табл. 1. Для материалов, разрушающихся без образования шейки (чугуны, литые алюминиевые сплавы), закономерной связи твердости с пределом прочности не наблюдается.

1. Соотношения между числами твердости по Бринеллю, Роквеллу и пределом прочности сталей

По Бринеллю		По Роквеллу HRC	Предел прочности стали σ_B , кгс/мм ²					По Бринеллю		По Роквеллу HRC	Предел прочности стали σ_B , кгс/мм ²				
Диаметр отпечат- ка, мм	HB, кгс/мм ²		угле- ростой	хроми- стой	хромо- келевой	хромо- либдено- вой	Диаметр отпечат- ка, мм	HB, кгс/мм ²	угле- ростой		хроми- стой	хромо- келевой	хромо- либдено- вой		
2.34	688	65	248	—	234	227	3.44	313	34	112	109	106	103		
2.37	670	64	241	—	228	221	3.52	298	32	107	104	102	98		
2.39	659	63	237	—	224	218	3.62	282	30	102	98	96	93		
2.42	643	62	231	—	218	212	3.70	269	28	98	94	92	89		
2.45	627	61	226	218	213	207	3.80	255	26	92	89	86	84		
2.48	611	60	220	213	207	202	3.90	241	24	87	84	82	80		
2.51	597	59	214	208	202	197	4.00	229	22	82	80	78	76		
2.54	582	58	208	203	197	192	4.10	217	20	78	76	74	72		
2.57	569	57	205	200	194	188	4.20	207	18	74	72	70	68		
2.62	547	55	196	191	185	180	4.26	200	—	72	70	68	66		
2.71	510	52	183	178	173	168	4.37	190	—	68	67	65	63		
2.78	485	50	175	170	165	160	4.48	180	—	65	63	61	59		
2.85	461	48	165	162	156	152	4.60	170	—	61	59	58	56		
2.91	441	46	159	154	150	145	4.74	160	—	58	56	54	52		
2.98	420	44	151	147	143	138	4.88	150	—	54	52	51	50		
3.08	393	42	141	137	134	130	5.05	140	—	50	49	48	47		
3.14	378	40	136	132	128	125	5.21	130	—	47	45	44	43		
3.24	354	38	128	124	121	117	5.42	120	—	43	42	41	40		
3.34	333	36	120	117	113	110	5.63	110	—	40	39	38	37		
							5.83	102	—	37	36	35	34		

Ударная вязкость. Для контроля механических свойств материалов, особенно склонных к хрупкому разрушению, большое практическое значение имеет *ударная вязкость* a_n , которую определяют ударным разрушением на копре надрезанного образца стандартной формы (размерами $10 \times 10 \times 55$ с полукруглым надрезом глубиной 2 мм и радиусом 1 мм). Число a_n равно отношению работы A , идущей на разрушение образца к площади F поперечного сечения образца в месте излома:

$$a_n = \frac{A}{F}$$

Для конструкционных сталей величина ударной вязкости обычно колеблется в пределах $a_n = 5 \div 10$ кгс·м/см². Применение материалов с $a_n < 2$ кгс·м/см² для изготовления деталей машин допускается в редких случаях.

Влияние концентрации напряжения. При однократном статическом нагружении материал, обладающий достаточной пластичностью, по достижении в местах концентрации напряжений предела текучести деформируется без увеличения напряжений. В результате напряжения по сечению выравниваются, и разрушающая нагрузка практически не изменяется. При повторных нагружениях концентрация напряжений снижает несущую способность детали (см. ниже). В более хрупких материалах неравномерное распределение напряжений сохраняется до момента разрушения и оценивается эффективным коэффициентом концентрации напряжений при постоянной нагрузке, который определяют экспериментально как отношение предела прочности гладкого образца σ_B к пределу прочности аналогичного образца с концентратором напряжений (обычно с надрезом) σ_{BK} :

$$k = \frac{\sigma_B}{\sigma_{BK}} \tag{6}$$

Чувствительность материала к концентрации напряжения оценивают также величиной ударной вязкости, которую определяют на образцах с надрезом.

СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ ВЫСОКИХ И НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Для большинства конструкционных материалов при нормальной температуре статическая прочность практически не зависит от времени приложения нагрузки. С повышением температуры механические свойства материалов изменяются: пределы прочности, пропорциональности и текучести, а также модуль упругости убывают; пластичность обычно увеличивается, но при некоторых температурах она может и понижаться. Для всех конструкционных материалов при повышенных температурах, а для некоторых материалов (типа полимеров) даже при нормальной, статическая прочность зависит от длительности нагружения, так как с течением времени могут меняться механические свойства материала, размеры детали и распределение в ней напряжений. Поэтому при высоких температурах определяют не только обычные механические характеристики при кратковременных испытаниях, но и характеристики при продолжительной работе. Прочность материала называют в этом случае *длительной прочностью*.

Для определения механических свойств образца при продолжительной работе его нагревают в электропечи, установленной на разрывной машине, нагружают и отмечают время до разрушения t_p . Чем меньше напряжение, тем дольше образец не разорвется.

Напряжение, при котором образец разрушается через заданный промежуток времени, называют *пределом длительной прочности* $\sigma_{дл}$. Обозначение $\sigma_{дл}^{300} = 25$ кгс/мм² указывает, что при напряжении 25 кгс/мм² образец разрушается не менее чем через 300 ч. Предел длительной прочности всегда ниже предела прочности при кратковременном испытании; наиболее сильное падение прочности наблюдается в течение первых часов работы.

Зависимость предела длительной прочности $\sigma_{дл}$ от времени t при постоянной температуре T называют кривой длительной прочности. В двойных логарифмических координатах эта зависимость в определенных пределах имеет вид прямой линии (рис. 4)

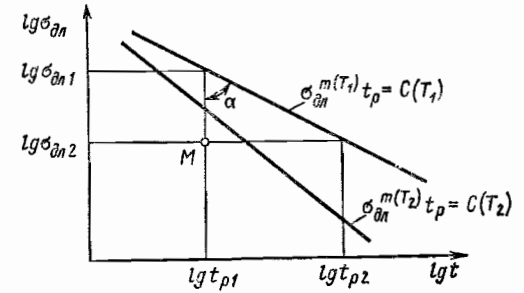


Рис. 4. Кривые длительной прочности при разных постоянных температурах ($T_2 > T_1$)

$$\lg t_{p2} - \lg t_{p1} = \lg \alpha (\lg \sigma_{дл1} - \lg \sigma_{дл2}),$$

или

$$\sigma_{дл1}^m t_{p1} = \sigma_{дл2}^m t_{p2} = C, \tag{7}$$

где $m = \lg \alpha$ и C постоянные для данной температуры испытания. Чем выше температура, тем меньше показатель степени m и тем быстрее убывает по времени предел длительной прочности. Пределы длительной прочности для некоторых материалов приведены в табл. 2. По этим данным и формуле (7) можно найти значение постоянных m, C :

$$m = \frac{\lg \frac{t_{p2}}{t_{p1}}}{\lg \frac{\sigma_{дл1}}{\sigma_{дл2}}}; \quad C = \sigma_{дл1}^m t_{p1}$$

2. Механические свойства (в кгс/мм²) некоторых материалов при повышенной температуре

Марка стали или сплава	Температура испытания, °С	Предел прочности σ_B	Предел текучести $\sigma_{0,2}$	Предел длительной прочности $\sigma_{дл}$			Предел ползучести	
				за 100 ч	за 1000 ч	за 10 ⁵ ч	$\sigma_{0,2/100}$	$\sigma_{1/10^5}$
2Х13	20	72	52	—	—	—	—	—
	300	56	43	—	—	—	—	—
	400	53	40	—	—	—	—	—
	450	49	38	40	—	—	—	—
	500	44	36	—	—	17	—	4,8
550	35	28	—	—	—	—	3,0	
12Х18Н9Т	20	65	31	—	—	—	—	—
	400	44	22	—	—	—	—	—
	500	43	21	—	—	—	—	—
	600	36	18	25	—	15	—	8
	700	28	16	13	—	—	—	—
800	18	10	5	—	—	—	—	
40Х10С2М	20	96	68	—	—	—	—	—
	400	78	49	—	—	—	—	—
	500	68	46	35	—	16,2	20	12,8
	550	55	42	24	—	9,5	9	4
600	44	37	—	—	—	5	2,2	
ХН35ВТ	20	84	44	—	—	—	—	—
	500	69	43	—	—	—	—	—
	600	66	42	—	32	23	—	—
	650	57	41	30	22	15	—	13
700	48	40	—	14	6,5	—	8	
37Х12Н8Г8МФВ	20	94	60	—	—	—	—	—
	450	72	50	—	—	—	—	—
	600	60	45	45	38	—	35	—
	650	56	43	35	28	—	30	—
	700	50	38	—	—	—	24	—
750	42	33	—	—	—	—	—	
ХН70МВТЮБ	20	105	70	—	—	—	—	—
	600	98	63	—	—	—	—	—
	700	93	60	48	—	—	18	—
	800	72	56	25	—	—	—	—
	900	38	28	—	—	—	—	—
ХН77ТЮР	20	110	70	—	—	—	—	—
	500	96	64	—	—	—	—	—
	600	87	57	70	56	—	56	—
	700	83	56	44	33	—	40	—
800	55	44	22	11	—	17	—	
ХН70ВМЮТ	20	114	75	—	—	—	—	—
	600	99	68	—	—	—	—	—
	700	90	65	50	36	—	40	—
	800	75	58	28	18	—	23	—
900	49	38	12	10	—	10	—	
ЖС6К	20	95	85	—	—	—	—	—
	800	92	84	52	38	—	38	—
	900	78	62	32	16	—	20	—
	1000	54	32	15	6,5	—	6	—
1030	43	26	12	—	—	—	—	

Продолжение табл. 2

Марка стали или сплава	Температура испытания, °С	Предел прочности σ_B	Предел текучести $\sigma_{0,2}$	Предел длительной прочности $\sigma_{дл}$			Предел ползучести	
				за 100 ч	за 1000 ч	за 10 ⁵ ч	$\sigma_{0,2/100}$	$\sigma_{1/10^5}$
АЛ13	20	37	22	—	—	—	—	—
	175	27	20	18,5	—	—	18	—
	200	26	22	15	—	—	—	—
	250	17	10	11,5	—	—	—	—
	300	12	7,5	6,5	—	—	—	—
АК4-1	20	45	38	—	—	—	—	—
	150	40	36	29	—	—	28	—
	200	34	29	17	—	—	16	—
	250	28	20	10	—	—	8	—
300	17	14	4	—	—	3	—	
ВД-17	20	50	33	—	—	—	—	—
	200	38	—	19	—	—	16	—
	250	24	—	10	—	—	7,5	—
300	18	—	5,5	—	—	8,2	—	
ВТ3-1	20	100	95	—	—	—	—	—
	300	—	—	65	55	—	—	—
	400	76	63	36	27	—	28	—
	500	70	56	—	—	—	—	—
600	53	25	—	—	—	—	—	
ВТ9	20	115	103	—	—	—	—	—
	400	85	72	—	—	—	—	—
	500	80	66	65	—	—	28	—
	550	78	62	45	—	—	12	—
600	72	55	23	—	—	—	—	

Например, для сплава ХН77ТЮР при $T = 700^\circ\text{C}$ $\sigma_{дл}^{100} = 44$ кгс/мм², $\sigma_{дл}^{1000} = 33$ кгс/мм², откуда

$$m = \frac{\lg \frac{1000}{100}}{\lg \frac{44}{33}} = 7,9 \quad \text{и} \quad C = 44^{7,9} \cdot 100 = 9,75 \cdot 10^{14}.$$

Размеры нагруженных при высокой температуре деталей с течением времени непрерывно меняются, что может нарушить работу машины. Это явление называют *ползучестью*. При испытании на ползучесть к нагретому образцу прикладывают постоянную нагрузку и через определенные промежутки времени измеряют удлинение образца. Зависимость остаточной деформации от времени испытаний при постоянном напряжении и постоянной температуре называют *кривой ползучести* (рис. 5).

Остаточная деформация вначале быстро нарастает (стадия I — неустановившаяся ползучесть), затем в течение основного времени работы скорость ползучести остается примерно постоянной (стадия II — установившаяся ползучесть), наконец, перед разрушением образца скорость ползучести быстро нарастает (III стадия). Чем выше напряжение и температура, тем быстрее развивается ползучесть.

Наибольшее напряжение, при котором деформация ползучести за определенный период времени не превышает заданной величины, называют *пределом ползучести* (обозначение $\sigma_{0,2/100} = 15$ кгс/мм² указывает, что при напряжении 15 кгс/мм² полу-

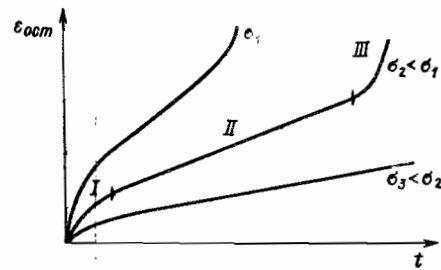


Рис. 5. Кривые ползучести при разных постоянных напряжениях

Применение обычных конструкционных сталей в условиях значительной напряженности ограничено температурой 300—400 °С. Жаропрочные стали и сплавы на основе никеля и тугоплавких металлов применяют при температурах до 700—800 °С и выше. При еще более высоких температурах применяют металлокерамические и керамические материалы.

При очень низких (или, как их иногда называют, криогенных) температурах механические свойства материалов также меняются: повышается прочность и снижается пластичность.

При снижении температуры от нормальной до —200 °С пределы прочности и текучести сталей возрастают в среднем на 20—30%. Относительное удлинение и, особенно, относительное сужение заметно уменьшаются, т. е. материал становится более хрупким. Усиливается чувствительность материала к концентрации напряжений, поэтому прочность надрезанных образцов с понижением температуры обычно падает.

Для каждого материала имеется предельная температура, ниже которой его применение в конструкциях становится недопустимым из-за вы.окой хрупкости.

СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

При переменных напряжениях деталь разрушается от меньших нагрузок, чем при постоянных. Усталостное разрушение, как правило, начинается с поверхности в местах высокой концентрации напряжений. Трещина обычно развивается в направлении, перпендикулярном линии действия наибольших нормальных напряжений. Когда прочность оставшейся части становится недостаточной, происходит окончательное разрушение (рис. 6).

Переменное напряжение периодически меняется от наименьшего значения σ_{min} до наибольшего σ_{max} и обратно (рис. 7).

Среднее напряжение

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_{max} + \sigma_{min}), \tag{8}$$

амплитуда переменных напряжений

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_{max} - \sigma_{min}). \tag{9}$$

Цикл называют *симметричным*, если наибольшее и наименьшее напряжения равны по величине, но противоположны по знаку. Такой цикл осуществляется при стандартных испытаниях на выносливость образцов в виде вращающихся валов круглого сечения (диаметром 7—10 мм) при их изгибе моментами постоянной величины и направления (рис. 8).

чество за 100 ч вызывает относительное остаточное удлинение 0,2%). Пределы ползучести некоторых сплавов приведены в табл. 2.

Когда общая деформация детали по условиям работы остается неизменной (например, вытяжка болта в резьбовом соединении), увеличение с течением времени пластической деформации приводит к уменьшению упругой деформации и падению напряжения (в данном случае к ослаблению резьбового соединения). Это называют *релаксацией напряжений*.

Наконец, при высоких температурах происходит интенсивное окисление ряда материалов.

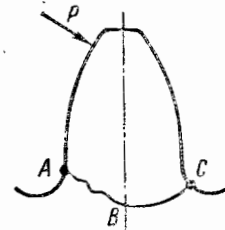


Рис. 6. Схема разрушения зуба зубчатого колеса от усталости: А — точка возникновения усталостной трещины; АВ — линия развития трещины; ВС — область долома

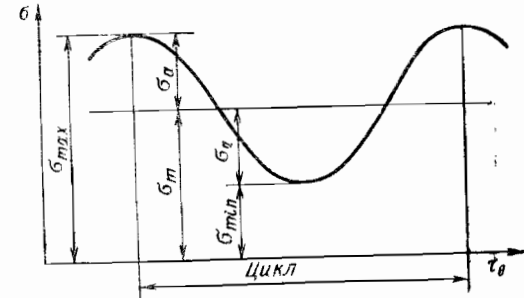


Рис. 7. Цикл переменного напряжения

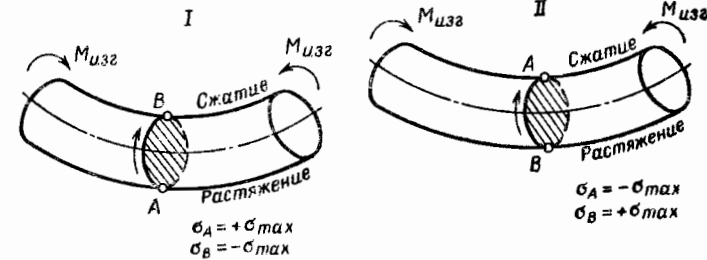


Рис. 8. Возникновение симметричного цикла переменных напряжений при изгибе вращающегося круглого валика; положения I и II отличаются на половину оборота вала

На практике встречаются в основном *асимметричные* циклы. Коэффициентом асимметрии цикла называют отношение

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}.$$

Для симметричного цикла $\sigma_m = 0$, $\sigma_{max} = \sigma_a = -\sigma_{min}$ и $r = -1$. Важным частным случаем асимметричного цикла является *пульсирующий*, когда напряжения меняются от нуля до максимальной величины, как, например, при изгибе зубьев зубчатых колес (рис. 9). Для такого цикла $\sigma_{min} = 0$, $\sigma_m = \sigma_a = 0,5 \sigma_{max}$ и $r = 0$.

Оценку сопротивляемости материала действию переменных напряжений проводят испытаниями на выносливость партии из 15—20 однотипных образцов, которые доводят до разрушения при разном уровне амплитуд напряжений. По результатам испытания строят кривые усталости (кривые Белера), показывающие зависимость между числом циклов до разрушения N и максимальным напряжением или амплитудой цикла (рис. 10). По оси абсцисс, а иногда и по оси ординат для удобства откладывают значения $\lg N$ и $\lg \sigma$.

Зависимость разрушающих амплитуд σ_a от числа циклов до разрушения N (в определенных пределах) имеет вид

$$\sigma_a^m N = C = const, \tag{10}$$

где m , C — постоянные для данного материала; обычно $m = 4 \div 10$.

Для большинства сталей при умеренных температурах кривая усталости, начиная с числа циклов $N \approx 10^6 - 10^7$, становится практически горизонтальной, т. е. образцы,

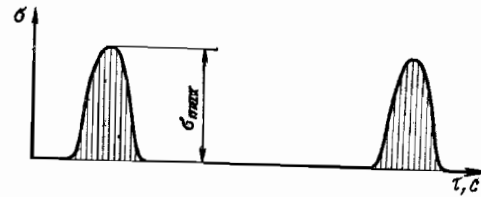
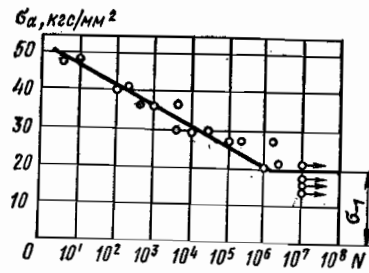


Рис. 9. Схема пульсирующего цикла напряжений в зубе зубчатого колеса

Рис. 10. Кривая усталости:
○ — разрушившиеся и ○ — неразрушившиеся образцы



выдержавшие указанное число циклов, не разрушаются и при дальнейшем нагружении. Поэтому испытания сталей прекращают при $N = 10^7$ циклов. Наибольшее значение максимального напряжения σ_{max} , при котором материал может выдержать без разрушения практически неограниченное число циклов, называют *пределом выносливости*.

Легкие сплавы, а также все материалы при высоких температурах и при испытаниях в коррозионных средах имеют кривые усталости в координатах $\sigma_{max} - \lg N$ без горизонтального участка. В этом случае определяют *ограниченный предел выносливости*, соответствующий определенной базе испытаний [обычно $N = (0,1 \div 1) \cdot 10^8$ циклов]. Для получения надежной оценки предела выносливости число неразружившихся образцов при данном уровне переменных напряжений должно быть не менее шести.

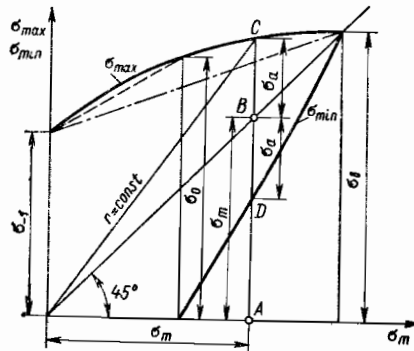


Рис. 11. Диаграмма предельных напряжений

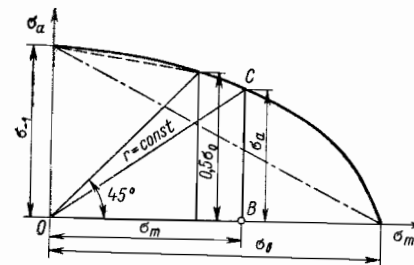


Рис. 12. Диаграмма предельных амплитуд напряжений

Предел выносливости симметричного цикла обозначают σ_{-1} , так как для такого цикла $r = -1$. Для сталей ориентировочно можно считать

$$\sigma_{-1} \approx (0,55 - 0,001\sigma_B) \sigma_B.$$

Для касательных напряжений $\tau_{-1} \approx 0,6\sigma_{-1}$.

Испытания на усталость при асимметричных циклах проводят на специальных машинах. По результатам испытаний строят диаграммы *предельных напряжений* σ_{max} и $\sigma_{min} = f(\sigma_m)$ (рис. 11) или *предельных амплитуд* цикла $\sigma_a = f(\sigma_m)$ (рис. 12). Если на диаграмме предельных напряжений провести прямую под углом 45° к горизонтальной оси, то отрезок AB даст величину среднего напряжения цикла, а отрезок $BC = BD$ — величину предельной амплитуды, соответствующей пределу выносливости циклов с коэффициентом асимметрии r , расположенных на луче OC . Через σ_0 обозначают предел выносливости пульсирующего цикла, для которого $r = 0$. Всегда $\sigma_0 > \sigma_{-1}$, но $\sigma_{0a} < \sigma_{-1}$.

Постоянные растягивающие напряжения уменьшают усталостную прочность, поэтому при увеличении среднего напряжения цикла предельная амплитуда σ_a

становится меньше, хотя предел выносливости σ_{max} увеличивается. Для упрощения расчетов принимают, что на участке диаграмм между симметричным и пульсирующим циклом предельные амплитуды изменяются линейно (штриховые линии на рис. 11 и 12)

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m, \tag{11}$$

где ψ_σ — коэффициент, характеризующий чувствительность материала к асимметрии цикла. Аналогичную формулу, но с коэффициентом ψ_τ используют для касательных напряжений.

Для циклов с асимметрией до $\frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}} = \frac{1}{1 + \psi_\sigma}$ (примерно до $\frac{\sigma_m}{\sigma_B} = 0,4 \div 0,5$) значения ψ_σ и ψ_τ для сталей принимают по данным табл. 3. Для титана и легких сплавов $\psi_\sigma \approx 0,2 \div 0,3$.

8. Приближенные значения коэффициентов ψ_σ и ψ_τ для сталей при нормальной температуре

Вид деформации	σ_B , кгс/мм ²				
	35-52	52-72	72-100	100-120	120-140
Изгиб и растяжение	0	0,05	0,1	0,2	0,25
Кручение	0	0	0,05	0,1	0,15

В запас прочности для всех циклов с растягивающими средними напряжениями можно считать $\psi_\sigma \approx \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B}$, что соответствует штрихпунктирным линиям на рис. 11 и 12.

Постоянные сжимающие напряжения до определенных пределов способствуют повышению усталостной прочности, особенно для малопластичных материалов. В расчетах для сжатия (при $\sigma_m < 0$) обычно принимают $\psi_\sigma = 0$.

На предел выносливости материала оказывают существенное влияние следующие факторы.

1. *Абсолютные размеры детали.* С увеличением размеров поперечных сечений предел выносливости уменьшается, что оценивается коэффициентом e_σ (масштабный фактор, рис. 13)

$$e_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}}, \tag{12}$$

где $(\sigma_{-1})_d$ — предел выносливости гладких образцов диаметром d ; σ_{-1} — то же, для стандартных лабораторных образцов диаметром 7—10 мм.

2. *Концентрация напряжений.* Чем выше концентрация напряжений, тем ниже предел выносливости. Влияние концентрации напряжений на выносливость оценивается эффективным коэффициентом концентрации напряжений при переменной нагрузке k_σ , который определяют экспериментально как отношение предела выносливости гладкого образца $(\sigma_{-1})_d$ к пределу выносливости образца того же размера с концентрацией напряжений (например, с надрезом)

$$k_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1k})_d}. \tag{13}$$

Эффективный коэффициент концентрации k_σ обычно меньше коэффициента концентрации при упругом распределении напряжений α_σ и связан с ним соотношением

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1),$$

где q_σ — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений.

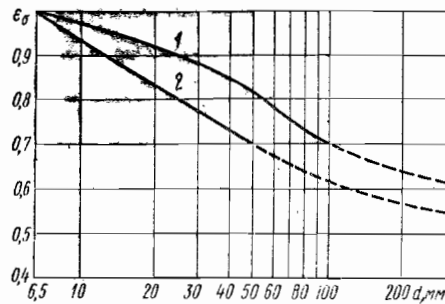


Рис. 13. Коэффициент влияния абсолютных размеров:

1 — углеродистые стали, $\sigma_B = 40 + 50 \text{ кгс/мм}^2$;
2 — легированные стали, $\sigma_B = 120 + 140 \text{ кгс/мм}^2$

Для конструкционных сталей обычно $q_\sigma \approx 0,5 + 0,9$. С увеличением размеров зерна и неоднородности структуры (например, у серого чугуна) коэффициент q_σ уменьшается до $0,1 - 0,2$ (см. гл. 31).

3. *Состояние поверхности.* Чем меньше микронеровности поверхности, тем выше предел выносливости детали. Выносливость повышается после термехимических и механических обработок, которые создают в поверхностном слое остаточные напряжения сжатия и повышают его твердость (цементация, азотирование, поверхностная закалка, наклеп). После шлифования в поверхностном слое могут возникнуть остаточные напряжения растяжения, которые снижают сопротивление усталости. Важное значение имеет упрочняющая технология (обдувка дробью, обкатка роликом и др.), повышающая пределы выносливости деталей (см. гл. 31). Состояние поверхности учитывают при определении k_σ или отдельным коэффициентом

$$\beta_\sigma = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_a} \quad (14)$$

где $(\sigma_{-1k})_d$ — предел выносливости натурной детали.

4. На состояние поверхности существенно влияет *окружающая среда*. В коррозионных средах (в морской воде и др.) предел выносливости конструкционных сталей, особенно высокопрочных, резко падает. Титановые сплавы малочувствительны к коррозионному воздействию влажного воздуха и морской воды.

5. *Частота переменных напряжений.* С увеличением частоты предел выносливости обычно повышается.

Из формул (12) — (14) следует

$$(\sigma_{-1k})_d = \frac{\epsilon_\sigma \beta_\sigma}{k_\sigma} \sigma_{-1} \quad (15)$$

МАЛОЦИКЛОВАЯ И ТЕРМИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ

Большинство деталей машин работает определенными циклами: пуск, рабочие режимы, остановки. Соответственно этому напряженно-деформированное состояние деталей меняется циклически. За время эксплуатации общее число циклов может меняться от $10 - 100$ для стационарных установок до $10^4 - 10^6$ и более для транспортных машин, грузоподъемных устройств и других механизмов.

Хотя в каждом цикле нагружение носит статический характер, но при повторных нагружениях в материале появляются явления, типичные для усталости. Поэтому разрушение деталей при сравнительно небольшом числе циклов ($10^2 - 10^3$) называют *малоцикловой усталостью*, а способность материала сопротивляться такому разрушению — *малоцикловой прочностью*.

Закономерности малоцикловой прочности занимают «промежуточное» положение между закономерностями статической и усталостной прочности.

При числе циклов $N \geq 10^4$ отчетливо проявляются закономерности усталостного разрушения (влияние концентрации напряжений, качества поверхности и т. д.). При малом числе циклов $N < 10^3$ более типичны особенности статического разрушения.

При малом числе циклов амплитуда напряжений может превосходить предел пропорциональности, и при повторных разгрузках и нагрузках зависимость между

напряжениями и деформациями принимает вид петель циклического упруго-пластического деформирования (петель гистерезиса) с размахом — шириной петли — пластических деформаций $\Delta \epsilon_p$ (рис. 14). При умеренных нагрузках, допустимых для обеспечения достаточно продолжительной работы детали, петли деформирования после нескольких первых «приработочных» циклов обычно стабилизируются, как показано на рис. 14.

Для обеспечения высокой малоцикловой прочности материал должен иметь хорошее сочетание прочностных и пластических свойств, а в конструкциях детали следует избегать зон с повышенной концентрацией напряжений.

Малоцикловую прочность материала оценивают по экспериментальным зависимостям амплитуды напряжений σ_a или деформаций ϵ_a от числа циклов N до разрушения (рис. 15). При расчете малоцикловой прочности пользуются формулой Мэнсона для размаха полных деформаций $\Delta \epsilon_a = 2\epsilon_a$:

$$\Delta \epsilon_a = \left(\ln \frac{1}{1 - \psi} \right)^{0,6} N^{-0,6} + \frac{2,5\sigma_B}{E} N^{-0,12}, \quad (16)$$

где ψ — относительное сужение поперечного сечения; E — модуль упругости,

$$\Delta \epsilon_a = \Delta \epsilon_p + \frac{\Delta \sigma}{E}.$$

Первое слагаемое описывает изменение пластической деформации, второе — изменение упругой деформации от числа циклов N до разрушения.

Для асимметричных циклов со средним напряжением σ_m в формуле (16) вместо σ_B принимают $\sigma_B - \sigma_m$.

Разрушение детали может быть вызвано действием температурных напряжений от повторных нагревов и охлаждений, связанных с тепловым процессом машины или внешними условиями. Сопротивление такому виду разрушения называют *термической прочностью*. При высокой верхней температуре цикла важное значение имеет длительность выдержки при этой температуре. Для повышения термической прочности должны выполняться те же требования, что и для малоцикловой прочности; кроме того, следует принимать меры к снижению температурных напряжений в детали, уменьшению максимальной температуры и выдержки при ней (например, путем лучшей организации охлаждения). Наиболее полно прочность деталей, узлов и машин в целом оценивается при проведении специальных *циклических испытаний* по режимам, приближенно соответствующим типичным эксплуатационным циклам.

РАЗРУШЕНИЯ И ИЗЛОМЫ

Во всяком реальном материале, даже в ненагруженном состоянии, имеются мелкие микротрещины — несплошности и нарушения структуры. Чем точнее метод исследования, тем раньше они обнаруживаются. Однако опыт показывает, что наличие микротрещин не препятствует длительной надежной работе машин и конструкций до

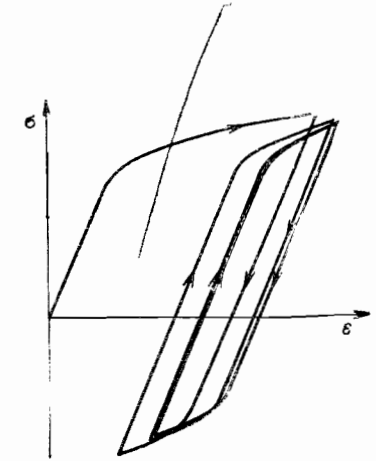


Рис. 14. Петли гистерезиса при повторном упруго-пластическом деформировании

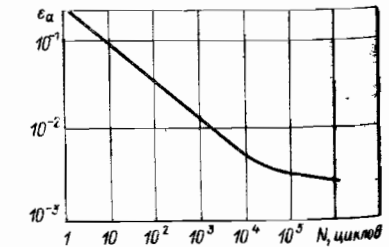


Рис. 15. Типичная кривая малоцикловой усталости углеродистой стали

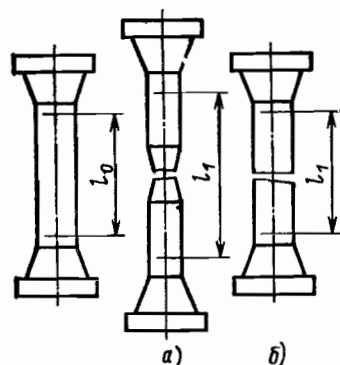


Рис. 16. Пластичное (а) и хрупкое (б) разрушение образца

20%, при хрупком — менее 3%. Характер разрушения определяется в основном свойствами материала. Низкоуглеродистые стали обычно имеют пластичные разрушения, в литых материалах часто обнаруживаются хрупкие разрушения. В связи с этим конструкционные материалы условно разделяют на пластичные и хрупкие. Разделение обычно проводится на основании испытаний на разрыв и на удар:

	$\delta, \%$	$\psi, \%$	$\sigma_{н},$ кгс·м/см ²
Пластичные материалы . . .	≥ 6	≥ 10	≥ 5
Хрупкие	≤ 3	≤ 6	≤ 3

Наиболее опасно хрупкое разрушение, которое происходит внезапно, без заметного предварительного повреждения, начинаясь от зон высокой концентрации напряжений — обычно в конструкциях с большим запасом упругой энергии (резервуары под давлением, вращающиеся роторы). Хрупкому разрушению способствуют:

- концентрация напряжений, плоское и объемное напряженное состояние;
- работа материала при низких температурах и в температурном интервале хладноломкости;
- длительная работа при повышенных температурах;
- нагружение быстровозрастающими (ударными) усилиями.

Пластичные материалы менее чувствительны к концентрации напряжений, так как в результате пластического течения происходит перераспределение (выравнивание) напряжений.

Для ответственных элементов конструкций необходимо применять материалы с достаточной пластичностью.

Для установления причин разрушения детали важное значение имеет анализ изломов. При статических напряжениях разрушение сталей и сплавов достаточно высокой пластичности сопровождается значительными пластическими деформациями. Излом имеет неровную волокнистую поверхность (рис. 17).

При переменных напряжениях разрушение наступает в результате усталости и происходит без заметной пластической деформации, как правило, в зоне концентрации напряжений. Начало разрушений в гладкой части указывает на высокие переменные напряжения или наличие технологических дефектов.

При усталостном изломе различают (рис. 18): зону 1 — очаг начального разрушения, расположенный, как правило, на поверхности детали; зону 2 — область развития усталостной трещины с характерными веерообразными усталостными линиями, уступами и притертыми участками; зону 3 — область окончательного кратковременного долома.

При высоком уровне действующих переменных напряжений ($\sigma_a > 0,5 \sigma_{-1}$) часто наблюдаются несколько очагов возникновения усталостных трещин.

тех пор, пока связанная с ними повреждаемость материала под нагрузкой не приводит к снижению механических свойств ниже предельно допустимых значений.

Допустимую степень повреждаемости устанавливают на основании расчетно-экспериментальных исследований и опыта эксплуатации. До определенных пределов допускаются также некоторые повреждения поверхности в эксплуатации — износ контактных участков, эрозия, забоины, коррозионные точки.

Во избежание развития недопустимой повреждаемости состояние ответственных деталей следует периодически контролировать в процессе эксплуатации и при ремонте неразрушающими методами контроля (ультразвуковыми, токовыми, люминесцентными и т. п.).

Различают пластичное и хрупкое разрушение (рис. 16). При пластичном разрушении деформация в момент разрушения составляет 10—

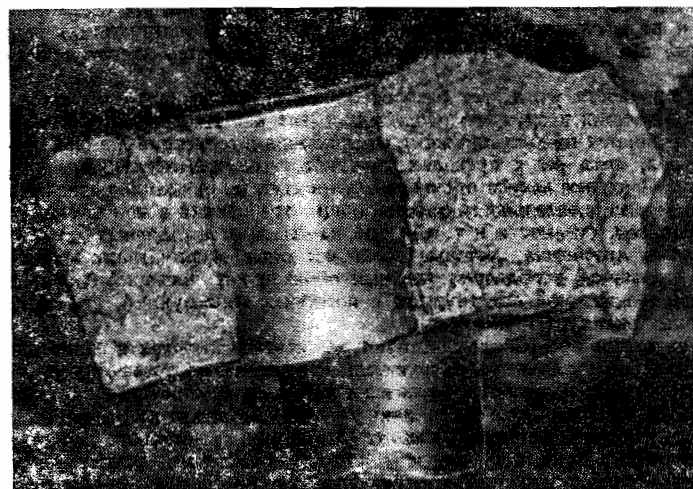


Рис. 17. Вид излома при постоянных напряжениях; разрушение вращающегося диска

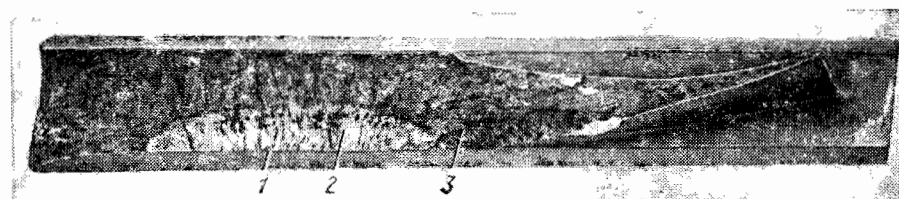


Рис. 18. Излом лопатки компрессора при переменных напряжениях: 1 — место зарождения трещины; 2 — область развития трещины; 3 — зона окончательного долома

При высокой температуре статические изломы идут вдоль границ зерен, усталостные — пересекают зерна и их границы.

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ

При испытании образцов устанавливают предельные напряжения (пределы прочности, выносливости и т. д.), при которых материал разрушается. Для обеспечения нормальной работы максимально допустимые напряжения в детали должны быть меньше предельных.

Отношение предельных напряжений к максимальным напряжениям, возникающим при работе детали, называют *запасом прочности*:

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} \quad (17)$$

Запас прочности должен быть всегда больше единицы. Чем больше запас прочности, тем надежнее деталь в работе. Однако увеличение запаса прочности сверх необходи-

мой величины ведет к увеличению массы и габаритов детали, что невыгодно экономически, а в ряде случаев (например, в авиационных конструкциях) недопустимо. Правильный выбор запаса прочности является важнейшим этапом при расчете на прочность.

Запас прочности учитывает разброс механических свойств материала, неточное знание действующих нагрузок и напряжений (так как все методы расчета деталей на прочность являются приближенными), отступления в геометрии деталей от номинальных размеров, хотя бы в пределах допусков, возможные случайные перегрузки.

При установлении запаса прочности принимают во внимание назначение и ответственность детали, длительность работы, общие требования к конструкции (значение массы, габаритов, стоимости и т. п.). Для наиболее ответственных деталей устанавливают *нормы прочности*, которые обобщают опыт эксплуатации машин.

Запас прочности используют главным образом как критерий сравнения надежности вновь создаваемой конструкции и подобных конструкций, имеющих положительный опыт эксплуатации.

Если на деталь при работе действуют как статические, так и переменные напряжения, вызванные различными нагрузками, и повышенная температура, а прочностные характеристики материала меняются с течением времени или по числу циклов, следует учитывать возможные отклонения этих параметров от их расчетных значений. Расчетные статические напряжения могут возрасти из-за неточного определения максимальных перегрузок, переменные — из-за резонансного усиления колебаний, температура — из-за ухудшения условий охлаждения и т. д. Считая каждое из возможных отклонений независимым, можно установить предельное (разрушающее) значение данного параметра, если остальные останутся неизменными. Отношение предельного значения данного параметра к его расчетной величине называют запасом прочности по данному параметру. Таким образом, запас прочности может оцениваться не только отношением напряжений (17), но и отношениями нагрузок, времени работы, числа циклов и т. д. Для ответственных деталей оценку запасов прочности производят по нескольким параметрам.

ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

При статических напряжениях в качестве предельного напряжения обычно принимают предел прочности σ_B и запас прочности определяют по формуле

$$n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\max}} \quad (18)$$

Обычно $n_B = 1,3 \div 2,5$.

Иногда запас прочности определяют по пределу текучести, имея в виду недопустимость значительной деформации

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}}$$

При кручении

$$n_B = \frac{\tau_B}{\tau_{\max}}$$

Для деталей, работающих при повышенной температуре, определяют запас длительной статической прочности за определенное время работы:

$$n_{дл} = \frac{\sigma_{дл}}{\sigma_{\max}} \quad (19)$$

а также запас по долговечности

$$n_t = \frac{t_p}{t} \quad (20)$$

где t_p — время до разрушения при расчетных напряжениях и температуре; t — расчетное время работы. Запас по долговечности должен быть в несколько раз больше, чем по напряжению.

При степенной зависимости предела длительной прочности от времени [см. формулу (7)], когда $\sigma_{дл}^m t_p = C = \text{const}$, допустимое время работы детали (расчетная долговечность)

$$[t] = \frac{t_p}{n_t} = \frac{C}{n_t \sigma_{дл}^m}$$

Из рис. 4 следует, что для условий работы детали, соответствующих точке M , действующее напряжение $\sigma_{\max} = \sigma_{дл2}$, разрушающее $\sigma_{дл1}$, время работы $t = t_{p1}$, время до разрушения t_{p2} , поэтому

$$n_{дл} = \frac{\sigma_{дл1}}{\sigma_{дл2}}; \quad n_t = \frac{t_{p2}}{t_{p1}} = \left(\frac{\sigma_{дл1}}{\sigma_{дл2}} \right)^m,$$

откуда

$$n_t = n_{дл}^m \quad (21)$$

Обычно величина $4 < m < 20$.

ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

При растяжении, когда напряжения распределены по сечению равномерно, материал достигает предела текучести сразу по всему сечению, размеры детали резко меняются, и она теряет способность выполнять свои функции — теряет *несущую способность*.

Иначе обстоит дело при изгибе, кручении и других видах деформации, отличающихся неравномерным распределением напряжений по сечению. Пока нагрузка мала (момент M_1 на рис. 19), деформации упруги. Когда напряжения в крайних волокнах достигают предела текучести σ_T , несущая способность детали сохраняется, так как остальные волокна испытывают напряжения, меньшие σ_T . Затем область пластических деформаций охватывает все большую часть сечения, пока при моменте $M = M_{\text{пред}}$ напряжения во всех волокнах (за исключением бесконечно малого центрального ядра)

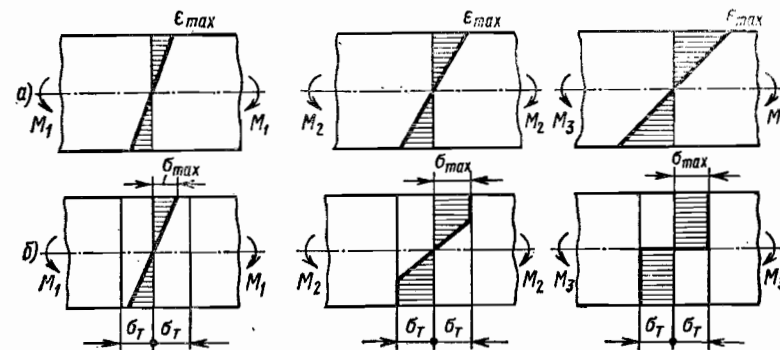


Рис. 19. Распределение деформаций (а) и напряжений (б) по поперечному сечению балки при изгибе в зависимости от величины изгибающего момента;

$$M_3 > M_2 > M_1; \quad M_3 = M_{\text{пред}}$$

не достигают предела текучести. Если материал неупрочняющийся, то дальнейшее увеличение нагрузки невозможно.

Нагрузку, при которой несущая способность детали оказывается полностью исчерпанной, называют предельной.

Отношение предельной нагрузки к максимальной нагрузке, действующей при работе на деталь, называют *запасом прочности по несущей способности* (по нагрузке):

$$n = \frac{P_{\text{пред}}}{P_{\text{max}}} \quad (22)$$

При изгибе запас по несущей способности

$$n = \frac{M_{\text{пред}}}{M_{\text{max}}}$$

Для балки прямоугольного сечения из пластичного материала максимально допустимый изгибающий момент при оценке прочности по несущей способности оказывается в 1,5 раза больше, чем при оценке по максимальным напряжениям. Однако полностью использовать этот резерв прочности можно только при однократном статическом нагружении, если появление некоторых пластических деформаций не мешает нормальной работе конструкции. При сложных нагружениях оценку запаса прочности по несущей способности используют как один из критериев надежной работы детали.

ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Если деталь испытывает переменные напряжения симметричного цикла, то предельным напряжением будет предел выносливости с учетом концентрации напряжений, состояния поверхности и коэффициента влияния абсолютных размеров (предел выносливости детали)

$$(\sigma_{-1k})_d = \frac{\sigma_{-1} \beta \sigma}{k_\sigma} \quad (23)$$

Запас прочности

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a} \quad (24)$$

где σ_a — амплитуда действующих переменных напряжений.

При расчете по касательным напряжениям запас прочности

$$n_\tau = \frac{(\tau_{-1k})_d}{\tau_a}$$

При совместном действии нормального σ_a и касательного τ_a напряжений (изгиб и кручение вала) вводят эквивалентное напряжение

$$(\sigma_a)_{\text{эkv}} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} \quad (25)$$

Тогда запас прочности

$$n = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_a)_{\text{эkv}}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\sigma_a}{(\sigma_{-1k})_d}\right]^2 + \left[\frac{\tau_a}{(\tau_{-1k})_d}\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}}} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (26)$$

где в соответствии с формулой (25) принято

$$(\tau_{-1k})_d = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_{-1k})_d$$

Расчет запасов при асимметричных циклах изложен в гл. 31.

Допустимую величину запаса прочности при переменных напряжениях устанавливают на основе опыта эксплуатации машин. Обычные значения запаса прочности $n_\sigma = 1,5 + 4,0$.

ЗАПАСЫ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ РАБОТЕ НА РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ

Детали машин работают, как правило, на нескольких различных режимах, отличающихся напряжениями, длительностью (или числом циклов), а также температурными условиями. В этом случае для оценки работоспособности детали используют представление об эквивалентных режимах и эквивалентных запасах прочности $n_{\text{эkv}}$ (эквивалентных напряжениях, длительностях, числе циклов).

Эквивалентный запас длительной прочности. Разрушение детали под действием постоянных напряжений за некоторое время t_p является результатом постепенного накопления в материале необратимых изменений в виде микротрещин и других повреждений. При оценке степени повреждения P условно считают, что для исходного (неповрежденного) материала $P = 0$, для момента разрушения $P = 1$.

Если время работы на некотором режиме при $\sigma_i = \text{const}$ равно t_i , а разрушение наступает за время t_{pi} , то в первом приближении степень повреждения P_i считают равной относительной продолжительности работы на этом режиме:

$$P_i = \frac{t_i}{t_{pi}} = \frac{1}{n_{ii}} \quad (27)$$

где n_{ii} — запас по долговечности на i -м режиме.

При работе на нескольких режимах принимается линейное суммирование повреждений

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_k = \sum_{i=1}^k P_i = \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{t_{pi}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_{ii}} \quad (28)$$

где k — общее число режимов.

Два режима считают эквивалентными по опасности разрушения, если их степени повреждения одинаковы. Поэтому ту же степень повреждения P можно получить при работе на одном (эквивалентном) режиме, если

$$P_{\text{эkv}} = P \quad (29)$$

Для эквивалентного режима

$$P_{\text{эkv}} = \frac{t_{\text{эkv}}}{t_{p\text{эkv}}} = \frac{1}{n_{i\text{эkv}}} \quad (30)$$

и из (28) — (30) следует формула для эквивалентного запаса по долговечности:

$$\frac{1}{n_{i\text{эkv}}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_{ii}} \quad (31)$$

При степенной зависимости предела длительной прочности от времени $\sigma_{dl}^{m(T)} t_p = C(T)$ запас по долговечности $n_{ii} = t_{pi}/t_i$ связан с запасом длительной прочности на том же режиме ($n_i = \sigma_{dl}/\sigma_i$) соотношением

$$n_{ii} = \frac{t_{pi}}{t_i} = \left(\frac{\sigma_{dl}}{\sigma_i}\right)^{m_i} = n_i^{m_i} \quad (32)$$

Подставив (32) в формулу (31) и учитывая, что для эквивалентного режима $n_{t_{\text{эkv}}} = n_{\text{эkv}}^{m_{\text{эkv}}}$, получаем

$$\frac{1}{n_{\text{эkv}}} = \sqrt[m_{\text{эkv}}]{\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n_i}\right)^{m_i}} \quad (33)$$

Обычно в качестве эквивалентного выбирают самый тяжелый режим ($i = 1$), для которого собственный запас длительной прочности имеет минимальное значение $n_1 = n_{\text{min}}$. Для жаропрочных сплавов при температурах выше 500—600 °С обычно величина $m_{\text{эkv}} \approx 4 \div 8$.

Эквивалентное время работы. Для сокращения времени испытаний можно привести все режимы к наиболее тяжелому, увеличив время работы на этом режиме с t_1 до $t_{\text{эkv}}$ и используя соотношение

$$t_{\text{эkv}} = \frac{t_p(T_1, \sigma_1)}{n_{t_{\text{эkv}}}} \quad (34)$$

С учетом выражений (31) и (32)

$$t_{\text{эkv}} = t_1 \left[1 + \sum_{i=2}^k \frac{n_1^{m_i}}{n_i^{m_i}} \right], \quad (35)$$

где n_1 — запас прочности на наиболее тяжелом режиме.

По формулам (34) — (35) можно определить время, необходимое для проведения сокращенных эквивалентных испытаний детали на длительную прочность

ЗАПАСЫ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ РАБОТЕ НА РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ

Для материалов, не имеющих предела выносливости, а также для режимов ограниченной длительности с напряжениями выше предела выносливости, в том числе при малоциклового усталости, зависимость разрушающих амплитуд с учетом концентрации напряжений $\sigma_{\text{ар}}$ от числа циклов N до разрушения имеет в логарифмических координатах вид прямой линии:

$$\sigma_{\text{ар}}^m N = C = \text{const.}$$

Поэтому для симметричных циклов расчеты эквивалентного запаса усталостной прочности, эквивалентных переменных напряжений, эквивалентной циклической долговечности можно проводить по формулам предыдущего пункта, заменив в них действующие напряжения σ_i на амплитуды σ_{a_i} , время t_i на число циклов N_i , предел длительной прочности $\sigma_{\text{дл}i}$ — на ограниченный предел выносливости $\sigma_{\text{ар}i}$, и используя соответствующие значения постоянных m и C (см. гл. 31).

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Глава 3

РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

МАТЕРИАЛЫ, ПОКРЫТИЯ И КОНТРОЛЬ КРЕПЕЖНЫХ ДЕТАЛЕЙ

Материалы. Согласно ГОСТ 1759—70 механические свойства болтов, винтов, шпилек и гаек, изготовленных из углеродистых и легированных сталей, а также марки сталей должны соответствовать указанным в табл. 1, 2. При жестких требованиях к жаропрочности, коррозионной стойкости, габаритам и массе крепежных соединений для изготовления их используют специальные стали и сплавы.

Покрытия. Для улучшения свинчиваемости соединений, устранения заедания в резьбе, а также защиты от коррозии, придания декоративного вида предусмотрены покрытия крепежных деталей (табл. 3). Покрытия должны быть более мягкими, чем материал резьбовой детали, и деформироваться без разрушения. Вид покрытия для определенного материала выбирают по ГОСТ 14623—69.

Кроме покрытий, указанных в табл. 3, в ряде отраслей машиностроения для уменьшения коэффициентов трения и их стабилизации наносят свинцовое покрытие и применяют висмутирование (в растворе, содержащем трилон Б, висмут натрия, сегнетовую соль и едкий натрий).

Висмутирование, цинкование, лужение оловом и особенно кадмирование *недопустимы* для резьбовых соединений, работающих при температуре свыше 200—300 °С (см. табл. 3), так как в этом случае наблюдается разрушение затянутых болтов (шпилек) из-за проникновения расплавленного цинка, кадмия и других металлов в металл болта (эффект Ребиндера). Для нормальной работы соединений необходимо, чтобы рабочая температура не превышала температуру плавления покрытия.

В процессе гальванического покрытия кадмием, цинком и другими металлами происходит наводороживание поверхностных слоев, которое приводит далее к замедленному хрупкому разрушению болтов из высокопрочных сталей ($\sigma_b \geq 110$ кгс/мм²). Для предотвращения разрушений резьбовых соединений следует производить разводороживание. Повторные гальванические покрытия высокопрочных болтов нежелательны по этой же причине.

Для резьбовых соединений, работающих в газовом потоке при высоких температурах, наряду с омеднением применяют химическое никелирование (максимальная рабочая температура до 900 °С). В отличие от химического катодное никелирование допускает работу соединений до 800 °С.

Хотя стоимость химического никелирования в 3 раза выше катодного, его целесообразно применять для резьбовых деталей, работающих в агрессивной среде при повышенной температуре взамен многослойных покрытий (никель—хром, медь—никель—хром и др.).

Хорошо предохраняет резьбу от заедания мягкое серебряное покрытие. Высокая стоимость этого покрытия ограничивает область его применения.

Толщина покрытия устанавливается в зависимости от шага резьбы в следующих пределах:

P , мм	< 0,4	0,4—0,8	> 0,8
δ , мкм	3—6	6—9	9—12

Контроль. Болты, винты, шпильки и гайки после изготовления подвергают выборочному контролю (см. СТ СЭВ 218—75):

1. Механические свойства материалов болтов, винтов, шпилек и гаек из углеродистых и легированных сталей при нормальной температуре

Класс прочности	Марка стали	Гайка		σ_{B2} кгс/мм ²	σ_{T1} кгс/мм ²	δ_5 , %	a_{H1} кгс·м/см ²	HB
		Класс прочности	Марка стали					
3.6	Ст3кп, Ст3сп, 10 10кп	4	Ст3кп, Ст3сп	30—49	20	25	Не регламентируется	90—150
4.6	20	5	10, 10кп, 20	40—55	24	25	5,5	110—170
4.8	10, 10кп							
5.6	30, 35	6	Ст5, 15, 15кп, 35	50—70	30	20	5	140—215
5.8	10**, 10кп**, 20 20кп, Ст3сп, Ст3кп							
6.6	35, 45, 40Г	8	20, 20кп, 35, 45	60—80	36	16	4	170—245
6.8	20, 20кп							
6.9					54	12		
8.8	35***, 35Х, 38ХА, 45Г	10	35Х, 38ХА	80—100	64	12	6	225—300
10.9	40Г2, 40Х, 30ХГСА, 16ХСН	12	40Х, 30ХГСА, 16ХСН	100—120	90	9	4	280—365
12.9	30ХГСА	14	30ХГСА	120—140	108	8	4	330—425
14.9	40ХНМА		40ХНМА	140—160	126	7	3	390 и св.

Примечания: 1. Класс прочности болтов обозначен двумя числами. Первое число, умноженное на 10, определяет минимальную величину σ_B в кгс/мм², второе число, умноженное на 10, — отношение σ_T/σ_B в %.

2. Наибольшие значения σ_B и твердости являются справочными.

3. Сталь обозначенные ** и *** применяются для $d \leq 12$ мм и $d \leq 16$ мм соответственно.

4. Класс прочности гаек обозначен числом, которое при умножении на 10 дает величину напряжения от испытательной нагрузки в кгс/мм².

2. Механические свойства материалов болтов, винтов, шпилек и гаек из коррозионно-стойких, жаропрочных, жаростойких и теплоустойчивых сталей при нормальной температуре

Марка стали		σ_{B2} кгс/мм ²	σ_{T1} кгс/мм ²	δ_5 , %	a_{H1} кгс·м/см ²
болтов	гаек	не менее			
12X18H10T	12X18H9T, 10X17H13M2T	52	20	40	4
20X13	—	70	55	15	6
14X17H2	20X13, 14X17H2		65	12	6
10X11H23T3MP	—	90	55	8	3
13X11H2B2MФ 25X1MФ	X12H22T3MP 25X2M1Ф 20X1M1Ф1TP		75	10	3

3. Виды покрытий крепежных деталей

Обозначение	Покрытие	Рабочая температура, °С, не более	Обозначение	Покрытие	Рабочая температура, °С, не более
00	Без покрытия	—	06	Фосфатное с промасливанием	—
01	Цинковое с хромированием	300	07	Оловянное	—
02	Кадмиевое с хромированием	200	08	Медное	700
03	Никелевое, многослойное медь — никель	—	09	Цинковое	—
04	Многослойное медь — никель — хром	600	10	Окисное анодизационное с хромированием	—
05	Окисное	—	11	Пассивное	—
			12	Серебряное	720

а) формы, размеров, качества резьбы и стержня болта (визуальное выявление поверхностных дефектов);

б) механических характеристик деталей: испытания на разрыв и ударную вязкость (являются обязательными для болтов классов прочности 8,8—14,9), определение чувствительности к перекосу (испытание на разрыв с косой шайбой), испытания на длительную прочность (по согласованию с заказчиком), малоцикловую (статическую) выносливость и усталость.

Резьбовые детали особо ответственных соединений подвергают 100%-ному контролю формы, размеров, качества резьбы и стержня (визуально и люминесцентным методом), твердости, а также выборочным механическим испытаниям.

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ СОЕДИНЕНИЙ

Основные виды соединений показаны на рис. 1. Для предварительного выбора размеров деталей и для проверки прочности неотчетливых соединений проводят упрощенный расчет.

Основной расчетный случай. Предварительно затянутое соединение нагружено внешней продольной силой (рис. 2). Диаметр болта (шпильки) по заданному внешнему усилию выбирают по формуле

$$d_1 = \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma_p]}} \quad (1)$$

где N — растягивающее усилие от внешних нагрузок, приходящееся на данный болт; $[\sigma_p]$ — допускаемое напряжение при растяжении; d_1 — внутренний диаметр резьбы болта.

Допускаемые напряжения в долях от предела текучести указаны в табл. 4, а основные размеры и площади поперечного сечения для метрической резьбы — в табл. 5.

4. Отношение $\frac{[\sigma_p]}{\sigma_T}$ для резьбовых соединений

Сталь	При постоянной нагрузке и диаметре резьбы d , мм		При переменной нагрузке от 0 до максимальной и диаметре резьбы d , мм	
	6—16	16—30	6—16	16—30
Углеродистая	0,20—0,25	0,25—0,40	0,08—0,12	0,12
Легированная	0,15—0,20	0,20—0,30	0,10—0,15	0,15

5. Соотношения величин наружного диаметра d , шага резьбы P , внутреннего диаметра d_1 и площади поперечного сечения F_1 для метрической резьбы

d	P	d_1	F_1	d	P	d_1	F_1
мм				мм			
				мм ²			
3	0,5	2,386	4,47	20	1,0	18,773	279
4	0,7	3,141	7,75		1,5	18,160	259
5	0,8	4,018	12,9		2,0	17,546	142
	1,0	4,773	17,9		2,5	16,932	225
8	1,0	6,773	36	22	1,0	20,773	339
	1,25	6,466	32,8		1,5	20,160	319
10	1,0	8,773	60,4		2,0	19,546	300
	1,25	8,466	56,3	2,5	18,932	281	
	1,5	8,160	52,3	24	1,0	22,773	407
12	1,0	10,773	91,1		1,5	22,160	386
	1,25	10,466	86		2,0	21,546	365
	1,5	10,160	81	3,0	20,319	324	
14	1,0	12,773	128	27	1,0	25,773	522
	1,5	12,160	116		1,5	25,160	497
	2,0	11,546	105		2,0	24,546	473
16	1,0	14,773	171	30	3,0	23,319	427
	1,5	14,160	157		1,0	28,773	650
	2,0	13,546	144		1,5	28,160	623
18	1,0	16,773	221	2,0	27,546	596	
	1,5	16,160	205	3,5	25,706	519	
	2,0	15,546	190	33	1,0	31,773	793
	2,5	14,932	175		1,5	31,160	763
				2,0	30,546	733	
				3,5	28,706	647	

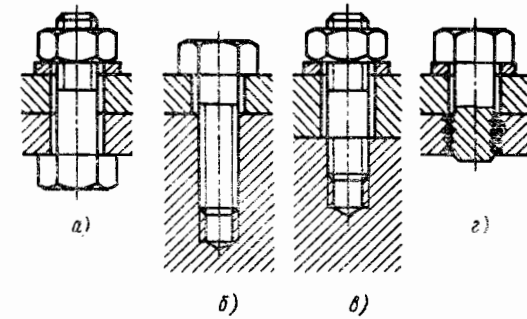


Рис. 1. Основные типы резьбовых соединений: а — болт; б — винт; в — шпилька; г — со вставкой

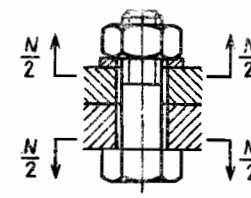


Рис. 2. Основной расчетный случай

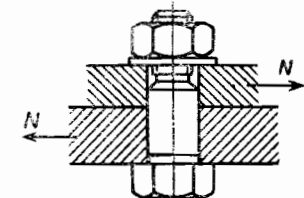


Рис. 3. Дополнительный расчетный случай

Допускаемые статические нагрузки и моменты затяжки для болтов (шпилек) даны в табл. 6. Момент на ключе при затяжке определен по приближенной формуле

$$M_{кл} \approx 0,15Qd, \quad (2)$$

где Q — усилие затяжки болта; d — наружный диаметр резьбы. Обычно

$$M_{кл} = (0,04 \div 0,07) \sigma_T d^3. \quad (3)$$

Дополнительные расчетные случаи. Соединение нагружено поперечной силой. Если болт установлен в отверстие без зазора или с небольшим натягом (рис. 3), то диаметр стержня болта d_c определяют из расчета на срез:

$$d_c = \sqrt{\frac{4N}{\pi n [\tau]}}, \quad (4)$$

где N — поперечная нагрузка на один болт; n — число плоскостей среза; $[\tau]$ — допускаемое напряжение на срез, обычно принимают $[\tau] \approx (0,2 \div 0,3) \sigma_T$.

Если болт поставлен в отверстие с зазором, то поперечная нагрузка должна восприниматься силами трения. Болт рассчитывают на силу затяжки

$$Q_0 = \frac{N}{f} = \frac{\pi d_1^2}{4} [\sigma_p], \quad (5)$$

где f — коэффициент трения на стыках деталей.

6. Допускаемые статические нагрузки и моменты затяжки для болтов (шпилек)

Резьба		Нагрузка, кгс		Момент затяжки, кгс · см	Нагрузка, кгс		Момент затяжки, кгс · см	Нагрузка, кгс		Момент затяжки, кгс · см
d	P	A	Б		A	Б		A	Б	
мм		Сталь 45			30ХГСА			16ХСН		
3	0,5	28	84	3,75	37	110	5,3	45	135	6,0
4	0,7	58	150	9,0	76	196	11,7	95	245	14,8
5	0,8	110	260	19,5	145	340	25,2	180	425	32,8
6	1,0	170	375	34,0	220	485	43,2	270	595	54,5
8	1,0	360	770	92	475	1000	120	585	1250	150
	1,25	330	700	64	430	915	110	530	1130	140
10	1	650	1340	200	850	1750	260	1050	2180	320
	1,5	550	1140	171	730	1500	300	900	1850	278
12	1,0	1050	2100	300	1370	2740	390	1700	3100	490
	1,5	930	1860	270	1210	2420	350	1500	3000	430
	1,75	870	1740	250	1130	2260	330	1410	2820	410
14	1,0	1560	3040	640	2040	3960	820	2510	4890	1030
	1,5	1410	2740	570	1840	3580	750	2260	4400	920
	2	1250	2440	510	1650	3210	670	2040	4000	840
16	1,0	2200	4190	1000	2890	5500	1320	3560	6750	1600
	1,5	2000	3800	920	2640	5030	1200	3240	6150	1500
	2,0	1860	3540	850	2400	4560	1000	2690	5600	1300
18	1,0	3120	5700	1600	4100	7500	2000	5050	9200	2500
	1,5	2880	5250	1400	3800	6950	1900	4650	8500	2300
	2,0	2650	4850	1300	3500	6400	1700	4300	7800	2100

Примечания: 1. Случай А — неконтролируемая затяжка, грубый учет нагрузок; случай Б — контролируемая затяжка.
2. σ_T в кгс/мм² сталей: стали 45—65; 30ХГСА — 85; 16ХСН — 105.

При расчете принимают следующие значения коэффициентов трения f :

- Необработанные стыки со следами окалины 0,3
- Обработка стыка:
 - пескоструйная 0,5
 - газовой горелкой 0,4
 - методами резания 0,10 — 0,15
 - то же, при наличии масляной пленки 0,06
- Окраска стыка:
 - алюминиевым порошком 0,15
 - черной антикоррозийной краской 0,10
 - свинцовым суриком 0,06

Допускаемое напряжение обычно принимают $[\sigma_p] \approx 0,6 \sigma_T$.
Момент на ключе для создания силы затяжки

$$M_{кл} \approx 0,07 \sigma_T d^3 \quad (6)$$

Диаметр болта по заданной силе Q можно определить также из табл. 6.

Если резьбовое соединение должно выдерживать большие растягивающие и срезающие нагрузки, то применяют специальные пояски, а также конструктивные

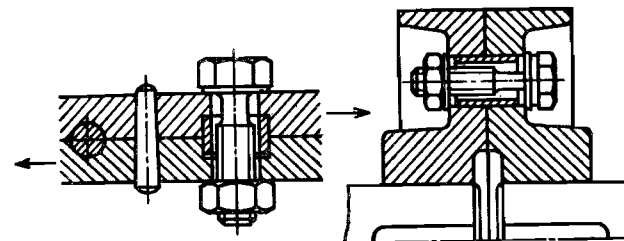


Рис. 4. Способы разгрузки соединений от сил в плоскости стыка

элементы в виде шпонок, втулок и других деталей, которые разгружают болты от срезающих сил (рис. 4).

Методика расчета ответственных резьбовых соединений изложена ниже.

УТОЧНЕННЫЙ РАСЧЕТ СОЕДИНЕНИЙ

При расчете ответственных резьбовых соединений (шатунные болты и др.) необходимо более точно учитывать внешнюю нагрузку, усилие затяжки, дополнительные напряжения от изгиба и кручения, а также влияние температуры деталей, конструктивных и технологических факторов на прочность соединений.

Определение усилий в затянутом соединении при действии внешней осевой нагрузки. В расчетах групповых соединений промежуточные детали заменяют эквивалентными по жесткости (на растяжение-сжатие) втулками, связанными абсолютно жесткой диафрагмой в форме деталей. К диафрагме прикладывают внешние нагрузки.

С помощью такой схематизации осуществляют переход от группового соединения к расчету одиночного (одноболтового) соединения.

Рассмотрим соединение (рис. 5), затянутое с усилием Q_0 , и затем нагруженное внешней растягивающим усилием N , приходящимся на данный болт.

Полное усилие, действующее на болт, определяют из диаграммы усилий (рис. 6). На диаграмме приведены кривые деформирования болта (кривая I) и промежуточных деталей (кривая II), выражающие зависимость усилия от удлинения (или сжатия). При упругих деформациях эта зависимость изображается прямыми линиями.

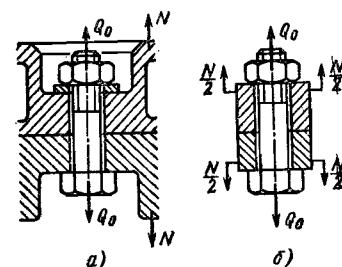


Рис. 5. Резьбовое соединение (а) и его расчетная схема (б)

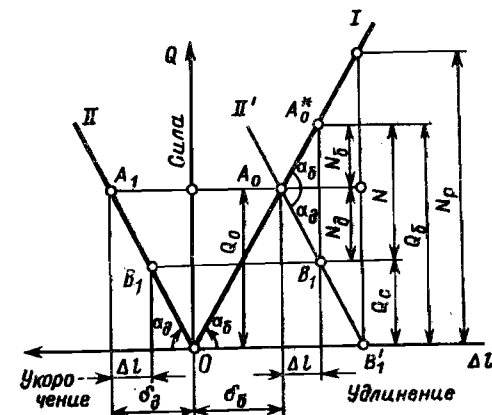


Рис. 6. Диаграмма усилий в резьбовом соединении

Углы наклона прямых α_6 и α_d характеризуют соответственно податливость болта и стягиваемых деталей и определяются равенствами

$$\operatorname{tg} \alpha_6 = \frac{1}{\lambda_6}; \quad \operatorname{tg} \alpha_d = \frac{1}{\lambda_d},$$

где λ_6 — коэффициент податливости болта, соответствует его удлинению под действием единичной растягивающей силы; λ_d — коэффициент податливости стягиваемых деталей;

$$\lambda_6 = \frac{l_6}{E_6 F_6}; \quad (7)$$

здесь l_6 — расчетная длина болта; E_6 и F_6 — соответственно модуль упругости материала и площадь сечения болта.

Для промежуточных деталей

$$\lambda_d = \frac{l_d}{E_d F_d}, \quad (8)$$

где l_d — длина (толщина) промежуточных деталей; E_d — модуль упругости материала деталей; F_d — площадь поперечного сечения деталей*.

Усилие затяжки Q_0 вызывает удлинение болта на величину δ_6 и сжатие промежуточных деталей на величину δ_d . Точки A_1 и A_0 на диаграмме характеризуют усилие и деформации в болте и промежуточных деталях после затяжки.

Внешняя нагрузка N вызывает дополнительное удлинение болта на величину Δl и усилие в болте возрастает на величину

$$N_6 = \Delta l \operatorname{tg} \alpha_6 = \frac{\Delta l}{\lambda_6}.$$

Сила, действующая на промежуточные детали, уменьшится на величину

$$N_d = \frac{\Delta l}{\lambda_d}.$$

Это снижение усилия можно найти, проводя через точку A_0 прямую II' , параллельную прямой II .

Сумма усилий

$$N_6 + N_d = N,$$

тогда

$$\Delta l = \frac{N}{\frac{1}{\lambda_6} + \frac{1}{\lambda_d}} = \frac{\lambda_6 \lambda_d}{\lambda_6 + \lambda_d} N.$$

Дополнительное усилие на болт

$$N_6 = \chi N, \quad (9)$$

где χ — коэффициент основной нагрузки,

$$\chi = \frac{\lambda_d}{\lambda_6 + \lambda_d}. \quad (10)$$

Полное усилие на болт

$$Q_6 = Q_0 + N_6 = Q_0 + \chi N. \quad (11)$$

Расчетная зависимость полного усилия, действующего на болт (шпильку), от величины внешней нагрузки показана на рис. 7.

* Определение коэффициентов податливости приведено ниже.

Если внешняя нагрузка изменяется циклически (от 0 до N), то амплитуда переменных напряжений в резьбовой части болта

$$\sigma_a = \frac{N_6}{2F_1} = \frac{\chi}{2} \frac{N}{F_1} \quad (12)$$

и среднее напряжение

$$\sigma_m = \frac{Q_0 + \frac{1}{2} N_6}{F_1} = \sigma_0 + \sigma_a, \quad (13)$$

где σ_0 — напряжение предварительной затяжки

Из формулы (9) следует, что в затянутом резьбовом соединении внешняя нагрузка на болт передается лишь частично ($\chi = 0,2 \div 0,3$).

Равенство (11) справедливо до начала раскрытия стыка. Усилие на стыке после приложения силы

$$Q_c = Q_0 - N_d = Q_0 - (1 - \chi) N,$$

откуда условие нераскрытия стыка

$$Q_0 > (1 - \chi) N. \quad (14)$$

Если внешняя нагрузка возрастет до величины

$$N_p = \frac{Q_0}{1 - \chi},$$

то стык раскрывается (точка A_c на рис. 7), и при дальнейшем увеличении внешней нагрузки усилие на болт будет

$$Q_6 = Q_0 + N^*, \quad (15)$$

где N^* — внешняя нагрузка, действующая на соединение.

После раскрытия стыка внешняя нагрузка полностью передается на болт, что при переменной нагрузке приводит к появлению дополнительных напряжений ударного характера. Поэтому усилие затяжки следует назначать таким, чтобы при заданной внешней нагрузке N стык оставался плотным.

Для снижения переменных напряжений σ_a в болте следует уменьшать коэффициент основной нагрузки χ , т. е. применять податливые болты (увеличивать λ_6) и жесткие фланцы (уменьшать λ_d). Преимущества податливых болтов наглядно иллюстрирует рис. 8. Отсюда правило конструирования резьбовых соединений: «жесткие фланцы — податливые болты».

При наличии температурной деформации

$$\Delta l = \alpha_d t_d l_d - \alpha_6 t_6 l_6, \quad (16)$$

где α_d , t_d и α_6 , t_6 — коэффициенты соответственно линейного расширения и температуры промежуточных деталей и болта.

Температурное усилие

$$Q_t = \frac{\Delta l}{\lambda_6 + \lambda_d}. \quad (17)$$

Полное усилие на болт в этом случае

$$Q = Q_0 + Q_t + N_6 = Q_0 + Q_t + \chi N. \quad (18)$$

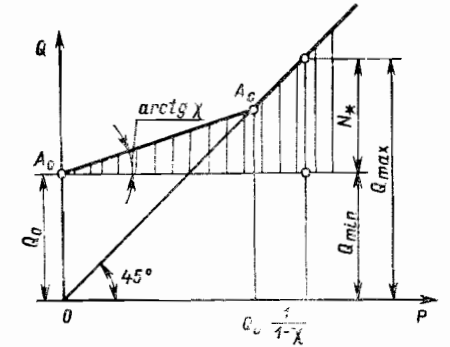


Рис. 7. Зависимость полного усилия в болте от внешней нагрузки

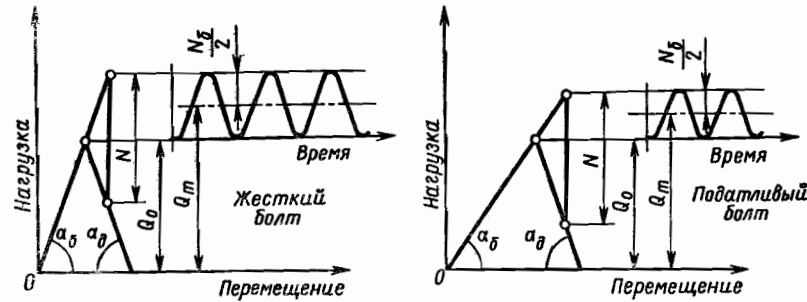


Рис. 8. Диаграммы усилий для соединений с различной жесткостью болтов при одинаковых условиях работы

Определение коэффициентов податливости болта и промежуточных деталей. Для болта постоянного сечения значение λ_b определяют по формуле (7). Для болта переменного сечения (рис. 9)

$$\lambda_b = \frac{1}{E_b} \sum_{i=1}^n \frac{l_{6i}}{F_{6i}}, \quad (19)$$

где l_{6i} и F_{6i} — соответственно длина и площадь поперечного сечения i -го участка болта.

Для коротких болтов ($l < 6d$) следует учитывать податливость резьбы в пределах соединения и головки болта.

Податливость резьбы можно вычислять по формулам

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \frac{d}{P} = 6 \div 10 \quad \lambda_r &\approx (0,95 \div 0,80) \frac{1}{dF}; \\ \text{при } \frac{d}{P} = 10 \div 20 \quad \lambda_r &\approx (0,80 \div 0,70) \frac{1}{dF}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где P — шаг резьбы.

Если модули упругости болта (шпильки) и гайки (корпуса) различны, то можно принимать

$$\frac{1}{E} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_b} + \frac{1}{E_r} \right). \quad (21)$$

Коэффициент податливости головки болта с высотой h

$$\lambda_r = \frac{0,15}{E_b h}. \quad (22)$$

Для коротких болтов коэффициент податливости следует вычислять по формуле

$$\lambda_b = \frac{1}{E_b} \sum_{i=1}^n \frac{l_{6i}}{F_{6i}} + \lambda_r + \lambda_r. \quad (23)$$

Коэффициент податливости промежуточных деталей определяют в предположении, что при действии осевой силы деформация, равномерная по сечению, распространяется в пределах «конуса давления» (рис. 10).

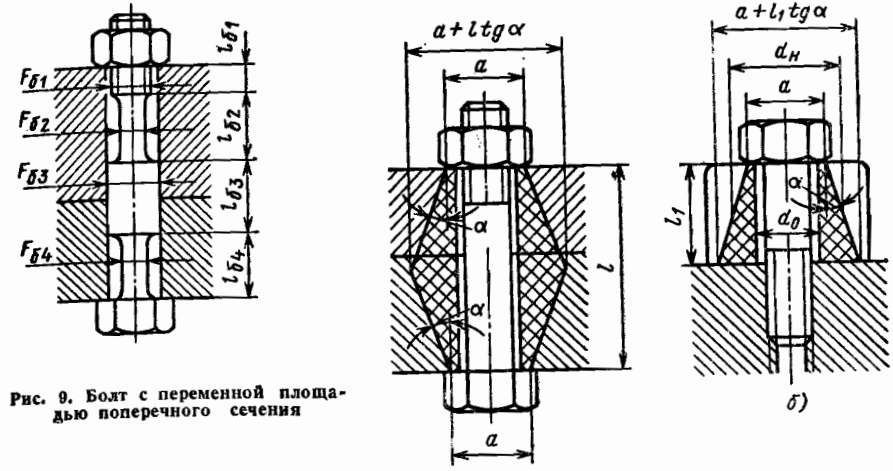


Рис. 9. Болт с переменной площадью поперечного сечения

Рис. 10. Конусы давления в соединениях болтом (а) и винтом (б)

На основании теоретических и экспериментальных данных принимают

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,4 \div 0,5, \quad (24)$$

где α — угол, составленный образующей конуса с осью.

Для промежуточных деталей небольшой толщины ($l < d_0$, где d_0 — диаметр отверстия под болт) конус давления можно заменить условным полым цилиндром с наружным диаметром (рис. 10, б)

$$d_n = a + l_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

где a — внешний диаметр опорной поверхности гайки.

Коэффициент податливости тонкой промежуточной детали

$$\lambda_d = \frac{l_1}{E_d \frac{\pi}{4} [(a + l_1 \operatorname{tg} \alpha)^2 - d_0^2]}. \quad (25)$$

В общем случае для промежуточной детали произвольной толщины (рис. 10, б) коэффициент податливости определяют по формуле

$$\lambda_d = \frac{1}{E d_0} \lambda_d^*, \quad (26)$$

где

$$\lambda_d^* = \frac{2,30}{\pi \operatorname{tg} \alpha} \operatorname{lg} \frac{(a + d_0)(a + 2l_1 \operatorname{tg} \alpha - d_0)}{(a - d_0)(a + 2l_1 \operatorname{tg} \alpha + d_0)}. \quad (27)$$

Значение λ_d^* приведено в табл. 7.

Если болт соединяет два фланца (см. рис. 10), то суммарный коэффициент податливости

$$\lambda_d = \frac{4,60}{E \pi d_0 \operatorname{tg} \alpha} \operatorname{tg} \frac{(a + d_0)(a + l \operatorname{tg} \alpha - d_0)}{(a - d_0)(a + l \operatorname{tg} \alpha + d_0)}. \quad (28)$$

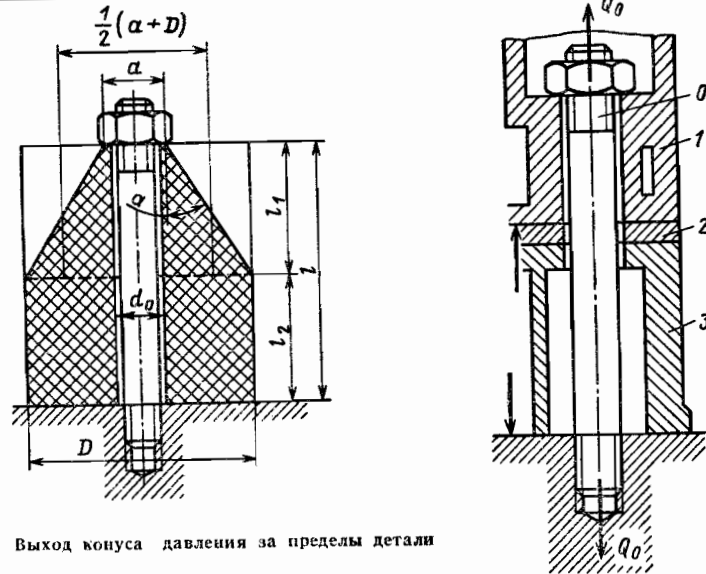


Рис. 11. Выход конуса давления за пределы детали

Рис. 12. Схема нагружения силовой шпильки

В случае, когда конус давления выходит за пределы промежуточной детали (рис. 11), коэффициент податливости определяют по формуле

$$\lambda_d = \frac{2,3}{E\pi d_0 \operatorname{tg} \alpha} \lg \frac{(a+d_0)(D-d_0)}{(a-d_0)(D+d_0)} + \frac{4l_2}{E\pi(D^2-d_0^2)}, \quad (29)$$

где

$$l_2 = l - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} (D - d_0).$$

7. Значения безразмерного коэффициента податливости λ_d^*

$\frac{a}{d_0}$	$\frac{l}{d_0}$	λ_d^* при $\operatorname{tg} \alpha$		$\frac{a}{d_0}$	$\frac{l}{d_0}$	λ_d^* при $\operatorname{tg} \alpha$			
		0,4	0,5			0,4	0,5		
1,2	1	1,03	0,90	1,6	3	0,76	0,65		
	2	1,31	1,11		1,8	2	0,35	0,32	
	3	1,45	1,22			5	3	0,51	0,45
	5	1,60	1,32				5	3	0,61
1,4	1	0,64	0,57	2,0		1		0,28	0,26
	2	0,87	0,75		5	2	0,40	0,37	
	3	0,99	0,84			5	3	0,51	0,44
	5	1,13	0,94		5		5	0,61	0,52
1,6	1	0,46	0,42						
	2	0,65	0,57						

Подобной формулой можно воспользоваться при часто расположенных болтах (шпильках), когда один конус давления перекрывает другой.

Если для группового соединения $l_1 < 0,1l$, то при расчете можно учитывать площадь промежуточной детали, приходящуюся на одну шпильку (участком l_1 на рис. 11 пренебрегают).

Расчет усилий в сложных силовых схемах. Болт соединяет несколько промежуточных деталей (рис. 12), внешняя нагрузка приложена к произвольным стыкам.

Различают детали системы болта, в которых в результате действия внешней нагрузки абсолютная величина деформации возрастает (детали 0, 1 на рис. 12), и детали системы корпуса, в которых абсолютная величина деформации уменьшается (детали 2, 3). Коэффициент основной нагрузки

$$\chi = \frac{\text{Сумма коэффициентов податливости деталей системы корпуса}}{\text{Сумма коэффициентов податливости всех деталей}}.$$

В рассматриваемом случае (см. рис. 12)

$$\chi = \frac{\sum_{i=2}^3 \lambda_i}{\sum_{i=0}^3 \lambda_i},$$

λ_i — коэффициент податливости деталей соединения; λ_0 — то же, для болта.

Для уменьшения коэффициента основной нагрузки упругие детали (упругие шайбы и другие детали) следует вводить в систему болта.

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ КРУЧЕНИЯ

При затяжке резьбовых соединений путем завинчивания гайки болт (шпилька) скручивается моментом

$$M_p = Q_0 \frac{d_2}{2} \operatorname{tg} (\beta + \rho') = Q \frac{d_2}{2} \frac{\frac{P}{\pi d_2} + f_p}{1 - f_p \frac{P}{\pi d_2}} \quad (30)$$

или с достаточной точностью

$$M_p = 0,5Q_0 d_2 \left(\frac{P}{\pi d_2} + f_p \right), \quad (31)$$

где Q_0 — усилие затяжки; d_2 — средний диаметр резьбы; β — угол подъема винтовой линии, $\operatorname{tg} \beta = \frac{P}{\pi d_2}$; ρ' — угол трения, соответствующий коэффициенту трения в резьбе f_p ,

$f_p = f / \cos \frac{\alpha}{2} \approx 1,15f$; f — коэффициент трения материала гайки по материалу болта (шпильки); α — угол профиля резьбы; P — шаг резьбы.

Момент в резьбе $M_p < M_{кл}$, так как момент на ключе должен также преодолевать силы трения на опорной поверхности гайки, причём

$$M_{кл} = M_p + M_T.$$

где M_T — момент трения на торце гайки.

Для плоского опорного торца гайки

$$M_T = \frac{1}{3} Q_0 f_T \frac{a^3 - d_0^3}{a^2 - d_0^2} \approx Q_0 f_T \frac{a + d_0}{2}, \quad (32)$$

где a — внешний диаметр опорного торца гайки; d_0 — диаметр отверстия в корпусе под болт; f_T — коэффициент трения на торце гайки.

Значения коэффициентов трения в резьбе и на торце гайки даны в табл. 8—10.

8. Средние значения коэффициентов трения в резьбе соединений при напряжениях затяжки $\sigma_0 = (0,4 \div 0,6) \sigma_T$, толщина покрытия 6 мкм

Материал болта и гайки	Покрытие, смазка	Первая затяжка	Десятая затяжка
30ХГСА ВТ16 12Х18Н10Т	Без покрытия То же, масло МК-8 То же, смазка ВНИИП-232 То же, смазка ВНИИП-220 То же, смазка ЦИАТИМ-222	0,18	0,58
		0,13	—
		0,18	0,12
30ХГСА * ВТ16 12Х18Н10Т	Кадмиевое	0,25	0,21
		0,15	—
		0,19	0,27
		0,16	0,3
30ХГСА **	Медное	0,28	—
		0,16	
30ХГСА	Цинковое	0,23	—
ВТ16 12Х18Н10Т	Серебряное	0,095	0,18
		0,11	0,21

* В знаменателе дроби даны значения f_p при смазке резьбы маслом МК-8.
** То же, со смазкой СТ.

Примечание. Соединения из стали 30ХГСА имели резьбу М12 × 1,5, а остальные М16 × 1,5.

9. Средние значения коэффициентов трения на торце гайки f_T при напряжениях затяжки $\sigma_0 = (0,4 \div 0,6) \sigma_T$

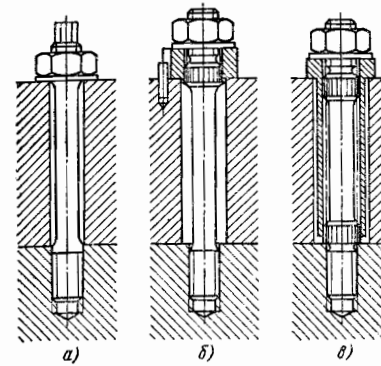
Материал гайки и шайбы	Покрытие, смазка	Первая затяжка	Десятая затяжка
30ХГСА	Без покрытия То же, масло МК-8	0,16	0,22
		0,13	0,11
ВТ6	Без покрытия То же, смазка ВНИИП-232	0,16	0,17
		0,06	0,15
30ХГСА * ВТ6	Кадмиевое То же	0,05	0,14
		0,06	0,05
		0,11	0,2
30ХГСА **	Цинковое Медное	0,10	0,26
		0,12	0,18
		0,08	0,09

*, ** См. сноски к табл. 8.

10. Средние значения приведенного (при $f_p = f_T$) коэффициента трения f для определения момента на ключе

Покрытие	Резьба	
	без смаз-ки	со смаз-кой
Без покрытия	0,2	0,16
Кадмиевое . . .	0,13	0,1
Медное	0,18	0,14
Цинковое	0,22	0,18
Оксидное	0,24	0,20

При повторных затяжках приведенный коэффициент трения для смазанных резьб должен быть уменьшен на 10—30%



← Рис. 13. Конструктивные способы разгрузки соединений от скручивания при затяжке

11. Значения f_p и f_k для метрической резьбы

Состояние контактных поверхностей	f_p	f_k
Чисто обработанные поверхности, смазанные	0,1	0,07
Грубо обработанные поверхности: смазанные	0,2	0,12
без смазки	0,3	0,17

Для приближенных расчетов вместо формул (30) и (31) используют соотношение

$$M_p = kQ_0d, \quad (33)$$

в котором d — наружный диаметр резьбы; k — безразмерный коэффициент, для метрической резьбы приведен в табл. 11.

Напряжения кручения в резьбовой части болта

$$\tau_1 \approx \frac{M_p}{0,2d_1^3}. \quad (34)$$

Напряжения кручения в стержне болта (шпильки)

$$\tau_c = \frac{M_p}{0,2d_c^3}. \quad (35)$$

Если

$$\sqrt{\sigma_0^2 + 3\tau^2} > 0,8\sigma_T,$$

то болты или шпильки следует предохранять от скручивания при затяжке (например, с помощью специального шестигранника, рис. 13, а или шлицевых втулок, рис. 13, б, в).

ВЫБОР ВЕЛИЧИНЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ЗАТЯЖКИ

Напряжения затяжки устанавливают из условия плотности стыка — необходимого условия прочности динамически нагруженных резьбовых соединений.

Если напряжение затяжки

$$\sigma_0 \leq \sigma_{вн} (1 - \chi),$$

то происходит раскрытие стыка. В этом равенстве $\sigma_{вн}$ — номинальное напряжение в болте (шпильке) от внешней нагрузки.

Для получения надлежащего запаса плотности стыка напряжения затяжки определяют из условия

$$\sigma_0 = \nu \sigma_{вн}, \quad (36)$$

где ν — коэффициент затяжки, а напряжение $\sigma_{вн}$ — соответствует наибольшему внешнему усилию N .

По условию плотности стыка $\nu = 1,5 \div 2$ для постоянных нагрузок; $\nu = 2,5 \div 4$ — для переменных нагрузок.

Допустимое напряжение затяжки

$$\sigma_0 \leq 0,8\sigma_T, \quad (37)$$

где σ_T — предел текучести материала болта.

Обычно $\sigma_0 \approx (0,5 \div 0,7) \sigma_T$.

Напряжение затяжки для ответственных резьбовых соединений необходимо контролировать. Наиболее распространены на практике методы контроля с помощью измерения:

- а) удлинения болта или шпильки;
- б) угла поворота гайки;
- в) крутящего момента на ключе.

Последний метод является основным во многих отраслях машиностроения. Он реализуется с помощью специальных динамометрических ключей, тарировку которых осуществляют в лабораторных условиях.

Для приближенных расчетов можно использовать формулу

$$M_{кл} = fQ_0d, \quad (38)$$

где f — приведенный коэффициент трения, зависящий от состояния поверхности болта, гайки и шайбы (табл. 10).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ВИТКАМ РЕЗЬБЫ И КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В СОЕДИНЕНИЯХ

Разрушения резьбовых соединений, особенно при переменных нагрузках, часто связаны со значительной концентрацией напряжений во впадинах резьбы из-за неравномерного распределения нагрузки между витками и высокой местной напряженности.

Распределение нагрузки между витками можно охарактеризовать интенсивностью распределения осевых сил по высоте резьбы (рис. 14):

$$q(z) = \frac{dQ(z)}{dz}, \quad (39)$$

где $Q(z)$ — сила, растягивающая стержень болта или сжимающая тело гайки в сечении z :

$$Q(z) = \int_0^z q(z) dz. \quad (40)$$

Записав уравнение совместности перемещения тел болта, гайки и витков резьбы и выразив входящие в это уравнение перемещения через силовые факторы, для стержневой модели соединения получим дифференциальное уравнение

$$q''(z) - \frac{\beta}{\gamma} q(z) = 0, \quad (41)$$

здесь β — коэффициент, характеризующий податливость тел болта и гайки, $\beta = \frac{1}{E_6 F_6} + \frac{1}{E_r F_r}$, где E_6 и E_r — модули упругости материалов болта и гайки; F_6 и F_r — площади поперечных сечений тел болта и гайки; γ — коэффициент, характеризующий податливость витков резьбы болта и гайки, $\gamma = \left(\frac{\lambda_6^*}{E_6} + \frac{\lambda_r^*}{E_r} \right) \frac{P^2}{f}$,

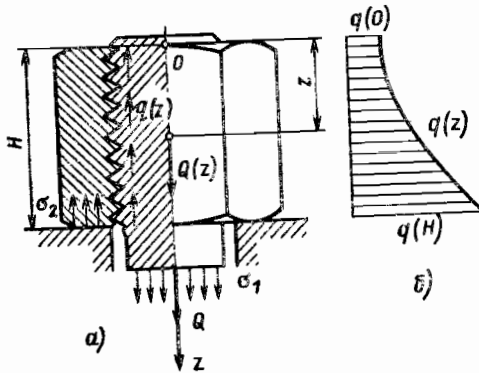


Рис. 14. К расчету распределения нагрузки между витками резьбы

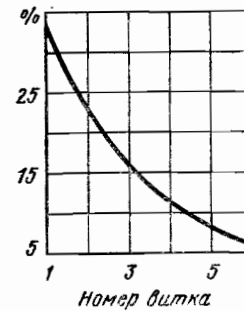


Рис. 15. Нагрузки на отдельные витки в % от общей нагрузки (соединение с резьбой М24)

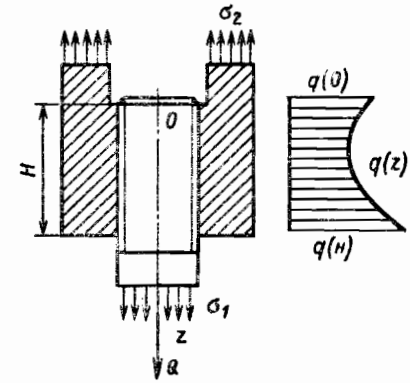


Рис. 16. Схема соединения типа стяжки

где λ_6^* и λ_r^* — безразмерные коэффициенты, зависящие от геометрических параметров соединения; P — шаг резьбы; f — проекция боковой поверхности витка на плоскость, перпендикулярную оси z .

Решение уравнения (41) для соединения типа болт — гайка с учетом граничных условий имеет вид

$$q(z) = \frac{Qm}{\text{sh } mH} \text{ch } mz, \quad (42)$$

где

$$m = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

Из соотношения (42) следует, что в болтовом соединении нагрузка на витки возрастает от верхних витков к нижним по закону гиперболического косинуса (рис. 14, б). Нагрузка на отдельные витки (рис. 15)

$$Q_p = \int_z^{z+P} q(z) dz. \quad (43)$$

Для соединения типа стяжки (рис. 16)

$$q(z) = \frac{Qm}{\beta \text{ sh } mH} \left[\frac{\text{ch } mz}{E_6 F_6} + \frac{\text{ch } m(H-z)}{E_r F_r} \right], \quad (44)$$

причем в зависимости от соотношения жесткости тел болта и гайки максимальное напряжение будет либо в сечении $z = 0$, либо в сечении $z = H$.

При практическом выполнении соединения типа стяжки нецелесообразно стремиться к увеличению площади охватываемой детали, так как это приведет к снижению прочности соединения.

Численное решение осесимметричной контактной задачи для резьбового соединения (метод решения дан в гл. 29) подтвердило достоверность приведенного метода расчета распределения нагрузки в соединениях (табл. 12).

Распределение нагрузки по виткам резьбы оказывает влияние на несущую способность резьбы при статических нагрузках и особенно существенно влияет на усталостную прочность соединений. На основании анализа многочисленных экспериментальных исследований установлено, что снижение нагрузки на нижнем витке приводит к пропорциональному повышению предела выносливости соединений.

Конструктивно улучшить распределение нагрузки между витками можно путем увеличения податливости витков γ и уменьшения податливости тел болта и гайки соответственно при растяжении и сжатии β . Последнее может быть достигнуто введением в соединение резьбовой спиральной вставки (см. рис. 1, 2), применением гаек растяжения (рис. 17) и другими методами (рис. 18) *.

12. Распределение нагрузок между витками резьбы М10 (радиус скругления впадин резьбы $R = 0,108P$)

Номер витка от опорного торца гайки	Нагрузки на отдельные витки в % от общего усилия, полученные	
	по формуле (43)	из решения контактной задачи
1	36,5	37,35
2	23,75	22,83
3	16,5	16,78
4	12,75	13,40
5	10,50	9,64

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}$$

где σ_{\max} — максимальное растягивающее напряжение в зоне концентрации; $\sigma_{\text{ном}}$ — номинальное напряжение в сечении по внутреннему диаметру резьбы.

На рис. 19 приведены результаты численного расчета напряжений во впадинах соединения с резьбой М10 при высоте гайки $H = 0,8d$ и радиусе скругления во впадинах $R = 0,108P$. Наибольшие напряжения действуют во впадине под первым рабочим витком, а максимальные напряжения на контуре концентрируются не в центре впадины, а в точке, смещенной к рабочей грани. Последнее связано с тем, что во впадинах имеет место концентрация напряжений от общего потока растягивающих усилий и от изгиба витка. Напряжения во впадине под вторым рабочим витком почти в 3 раза ниже, чем под первым витком из-за разгрузки.

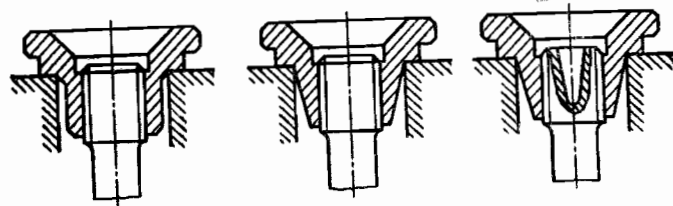


Рис. 17. Способы улучшения распределения нагрузки между витками резьбы с помощью гаек растяжения

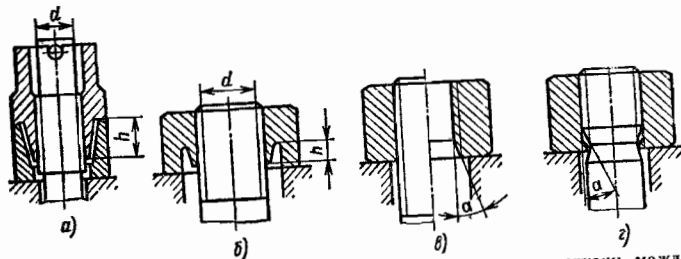


Рис. 18. Конструкции соединений с улучшенным распределением нагрузки между витками резьбы:

a — сжато-растянутая гайка, $h/d = 1$; b — гайка с поднутрением, $h/d = 0,47$; c — гайка со скошенными нижними витками; d — болт со скошенными витками

* Подробнее о распределении нагрузки по виткам резьбы см. работу [1].

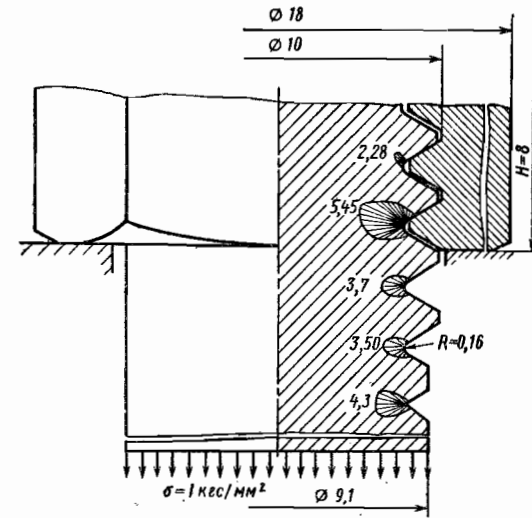


Рис. 19. Распределение напряжений во впадинах резьбы ($\sigma_{\text{ном}} = 1,27 \text{ кгс/мм}^2$; $\alpha_\sigma = 4,6$)

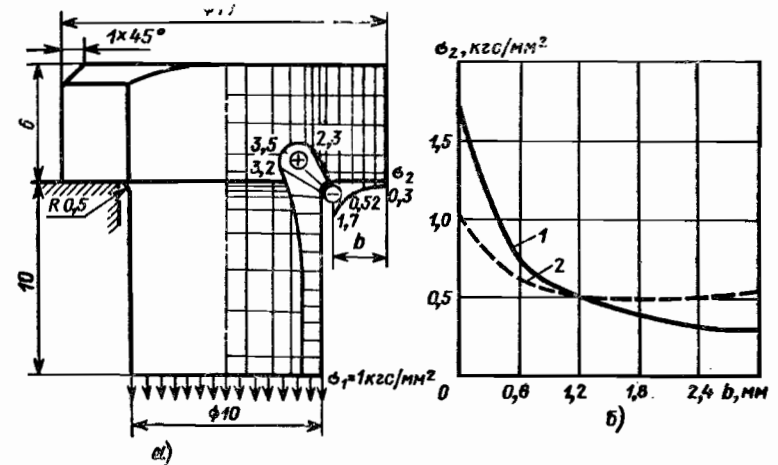


Рис. 20. Распределение напряжений под головкой болта

Можно рекомендовать следующую приближенную зависимость для вычисления теоретического коэффициента концентрации напряжений в резьбовом соединении типа болт — гайка:

$$\alpha_\sigma = 1 + 1,1 \sqrt{\frac{P}{R}} \tag{45}$$

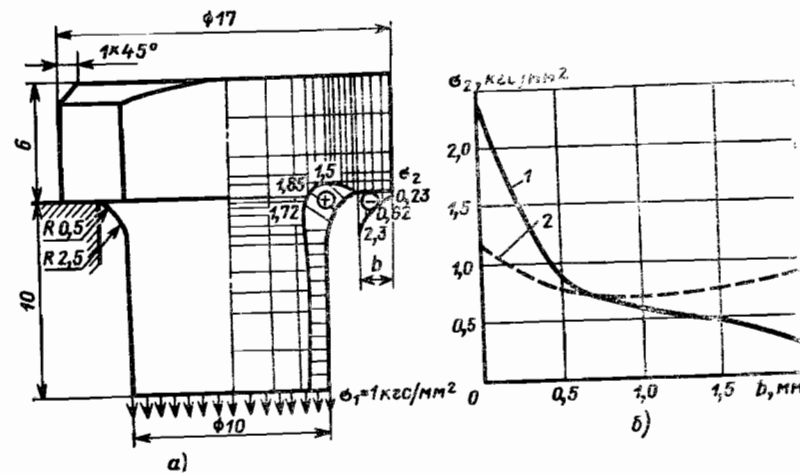


Рис. 21. Распределение напряжений под головкой болта с двухрадиусной галтелью: а — напряжения в стержне; б — напряжения на опорном торце; 1 — недеформируемые стягиваемые детали; 2 — деформируемые стягиваемые детали

Расчеты показывают, что концентрация напряжений в соединении может быть снижена на 20% простым увеличением радиуса скругления от $R_{\min} = 0,108 P$ (по ГОСТ 9150—59) до $R_{\min} = 0,144 P$ при $R_{\max} = 0,18 P$.

Распределение напряжений под головкой болта с резьбой М10 показано на рис. 20, а, на рис. 20, б приведено распределение контактных давлений под головкой при опирании на жесткие стягиваемые детали (кривая 1) и стягиваемые детали из одинакового с болтом материала (кривая 2). При увеличении радиуса скругления под головкой болта концентрация напряжений снижается, однако при этом уменьшается опорная поверхность и возрастают контактные давления. Более эффективной оказывается двухрадиусная галтель под головкой болта (рис. 21). Причем больший радиус следует применять на участке, прилежащем к цилиндрической части стержня, так как в этой зоне действуют наибольшие контурные напряжения (см. рис. 20). Использование меньшего радиуса на второй части галтели увеличивает опорную поверхность под головкой болта.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений под головкой болта можно вычислить по приближенной формуле

$$\alpha_{\sigma} = 1 + 0,55 \sqrt{\frac{d}{R_6}}, \quad (46)$$

где R_6 — радиус галтели под головкой; d — диаметр стержня болта.

ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННЫХ НАГРУЗКАХ

Разрушение резьбового соединения при постоянных (статических) нагрузках происходит вследствие обрыва стержня болта (шпильки) или среза витков резьбы. Нагрузка, разрушающая стержень болта в его резьбовой части,

$$Q_{\text{разр}} = \frac{\pi d_1^2}{4} \sigma'_B, \quad (47)$$

где σ'_B — предел прочности при растяжении стержня с резьбой.

Отношение σ'_B к пределу прочности материала σ_B по экспериментальным данным приведено в табл. 13.

13. Отношения $\frac{\sigma'_B}{\sigma_B}$ и $\frac{\sigma_B^*}{\sigma_B}$ для сталей различной прочности

Способ обработки	σ_B , кгс/мм ²	$\frac{\sigma'_B}{\sigma_B}$	$\frac{\sigma_B^*}{\sigma_B}$
Нарезанная или накатанная резьба с последующей термообработкой	70—120 130—140	1,35—1,25 1,05—0,9	1,15—1,0 0,9—0,8
Накатанная резьба без последующей термообработки	70—120 130—140	1,40—1,2 1,2—0,95	1,2—1,05 1,05—0,85

Если разрушающую нагрузку относить к фактической площади поперечного сечения резьбы F , то величина σ'_B уменьшится. Фактическая площадь поперечного сечения лежит в пределах

$$\frac{\pi d_1^2}{4} < F < \frac{\pi d^2}{4}.$$

Иногда в качестве расчетной используют площадь, отнесенную к условному среднему диаметру (между средним и внутренним диаметрами резьбы):

$$F^* = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2.$$

Предел прочности резьбового стержня в этом случае

$$\sigma_B^* = \frac{Q_{\text{разр}}}{F^*} \quad (48)$$

отличается от σ'_B

$$\frac{\sigma'_B}{\sigma_B^*} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{d_1}{d_2} \right)^2.$$

Значения отношения $\frac{\sigma_B^*}{\sigma_B}$ приведены в табл. 13. Для болтов из распространенных сталей (стали 45, 38ХА, 30ХГСА и др.) при расчете по формуле (48) можно принимать

$$\sigma_B^* = \sigma_B.$$

Стали с пределом прочности $\sigma_B > 160$ кгс/мм² и с пониженной пластичностью применять для силовых соединений, нагруженных растягивающими нагрузками, не рекомендуется.

Необходимо иметь в виду, что при наличии после резьбы проточки с диаметром $d_n < d_1$ прочность стержня определяют в сечении по проточке или гладкой части стержня, если $d_c < d_1$.

При наличии проточки разрушающая нагрузка

$$Q_{\text{разр.с}} = \kappa \sigma_B \frac{\pi d_n^2}{4}, \quad (49)$$

где κ — коэффициент, учитывающий упрочняющий эффект от проточки.

Для проточки в виде полукруглой канавки можно принять $\kappa = \frac{\sigma'_b}{\sigma_b}$; для проточки, имеющей цилиндрический участок, $\kappa = 1$.

Основными конструктивными параметрами, определяющими прочность витков, являются диаметр d и шаг резьбы P , радиус закругления во впадинах резьбы R , высота гайки H (длина свинчивания l), соотношение механических характеристик материалов болта и гайки.

Усилие, вызывающее срез витков резьбы болта

$$Q_{p.б} = \pi d_1 k_б H k_m \tau_{вб}; \tag{50}$$

резьбы гайки

$$Q_{p.г} = \pi d_1 k_г H k_m \tau_{вг}. \tag{51}$$

В этих равенствах $k_б$ и $k_г$ — коэффициенты полноты резьбы болта и гайки; для метрической резьбы $k_б = k_г = 0,87$, для трапецеидальной $k_б = k_г = 0,65$; H — высота гайки; k_m — коэффициент, учитывающий неравномерность деформаций витков по высоте гайки при наличии в резьбе пластических деформаций и особенности разрушения резьбы; теоретически $k_m = 1$ лишь для соединений с равномерным распределением нагрузки между витками, разрушение которых происходит в результате чистого среза, на практике такой случай практически не реализуется, и всегда $k_m < 1$; $\tau_{вб}$ и $\tau_{вг}$ — пределы прочности материалов соответственно болта и гайки на срез; можно принимать $\tau_{в} = (0,6 \div 0,7) \sigma_b$ для сталей и титановых сплавов, $\tau_{в} = (0,7 \div 0,8) \sigma_b$ для алюминиевых и магниевых сплавов.

На основании экспериментальных данных можно рекомендовать для практических расчетов значения коэффициента k_m из табл. 14.

14. Коэффициент k_m для соединений с болтами из сталей и титановых сплавов

$\frac{\sigma_{вб}}{\sigma_{вг}}$	Шаг резьбы	k_m
Св. 1,3	Крупный и первый мелкий	0,7—0,75
	Второй и более мелкий	0,65—0,7
< 1,3	Для всех шагов	0,55—0,6

При расчете несущей способности резьбы соединений стальных шпилек с корпусами из пластмасс, алюминиевых и магниевых сплавов можно принимать $k_m = 0,75 \div 0,85$, а для соединений со спиральными вставками $k_m \approx 1$.

Для обеспечения равнопрочности стержня болта и витков резьбы гайки должны быть

$$\frac{H_0}{d} \approx 0,47 \frac{\kappa}{k_m} \frac{\sigma_{вб}}{\sigma_{вг}} \left(\frac{d_1}{d} \right)^2. \tag{52}$$

Величину H_0 , определяемую из условия равнопрочности стержня и витков резьбы, называют *необходимой высотой гайки*. Фактическая высота гайки

$$H > H_0.$$

Для резьбовых соединений, воспринимающих значительные статические нагрузки, не следует применять резьбы с отношением диаметра резьбы к шагу $\frac{d}{P} > 15$.

При мелкой резьбе $\left(\frac{d}{P} > 15 \right)$ может наступить явление *цепного среза*, когда разрушение витков идет одно за другим, и равнопрочности гайки и болта нельзя достигнуть даже при очень большой высоте гайки. Для гаек из пластмасс цепной срез возможен при $\frac{d}{P} > 7$.

Высоту гайки или длину свинчивания, при которой несущая способность резьбы наибольшая, называют *предельной*. Эта длина свинчивания соответствует максимальному числу витков, несущих нагрузку при наличии в резьбе пластических деформаций, и зависит преимущественно от характера распределения нагрузки по виткам, диаметра и шага резьбы, диаметра (радиальной жесткости) гайки. При диаметре гайки $D = 3 d$ предельная относительная высота гайки (длина свинчивания) $\left(\frac{H}{d} \right)_п = 1,9 \div 1,95$. При уменьшении диаметра гайки до $D = 2 d$ радиальные деформации возрастают и предельная длина свинчивания снижается до $\left(\frac{H}{d} \right)_п = 1,55 \div 1,6$.

Предельная несущая способность резьбы по разрушающему усилию может быть определена по формулам (50) или (51), для этого необходимо принять в них $H = H_п = 1,5 d$ при $D = 2 d$ или $H_п = 2 d$ при $D = 3 d$.

Длину завинчивания шпилек в корпус можно принимать по табл. 15.

15. Относительная длина завинчивания стальных шпилек в корпус

σ_b материала шпильки, кгс/мм ²	$\frac{H}{d}$ для корпусов из материала		
	дюралюминия	силумина	чугуна и бронзы
40—50 90—110	0,8—0,9 1,6—2,0	1,4—2,0 1,8—2,0 *	1,2—1,4 2,0 *

* Рекомендуется увеличивать диаметр конца шпильки, ввертываемого в корпус, или применять резьбовую вставку.

Примечание. σ_b дюралюминия 36—40; силумина — 16—20; чугуна и бронзы 18—25 кгс/мм².

В большинстве конструкций резьбовые соединения подвержены воздействию изгибающих нагрузок от перекоса опорных поверхностей и др.

Болты из высокопрочных сталей с $\sigma_b \geq 130$ кгс/мм² весьма чувствительны к перекосу опорных поверхностей на 4° и более. Прочность болтов из сталей и титановых сплавов с $\sigma_b < 120$ кгс/мм² при нормальной температуре не снижается даже при перекосе поверхностей на 8°.

Для силовых резьбовых деталей не следует применять сталь с ударной вязкостью $a_n < 3$ кгс·м/см².

Чувствительность стальных болтов к перекосу можно понизить повышением температуры отпуска.

На практике напряжения изгиба снижают при помощи технологических (введение жестких допусков на перекося поверхности, биение торца гайки и т. п.) и конструктивных мер (рис. 22).

При проектировании резьбовых соединений, работающих в условиях высокой температуры ($t \geq 350^\circ \text{C}$), необходимо учитывать ползучесть и длительную прочность. Эксперименты показали, что при повышенных температурах чувствительность к концентрации напряжений для большинства жаропрочных сталей и сплавов резко возрастает. На таких болтах целесообразно изготавливать резьбу с увеличенным радиусом

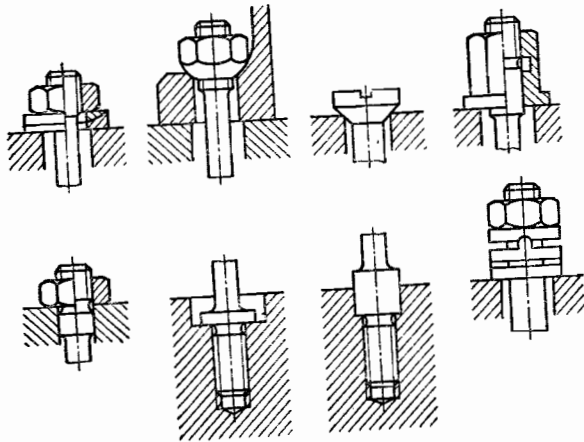


Рис. 22. Конструктивные способы разгрузки резьбы от напряжений изгиба

16. Механические свойства сталей и сплавов (в кгс/мм²) для резьбовых соединений при высоких температурах

Марка стали (сплава)	Температура испытания, °С	σ_B	σ_T	$\sigma_{дл}$ за время, ч		$\sigma_{пл}$ за время, ч		Наибольшая рабочая температура, °С
				100	200	100	1000	
45	20	64	37	—	—	—	—	300
	400	57,3	23	—	—	—	6,5	
	540	34	15	—	—	—	—	
18Х2Н4ВА	20	125	111	—	—	70	—	400
	400	103	98	86	—	20	—	
	500	90	83	41	—	—	—	
20Х3МВФ	20	90	75	—	—	35	—	500
	500	64	56	43	—	25	—	
	600	55	33	33	—	—	—	
12Х18Н9Т	20	66	25	—	—	—	9	600
	600	40	18	25	23	—	3	
	700	28	16	14	12	—	—	
37Х12Н8Г8МФБ	20	100	70	75	—	35	—	650
	600	60	48	—	—	24	—	
	700	55	46	31	—	—	—	
ХН77ТЮР	20	102	66	—	—	—	—	750
	600	94	61	68	66	26	6	
	700	85	60	42	40	—	—	
800	56	46	20	—	—	—	—	
	20	115	103	—	—	—	—	550
	400	85	72	—	—	—	—	
500	80	66	65	—	28	—		
550	78	62	45	—	—	12	—	

во впадинах. Кроме того, следует уменьшать дополнительные напряжения от изгиба и температурных деформаций.

В табл. 16 приведены механические характеристики сталей и сплавов, используемых для изготовления болтов и шпилек, работающих при повышенных температурах.

Для изготовления соединений, работающих длительно при температурах до 1000° С и кратковременно до 1650° С используют молибден. Для повышения жаростойкости болты хромируют или покрывают силицидами.

При расчете прочности определяют запасы прочности по пределу ползучести ($n_{п} = 1,4 \div 2,5$) и по пределу длительной прочности ($n_{дл} = 1,6 \div 4$).

При низких температурах часто происходит хрупкое разрушение болтов (без заметной пластической деформации).

Экспериментальные исследования и опыт эксплуатации машин показали, что болты из углеродистых сталей могут работать длительно до температуры —55° С. Болты соединений, работающих при температурах до —70° С, следует изготавливать из легированных сталей с $\sigma_B = 105 \div 130$ кгс/мм². При более низких температурах тяжело нагруженные болты следует изготавливать из коррозионно-стойких сталей переходного класса СН-2, СН-2а, ВНС-5.

Расчет на прочность резьбовых соединений в условиях пониженных температур не отличается от расчета при нормальной температуре.

ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

На рис. 23 показана типичная диаграмма предельных напряжений для резьбовых соединений.

На практике переменная внешняя нагрузка изменяется в большинстве случаев по пульсирующему циклу

Напряжения в резьбовой части болта (шпильки) вычисляют по формулам (12) и (13)

Запас прочности резьбового соединения по переменным напряжениям

$$n_a = \frac{\sigma_{ад}}{\sigma_a}, \quad (53)$$

где $\sigma_{ад}$ — предел выносливости соединения; σ_a — амплитуда переменных напряжений от внешней нагрузки

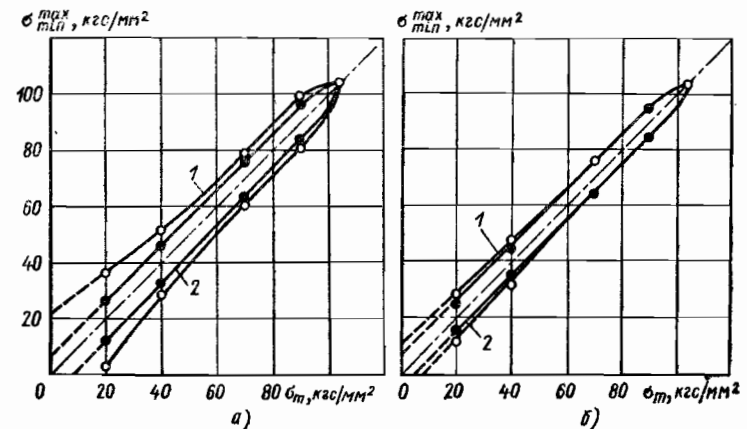


Рис. 23. Диаграммы предельных напряжений для соединений с накатанной (а) и нарезанной (б) резьбой М10:

1 — заготовки шпилек термически обработаны; 2 — готовые шпильки термически обработаны

По формуле (53) можно определить запас прочности, если напряжение предварительной затяжки

$$\sigma_0 \geq 0,5 \sigma_T,$$

так как величина $\sigma_{ад}$ при этом условии практически не зависит от среднего напряжения σ_m .

При меньших значениях

$$n_a = \frac{\sigma_{ад}}{\sigma_a} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_T} \right) \frac{1}{1 - 0,5 \frac{\sigma_T}{\sigma_B}}, \quad (54)$$

где σ_m — среднее напряжение цикла.

Значения $\sigma_{ад}$ можно принимать по табл. 17 или вычислять по формуле

$$\sigma_{ад} = \frac{\sigma_{-1д}}{k_\sigma} \beta_{к.уп} \beta_{т.уп} \varepsilon_\sigma, \quad (55)$$

17. Значения предельной амплитуды $\sigma_{ад}$ для соединений типа болт — гайка при $\sigma_m \geq 0,5 \sigma_T$

Болты и гайки из стали (сплава)	σ_B	σ_{-1p}	$\sigma_{ад}$, кгс/мм ²	
	кгс/мм ²		Резьба нарезана	Резьба накатана
35	50—60	20	4,5/5,5	5,5/6,5
45	90—95	25	5/6	6,5/7,5
38ХА	110—120	30	6,5/7	7,5/8,5
30ХГСА	120—130	30	6,5/7,5	7,5/8,5
30ХГСА	160—170	40	9/11	—
40ХН2МА	160—170	45	9/10	9,5/11
13Х11Н2В2МФ	105—115	30	5/6,5	6/7
10Х11Н20Т3Р	110—120	30	5,5/7	6/7
ВТ3-1	110—120	35	4,5/6	4/6
ВТ9	115—125	35	4,5/6	4/6
ВТ16	115—125	35	4,5/6	5/7

Примечание. В числителе дроби приведены значения пределов выносливости для соединений с болтами, термообработанными после изготовления резьбы, а в знаменателе — те же, термически обработанными для изготовления резьбы.

где σ_{-1p} — предел выносливости гладкого образца при растяжении; k_σ — эффективный коэффициент концентрации напряжения, $k_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1)$, где q — коэффициент чувствительности материала болта (шпильки) к концентрации напряжений, можно принимать $q = 0,5 \div 0,6$ — для углеродистых сталей, $q = 0,7 \div 0,8$ — для легированных сталей, жаропрочных и титановых сплавов; α_σ — теоретический коэффициент концентрации напряжений (см. с. 55); $\beta_{к.уп}$ — коэффициент конструктивного упрочнения; для соединений стандартным болтом $\beta_{к.уп} = 1$, для соединений типа стяжки и со спиральными вставками $\beta_{к.уп} = 1,5 \div 1,6$; $\beta_{т.уп}$ — коэффициент технологического упрочнения, $\beta_{т.уп} = 1$ — для соединений с нарезанной резьбой, а также для соединений из титановых и бериллиевых сплавов, $\beta_{т.уп} = 1,2 \div 1,3$ — для соединений из сталей и сплавов с накатанной резьбой; ε_σ — коэффициент, учитывающий влияние масштабного эффекта (рис. 24).

Если экспериментальные данные отсутствуют (или для соединений из новых материалов), то

$$n_a = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_a} \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B}}, \quad (56)$$

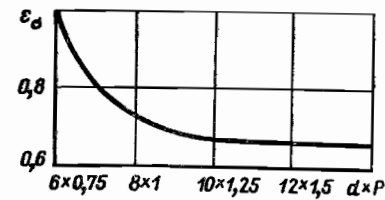


Рис. 24. Значения ε_σ для резьбовых соединений при $d/P = 8$

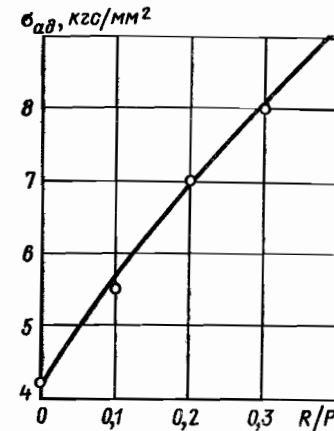


Рис. 25. Зависимость $\sigma_{ад}$ от относительного радиуса скругления во впадинах резьбы R/P

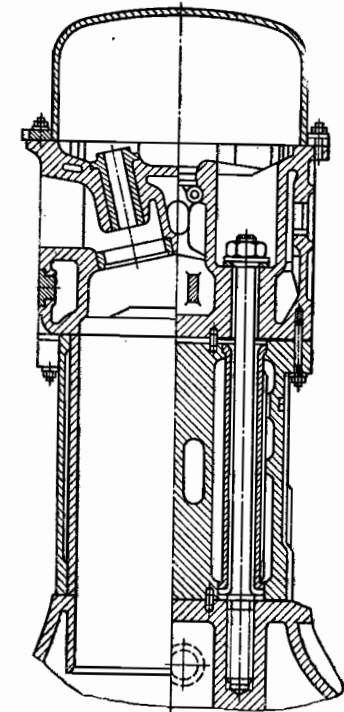


Рис. 26. Силовая шпилька гранспортного дизеля

где $\sigma_{-1д} = \frac{\sigma_{-1p}}{k_\sigma}$ — предел выносливости соединения при симметричном цикле; σ_{-1p} — предел выносливости материала болта при симметричном цикле нагружения.

Усталостная прочность резьбового соединения возрастает на $10 \div 20\%$ при уменьшении модуля упругости материала гайки благодаря улучшению распределения нагрузки между витками (например, в случае применения гаек из дюралюминия или титановых сплавов). Если модуль упругости материала гайки выше, чем у болта, то предел выносливости соединений понизится (на 20% в случае свинчивания титановых болтов со стальными гайками). Усталостная прочность соединений может быть повышена на $20\text{—}50\%$ за счет применения более совершенных (в смысле распределения нагрузки) гаек (см. рис. 17—18).

Увеличение радиуса скругления во впадинах резьбы приводит к наиболее значительному повышению предела выносливости соединений (рис. 25). Особенно эффективно применение увеличенных радиусов в резьбе для соединений из титановых и бериллиевых сплавов.

Для высокопрочных болтов с $\sigma_B = 105 \div 130$ кгс/мм² можно применять гайки из низкоуглеродистой стали с $\sigma_B = 70 \div 90$ кгс/мм² высотой $H = (1 \div 1,2) d$.

Разрушение резьбовых соединений от усталости может происходить и под головкой болта, если радиус закругления под головкой мал или головка получена методами резания.

У болтов со шлицевой головкой или с головкой, имеющей внутреннее шестигранное отверстие под ключ, усталостные трещины могут распространяться от места перехода до отверстия.

Наряду с разрушениями в первых рабочих витках резьбы и под головкой нередки усталостные поломки соединений по сгугу резьбы. Для предотвращения таких разрушений необходимо увеличить длину резьбовой части так, чтобы она распространялась под опорную поверхность гайки на 4—5 витков.

Существенное влияние на усталостную прочность резьбовых соединений оказывает технология изготовления резьбы (в особенности режимы накатывания резьбы). Для повышения усталостной прочности соединений накатывание резьбы целесообразно выполнять при минимально возможной продолжительности процесса, так как в этом случае во впадинах резьбы образуется благоприятная система остаточных напряжений. Накатывание резьбы в «замкнутом контуре» (полное заполнение впадин резьбонакатного инструмента) нецелесообразно.

Пример. Рассчитать на прочность силовую шпильку рядного двигателя внутреннего сгорания (рис. 26). Задано давление вспышки $p = 85$ кгс/см²; диаметр цилиндра $D = 180$ мм. Определить усилия и предварительный расчет. Усилие при вспышке

$$N_0 = \frac{\pi D^2}{4} p = \frac{\pi}{4} 18^2 \cdot 85 = 21600 \text{ кгс.}$$

Внешняя нагрузка на одну шпильку

$$N = \frac{N_0}{4} = \frac{21600}{4} = 5400 \text{ кгс.}$$

Внешнее усилие изменяется по пульсирующему циклу. В качестве материала шпильки выбираем сталь 40ХН2МА. Термообработка: закалка в масле с 810 °С, отпуск при 580 °С, охлаждение на воздухе. Механические свойства материала: $\sigma_B = 115$ кгс/мм², $\sigma_T = 80$ кгс/мм², $\sigma_{-1P} = 44$ кгс/мм². Материал гайки — сталь 38ХА.

Диаметр резьбы предварительно выбираем по формуле (1). В соответствии с табл. 4 принимаем

$$[\sigma] = 0,15\sigma_T = 0,15 \cdot 105 = 15,7 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$F_1 \geq \frac{5400}{15,7} = 344 \text{ мм}^2.$$

По табл. 5 находим, что для предварительного расчета можно принять резьбу $d = 24$ мм. Выбираем резьбу М24×2, так как она прочнее резьбы М24, и отношение $\frac{d}{P} = 12 < 15$, что рекомендуется для силовых резьб.

Для резьбы М24×2

$$F_1 = 365 \text{ мм}^2; \quad d_1 = 21,546 \text{ мм.}$$

Выбираем диаметр стержня шпильки $d_c \approx d_1 = 21$ мм; площадь сечения $F_c = 346 \text{ мм}^2$. По предварительному чертежу определяем следующие величины:

Длина растягиваемой части шпильки l_0 , мм	360
Средняя площадь отсека головки блока, приходящаяся на одну шпильку F_1 , мм ²	4600
Высота снимаемой части головки l_1 , мм	70
Площадь прокладки, приходящаяся на одну шпильку, F_2 , мм ²	8500
Толщина прокладки l_2 , мм	3
Средняя площадь рубашки блока, приходящаяся на одну шпильку, F_3 , мм ²	2300
Высота блока рубашки l_3 , мм	278

Напряжения затяжки. Из условия герметичности, в соответствии с формулой (36), выбираем $\nu = 2,5$. Напряжение затяжки при монтаже

$$\sigma_0^{(0)} = \nu \frac{N}{F_1} = 2,5 \frac{5400}{365} = 37 \text{ кгс/мм}^2.$$

Усилие затяжки при монтаже

$$Q_0^{(0)} = \sigma_0 F_1 = 37 \cdot 365 = 13500 \text{ кгс.}$$

Расчетная нагрузка. Принимаем модули упругости, кгс/мм²: шпильки $E_0 = 2 \cdot 10^4$; блока и головки блока (алюминиевый сплав) $E_1 = E_2 = 0,72 \cdot 10^4$; прокладки $E_3 = 0,72 \cdot 10^4$.

Вычисляем коэффициенты податливости в мм/кгс для шпильки

$$\lambda_0 = \frac{l_0}{E_0 F_0} = \frac{36}{2 \cdot 10^4 \cdot 346} = 5,2 \cdot 10^{-4};$$

для головки блока

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{E_1 F_1} = \frac{7}{0,72 \cdot 10^4 \cdot 4600} = 0,21 \cdot 10^{-4};$$

для прокладки

$$\lambda_2 = \frac{l_2}{E_2 F_2} = \frac{3}{0,72 \cdot 10^4 \cdot 8500} = 0,005 \cdot 10^{-4};$$

для блока

$$\lambda_3 = \frac{l_3}{E_3 F_3} = \frac{27,8}{0,72 \cdot 10^4 \cdot 2300} = 1,68 \cdot 10^{-4}.$$

В рассматриваемом случае к деталям системы болта относятся шпилька и головка блока, к деталям системы корпуса — рубашка блока и прокладка. Коэффициент основной нагрузки

$$\chi = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{0,005 + 1,68}{5,2 + 0,21 + 0,005 + 1,68} = 0,24.$$

Определяем усилие, действующее на шпильку в результате нагрева системы. Принимаем, что в рабочем состоянии все детали нагреваются на 75 °С. Коэффициент линейного расширения для стали $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}$ 1/°С, для алюминиевых сплавов $\alpha = 22 \cdot 10^{-6}$ 1/°С. По формуле (17) находим

$$Q_t = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i l_i^2 - \alpha_0 l_0^2}{\sum_{i=0}^3 \lambda_i} = \frac{(22 - 11) \cdot 10^{-6} \cdot 75 \cdot 36}{(5,2 + 0,21 + 0,005 + 1,68) \cdot 10^{-4}} = 4200 \text{ кгс.}$$

Усилие затяжки в рабочем состоянии

$$Q_0 = Q_0^{(0)} + Q_t = 13500 + 4200 = 17700 \text{ кгс.}$$

Напряжение затяжки на работающем двигателе

$$\sigma_0 = \sigma_0^{(0)} + \sigma_0^{(t)} = 37 + \frac{4200}{365} = 48,5 \text{ кгс/мм}^2.$$

Следовательно, напряжение затяжки ниже предельного напряжения, которое будет

$$0,8\sigma_T = 0,8 \cdot 105 = 84 \text{ кгс/мм}^2.$$

Общее усилие на шпильку

$$Q = Q_0 + \chi N = 17700 + 0,24 \cdot 5400 = 19000 \text{ кгс.}$$

Напряжения растяжения. В резьбовой части стержня

$$\sigma_1 = \frac{Q}{F_1} = \frac{19000}{365} = 52 \text{ кгс/мм}^2.$$

В стержне шпильки

$$\sigma_c = \frac{Q}{F_c} = \frac{19000}{3,6} = 55 \text{ кгс/мм}^2.$$

Напряжения кручения. Момент, закручивающий шпильку при затяжке, находим по формуле (31), принимая $f_p = 0,2$:

$$M_k = \frac{1}{2} Q_0 d_2 \left(\frac{P}{l d_2} + f_p \right) = \frac{1}{2} 13500 \cdot 21,5 \left(\frac{2}{3,14 \cdot 21,5} + 0,2 \right) = 332 \cdot 10^3 \text{ кгс} \cdot \text{мм.}$$

Касательные напряжения в нарезанной части стержня

$$\tau_1 = \frac{M_k}{0,2 d^3} = \frac{332000}{0,2 (21,5)^3} = 16,6 \text{ кгс/мм}^2;$$

в стержне шпильки

$$\tau_c = \frac{33\,200}{0,2(21)^2} = 18 \text{ кгс/мм}^2.$$

Проверка стержня болта на скручивание при затяжке

$$\sqrt{(\sigma_0^{(0)})^2 + 3\tau^2} = \sqrt{37^2 + 3 \cdot 16,6^2} = 49,5 \text{ кгс/мм}^2 < 0,8\sigma_T.$$

Напряжения затяжки также не больше допустимых.

Приведенные напряжения в резьбовой части шпильки

$$\sigma_{1пр} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2} = \sqrt{52^2 + 3 \cdot 16,6^2} = 57,9 \text{ кгс/мм}^2.$$

В стержне шпильки

$$\sigma_{спр} = \sqrt{\sigma_c^2 + 3\tau_c^2} = \sqrt{55^2 + 3 \cdot 18^2} = 64 \text{ кгс/мм}^2.$$

Запас прочности по пластическим деформациям. В резьбовой части (принимая $\sigma'_T = 1,05\sigma_T$)

$$n_T = \frac{\sigma'_T}{\sigma_{1пр}} = \frac{1,05 \cdot 105}{57,9} = 1,82.$$

В стержне

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{спр}} = \frac{105}{64} = 1,64.$$

Так как запасы прочности по пластическим деформациям больше 1,3, то их следует признать допустимыми.

Запас статической прочности. В резьбовой части (принимая $\sigma'_B = 1,05\sigma_B$)

$$n_B = \frac{\sigma'_B}{\sigma_{1пр}} = \frac{1,05 \cdot 115}{57,9} = 2,05.$$

В стержне шпильки

$$n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{спр}} = \frac{115}{64} = 1,8.$$

Эти запасы следует признать удовлетворительными.

Необходимая высота гайки. По формуле (44)

$$\frac{H_0}{d} = 0,47 \frac{\kappa}{k_m} \frac{\sigma_{вб}}{\sigma_{вг}} \left(\frac{d_c}{d}\right)^2.$$

Имеем $\sigma_{вб} = 115 \text{ кгс/мм}^2$; $\sigma_{вг} = 105 \text{ кгс/мм}^2$; $\kappa = 1$, $k_m = 0,6$.

Находим

$$\frac{H_0}{d} = 0,47 \frac{1}{0,6} \cdot \frac{115}{105} \left(\frac{21}{24}\right)^2 \approx 0,7.$$

Необходимая высота гайки

$$H = 0,7 \cdot 24 = 17 \text{ мм}.$$

Переменные напряжения в резьбе

$$\sigma_a = \frac{\kappa N}{2 F_1} = \frac{0,24}{2} \cdot \frac{5400}{365} = 1,8 \text{ кгс/мм}^2.$$

Запас прочности по переменным напряжениям. Для накатанной резьбы из стали 40ХН2МА по табл. 14 принимаем $\sigma_{ад} = 11 \text{ кгс/мм}^2$. Учитывая отрицательное влияние больших размеров, уменьшаем $\sigma_{ад}$ на 30%, получаем 7,7 кгс/мм².

Так как напряжение затяжки $\sigma_0 \approx 0,5\sigma_T$, то запас по переменным напряжениям

$$n_a = \frac{\sigma_{ад}}{\sigma_a} = \frac{7,7}{1,8} = 4,25.$$

Такой запас вполне достаточен. Так как первоначально выбранные размеры обеспечивают необходимые запасы прочности, то расчет резьбового соединения шпильки и гайки на этом заканчиваем.

ФЛАНЦЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

ТИПЫ ФЛАНЦЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Фланцевые соединения можно подразделить на два основных типа: с неконтактирующими фланцами (рис. 1, а) и с контактирующими фланцами (рис. 1, б). Наиболее распространен первый тип соединения (трубопроводы, сосуды и аппараты и т. п.). Соединения с контактирующими фланцами часто применяют в конструкциях, не требующих полной герметизации стыка (фланцы корпусов машин, редукторов и т. п.). Получили распространение фланцевые соединения с контактирующими стыками и с самоуплотняющимися прокладками, обеспечивающие герметичность. Такие соединения имеют меньшие габариты по сравнению с соединениями первого типа, но более сложны при изготовлении и монтаже.

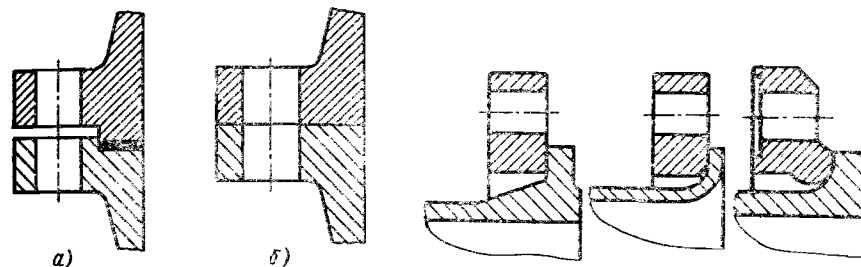


Рис. 1. Типы фланцевых соединений

Рис. 2. Накладные (свободные) фланцы

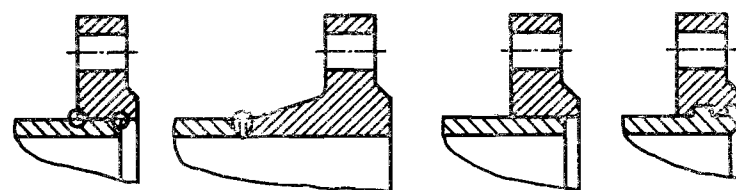


Рис. 3. Способы соединения фланца и трубы

Применяют свободные фланцы (рис. 2), а также фланцы, изготовленные вместе с трубой (корпусом) или присоединенные к трубе с помощью сварки, резьбы, развальцовки или заклепок (рис. 3). Некоторые виды фланцевых соединений стандартизованы. Прокладки выполняют в виде плоского листа из паронита, картона, резины, фибры, фторопласта, алюминия, меди и мягкой стали; применяют асбесто-металлические прокладки, металлические гофрированные и зубчатые, металлические линзовые прокладки и др.

Во фланцевых соединениях с контактирующими фланцами используют самоуплотняющиеся прокладки в виде резиновых или металлических колец.

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ

Расчет выполняют при предварительном выборе размеров и для проверки прочности ответственных фланцевых соединений.

Расчет соединений с неконтактирующими фланцами. Расчетное усилие, действующее на болты (рис. 4), определяют по формуле

$$Q_c = k \frac{\pi D_{ср.п}^2}{4} p, \quad (1)$$

где $D_{ср.п}$ — средний диаметр прокладки, см; p — рабочее давление среды, кгс/см².
Коэффициент затяжки k :

- Мягкие прокладки 1,5 — 2,5
- Мягкие прокладки в металлических оболочках и металлические фланцы 2,5 — 3,5
- Совные прокладки 3,0 — 4,5
- Плоские металлические прокладки 3,0 — 4,5

Условие прочности фланцевых болтов:

$$\sigma = \frac{4Q_c}{z \pi d_1^2} \leq 0,6\sigma_T, \quad (2)$$

где z — число болтов; d_1 — внутренний диаметр резьбы болта; σ_T — предел текучести материала болта с учетом рабочей температуры.

Число болтов для обеспечения более равномерной затяжки стыка часто выбирают кратным четырем ($z = 4, 8, 12, 16$).

Расстояние между осями болтов (шаг болтов) обычно принимают при малых давлениях ($p \leq 10$ кгс/см²) $t = (5 \div 7) d$, при больших давлениях ($p \geq 30$ кгс/см²) $t = (2,5 \div 4) d$. Опасным сечением при расчете на прочность фланца обычно является место перехода от фланца к трубе¹ (сечение АВ на рис. 4).

Изгибающий момент в этом сечении (на единицу длины)

$$M_1 = \eta \frac{Q_c l_1}{\pi D_1}, \quad (3)$$

где $\eta \geq 1$ — коэффициент, учитывающий, что часть момента воспринимается поворотной деформацией фланца; l_1 — расстояние от центра сечения АВ до оси болта; D_1 — средний диаметр трубы в сечении АВ.

Если коническая втулка (или труба) очень жесткая по отношению к фланцу и сечение АВ не поворачивается, то $\eta = 1$. Значение η можно определить по приближенной формуле (вывод см. стр. 81):

$$\eta = \frac{1}{1 + 0,82 \left(\frac{h}{s_{ср}}\right)^3 \sqrt{\frac{s_{ср}}{\tau_{тр}} \lg \frac{D_n}{D}}}, \quad (4)$$

где $s_{ср} = \frac{1}{2}(s_1 + s)$ — средняя толщина трубы на коническом участке; $\tau_{тр}$ — средний радиус трубы; D_n и D — соответственно наружный и внутренний диаметры фланца. Значения η , вычисленные по формуле (4), приведены в табл. 1.

Напряжения изгиба в опасном сечении фланца (сечение АВ)

$$\sigma_{из} = \frac{6M_1}{s_1^2} = \frac{6\eta Q_c l_1}{\pi (D + s_1) s_1^2} \leq 0,5\sigma_B, \quad (5)$$

¹ Предполагается, что $h > s_1$. Уклон конического участка принимают равным $1/3$ (реже $1/4$).

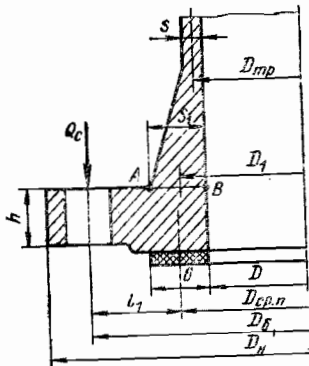


Рис. 4. К расчету фланцевых соединений с неконтактирующими фланцами

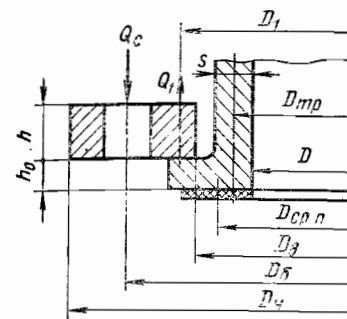


Рис. 5. К расчету фланцевых соединений со свободными фланцами

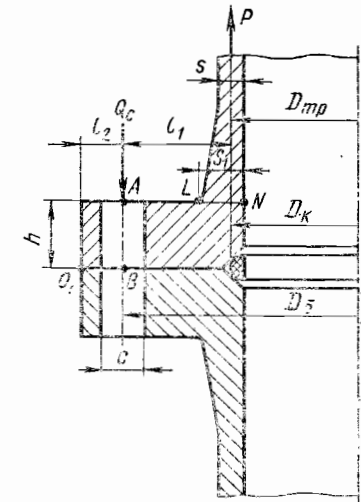


Рис. 6. К расчету фланцевых соединений с контактирующими фланцами

где σ_B — предел прочности материала фланца (при высокой температуре под σ_B следует понимать предел длительной прочности).

1. Значения коэффициента η

$\frac{s_{ср}}{h}$	$\frac{s_{ср}}{\tau_{тр}} = 0,02$					$\frac{s_{ср}}{\tau_{тр}} = 0,1$					$\frac{s_{ср}}{\tau_{тр}} = 0,4$				
	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0
1,0	0,991	0,930	0,860	0,790	0,730	0,980	0,910	0,840	0,770	0,710	0,970	0,900	0,830	0,760	0,700
0,9	0,988	0,927	0,857	0,787	0,727	0,977	0,907	0,837	0,767	0,707	0,967	0,897	0,827	0,757	0,697
0,8	0,982	0,921	0,851	0,781	0,721	0,971	0,901	0,831	0,761	0,701	0,961	0,891	0,821	0,751	0,691
0,7	0,974	0,913	0,843	0,773	0,713	0,963	0,893	0,823	0,753	0,693	0,953	0,883	0,813	0,743	0,683
0,6	0,959	0,913	0,860	0,807	0,754	0,948	0,895	0,842	0,789	0,736	0,937	0,884	0,831	0,778	0,725
0,5	0,931	0,866	0,782	0,700	0,619	0,919	0,854	0,769	0,684	0,600	0,909	0,844	0,759	0,674	0,589
0,4	0,874	0,758	0,647	0,581	0,536	0,859	0,743	0,632	0,566	0,521	0,849	0,733	0,622	0,556	0,511
0,3	0,747	0,570	0,437	0,369	0,329	0,737	0,560	0,427	0,359	0,319	0,727	0,550	0,417	0,349	0,309

Из формулы (5) следует, что для снижения напряжений во фланцах целесообразно: а) приближать оси болтов к трубе (уменьшать величину l_1); б) увеличивать толщину трубы в месте перехода к фланцу (размер s_1). Однако при большой конусности (1 : 2) упрочнение получается чисто местным и максимум напряжений сдвигается к более тонкому сечению трубы.

Расчет соединений с неконтактирующими свободными фланцами. Суммарное усилие на болты Q_c (рис. 5) определяют из равенства (1); условие прочности болтов выражается формулой (2).

При расчете на прочность фланца принимается, что фланец испытывает поворотную деформацию, и в нем возникают окружные напряжения.

Условие прочности фланца:

$$\sigma = \frac{6Q_c (D_6 - D_1)}{\pi D_b h^2 \ln \frac{D_{II}}{D_b}} = 0,83 \frac{Q_c (D_6 - D_1)}{D_b h^2 \lg \frac{D_{II}}{D_b}} < 0,7\sigma_T, \quad (6)$$

где D_6 — диаметр окружности осей болтов; D_1 — средний диаметр кольцевой площадки контакта фланца и трубы; D_b — внутренний диаметр фланца толщиной h ; σ_T — предел текучести материала с учетом температуры фланца.

Расчет соединений с контактирующими фланцами. Расчетное суммарное усилие для фланцевых болтов (рис. 6) определяют из условия

$$Q_c = k \frac{\pi D_k^2}{4} p \frac{l_1 + l_2}{l_2}, \quad (7)$$

где k — коэффициент затяжки, обычно принимают $k = 1,5 \div 2,5$; D_k — диаметр уплотнения, см; p — рабочее давление среды, кгс/см²; l_1 — расстояние от средней окружности трубы до окружности осей болтов; l_2 — расстояние от наружной окружности фланца до окружности осей болтов.

Формула (7) учитывает, что в предельном состоянии раскрытие стыка происходит при повороте относительно точки O_1 .

Условие прочности фланцевых болтов

$$\sigma = \frac{4Q_c}{z\pi d_1^2} \leq (0,5 \div 0,8) \sigma_T,$$

где z — число болтов в соединении; d_1 — внутренний диаметр резьбы болта.

При расчете на прочность фланец рассматривают как стержень, заделанный в сечении AB (рис. 6) и упруго связанный с трубой.

Изгибающий момент в сечении AB

$$M = \eta P l_1, \quad (8)$$

где $P = \frac{\pi D_k^2}{4} p$ — внешнее усилие, действующее на фланцевое соединение; η — коэффициент уменьшения изгибающего момента ($0,5 \leq \eta \leq 1$) за счет упругой связи фланца и трубы.

Если труба очень жесткая (по отношению к фланцу), то $\eta = 0,5$, для тонкой трубы $\eta \approx 1$. Значения η вычисляют по приближенной формуле (вывод см. стр. 84):

$$\eta = \frac{1 + \lambda}{2 + \lambda}, \quad (9)$$

где

$$\lambda = 0,72 \frac{\sqrt{r_{тр} s}}{l_1} \left(\frac{h}{s_{ср}} \right)^3 \frac{\pi D_6 - zc}{\pi D_{тр}}, \quad (10)$$

$s_{ср} = \frac{1}{2} (s_1 + s)$ — средняя толщина трубы; c — диаметр отверстия под болт.

В приближенных расчетах можно принимать $\eta \approx 0,8 \div 1$. Напряжение изгиба во фланце (в сечении AB) должно быть

$$\sigma_{из} = \frac{6M}{(\pi D_6 - zc) h^2} \leq 0,6\sigma_{в}, \quad (11)$$

где z — число болтов.

Изгибающий момент в сечении LN трубы

$$M_1 = (1 - \eta) P l_1 = (1 - \eta) \frac{\pi D_k^2}{4} p l_1. \quad (12)$$

Напряжения изгиба в этом сечении должны удовлетворять условию

$$\sigma_{из} = \frac{6M_1}{\pi D_{тр} s_1^2} \leq 0,6\sigma_{в}. \quad (13)$$

В формулах (11) и (13): $\sigma_{в}$ — предел прочности материала фланца с учетом рабочей температуры и длительности работы.

УТОЧНЕННЫЙ РАСЧЕТ СОЕДИНЕНИЙ С НЕКОНТАКТИРУЮЩИМИ ФЛАНЦАМИ

В соединениях этого вида уплотнение создается в основном сжатием прокладки фланцевыми болтами.

Усилие уплотнения, необходимое для герметичности стыка. Это усилие на прокладку должно оставаться на стыке в рабочих условиях для обеспечения герметичности.

Плоские прокладки. Усилие уплотнения определяют по формуле

$$P_{уп} = \pi D_{ср.п} b q_0, \quad (14)$$

где $D_{ср.п}$ — средний диаметр прокладки, см; b — ширина прокладки, см; q_0 — давление на контактных поверхностях прокладки, кгс/см²; обычно принимают $q_0 = m p$ (здесь m — прокладочный коэффициент¹, см. табл. 4; p — давление среды, кгс/см²).

При увеличении давления среды p давление уплотнения должно возрастать, при уменьшении — снижаться. Однако давление уплотнения q_0 не должно быть меньше некоторого минимального значения $q_{0 \min}$, при котором еще не нарушается герметичность; значения $q_{0 \min}$ приведены в табл. 4.

Значения q_0 для плоских прокладок приведены в табл. 2.

Рекомендуемые значения толщины и ширины плоских прокладок приведены в табл. 3.

2. Значения q_0 для плоских прокладок

Материал прокладки	p , кгс/см ²	Среда	q_0 , кгс/см ²
Резина	До 30 Св. 30 до 100	—	$15 + \frac{1,7p}{45} + 0,7p$
Паронит	—	Нормальной проникающей способности	$100 + p$
		Повышенной проникающей способности (водород, гелий и др.)	350
Фторопласт-4	До 100 Св. 100 до 150 До 150	Жидкая Газообразная	$10 + p$ ($q_{0 \min} = 40$) $40 + p$ $40 + p$
Фибра	—	—	400
Свинец	—	—	70

¹ В стандартном американском методе расчета используют приблизительно в 2 раза большие значения m , но они соответствуют удвоенному усилию уплотнения.

3. Рекомендуемые значения толщины h_n и ширины b плоских прокладок и их применение

Материал прокладки	h_n , мм	b , мм	Применение	
			ρ , кгс/см ² (не более)	Температура, °С
Резина	1-3	$b \geq 4h_n$	100	От -30 до +60
Паронит	1-3	12-20	150	До 400
Фторопласт-4	0,8-0,9	10	200	От -73 до +250
Фибра	1-3	8-12	150	До 100
Алюминий	1-2	8-16	500	≥ 250
Медь			700	≥ 350
Мягкая сталь			700	≥ 400
Сталь типа 12X18H9T			1000	≥ 600

Примечание. Величина максимального зазора между уплотнителями поверхности фланцев (без прокладок) не должна превышать 0,15 номинальной толщины прокладки.

4. Приблизительные значения прокладочного коэффициента m , минимального давления уплотнения $q_0 \min$, давления обжатия $q_{обж}$, допустимого давления $[q]$ и модуля упругости плоских прокладок из различных материалов

Форма и материал прокладки	m	$q_0 \min$	$q_{обж}$	$[q]$	$E_n \cdot 10^{-6}$
Плоская прокладка, материал прокладки: резиновый лист мягкая резина с тканевой прослойкой или лист из твердой резины твердая резина с тканевой прослойкой	1,2	25	35	180	$0,4 \cdot 10^{-4} \times$ $\times (1 + \frac{b}{h_n})$
		35	50	200	
		45	70	200	
паронит или прессованный асбест	1,6	100	320	1100	0,03
фторопласт-4	1,4	40	100	400	0,02
фибра	1,4	400	500	800	0,07
асбест, армированный проволоочной сеткой	1,4	100	300	1200	0,03
мягкий алюминий	2	500	1000	1400	0,7
мягкая медь	2,4	700	1600	2000	1,1
мягкая сталь	2,7	800	2500	3500	2
сталь типа 15X5M	3	900	3500	5500	2
сталь типа 12X18H9T	3,2	1000	4000	6000	2
Гофрированная оболочка с асбестовым наполнителем; материал оболочки: медь или алюминий	1,5	200	420	1100	0,04
		углеродистая или коррозионно-стойкая сталь	1,6	250	
Гладкая оболочка с асбестовым наполнителем; материал оболочки: алюминий или медь мягкая сталь, монель сталь типа 12X18H9T	1,6	250	500	1200	0,05
		280	550	1300	
		300	650	1400	
		300	650	1400	

Примечания: 1. При уплотнении воздуха или пара значения m и $q_0 \min$ должны быть увеличены в 1,8 раза; при уплотнении сред с высокой проникающей способностью (водород, гелий и т. п.) — в 2,5 раза.

2. В таблице приняты обозначения: b — ширина и h_n — толщина прокладки.

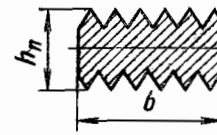
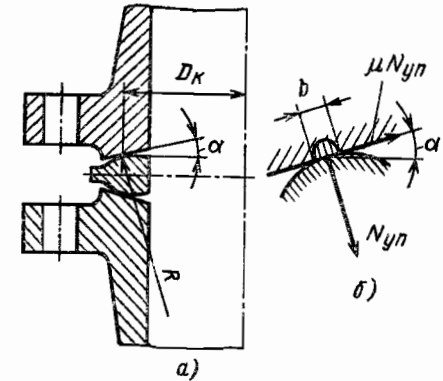


Рис. 7. Сечение рифленой прокладки

Рис. 8. Фланцевые соединения с линзовыми прокладками:
а — конструктивная схема; б — усилие в зоне контакта фланца и линзы

Фасонные прокладки. Для плоской рифленой прокладки (рис. 7) можно принимать значения m и $q_0 \min$ по табл. 4, уменьшенные на 20%. По данным работы [1], при толщине прокладки $h_n = 3$ мм принимают $bm = 3\sqrt[3]{z}$ мм, где z — число гребешков.

Для прокладки круглого сечения между двумя плоскими поверхностями фланцев можно принять в деформированном состоянии $b \approx 2d$ и расчет усилия проводить по формуле (14) при значениях m и $q_0 \min$, указанных в табл. 4.

Для металлических прокладок овального и восьмиугольного сечения, продолженных в кольцевом пазу, принимают $b = \frac{1}{4} d$.

Линзовые прокладки (рис. 8). Их применяют для ответственных фланцевых соединений (обычно при $p < 1000$ кгс/см² и $t \leq 900^\circ$ С).

Для лучших условий контакта твердость материала линзы должна быть несколько меньше, чем материала трубы. Усилие N_{yn} , действующее на линзу, и усилие уплотнения P_{yn} связаны соотношением

$$P_{yn} = \frac{N_{yn} \cos(\alpha + \rho)}{\cos \rho}, \quad (15)$$

где ρ — угол трения ($\operatorname{tg} \rho = f$, где f — коэффициент трения; часто принимают $f = 0,15$; $\rho = 8^\circ 30'$). Угол α составляет обычно 20° — 30° .

Величина нормального усилия, необходимого для уплотнения,

$$N = \pi D_k q_{yn}, \quad (16)$$

где q_{yn} — нагрузка на единицу длины контактной линии.

Значения q_{yn} можно выбирать следующими (давление среды $p \leq 750$ кгс/см²):

D_k , мм	50	100	200
q_{yn} , кгс/см	300	400	500

Величину q_{yn} можно определить исходя из равенства контактных напряжений для создания герметичности пределу текучести материала линзы. На основании теории контактных деформаций (контакт цилиндра и полуплоскости)

$$\sigma_k = \sigma_T = 0,42 \sqrt{\frac{q_{yn} E}{R}}, \quad (17)$$

где σ_T и E — предел текучести и модуль упругости материала линзы; R — радиус кривизны контактирующей поверхности линзы.

Ширина полоски контакта

$$b = \frac{4q}{\rho \sigma_T}.$$

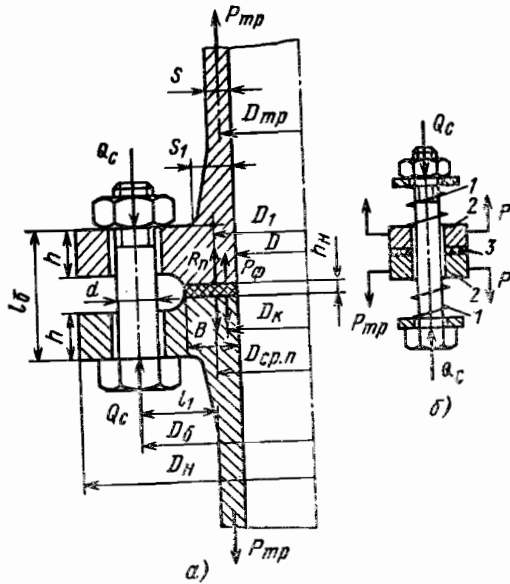


Рис. 9. Схема фланцевого соединения с неконтактирующими фланцами:
а — конструктивная схема и усилия; б — силовая схема при действии осевой нагрузки; 1 — фланец; 2 — труба; 3 — прокладка

Однако при очень больших давлениях на прокладку возможно ее распуливание, образование трещин и т. п.

Давление на прокладку должно быть меньше допускаемого $q \leq [q]$. Значения $q_{обж}$ и $[q]$ для плоских прокладок см. табл. 4.

Для плоских рифленых прокладок значения $q_{обж}$ и $[q]$ могут быть приняты на 20% меньше указанных в табл. 4. Для круглых прокладок можно использовать значения табл. 4, если давления отнести к ширине прокладки $b \approx 2d$.

Для линзовых прокладок принимают давление (в кгс/см²) $q_{обж} \approx q_{уп}$. Допустимое значение давления (в кгс/см) по формуле (18), при $\sigma_k = 0,9 \sigma_B$

$$[q] = 5,7 \frac{(0,9\sigma_B)^2 R}{E} = 4,6 \frac{\sigma_B^2 R}{E}.$$

Силовая схема фланцевого соединения с неконтактирующими фланцами. Фланцевое соединение рассчитывают по схеме, показанной на рис. 9. Изгибной жесткостью болтов пренебрегают. Фланцы относят к системе болта, трубу и прокладку — к системе корпуса. На соединение действует внешнее усилие

$$P = P_{тр} + P_{ф} = \frac{\pi D_k^2}{4} p. \quad (20)$$

В приближенных расчетах диаметр уплотнения обычно принимают

$$D_k = D_{ср.п.}$$

Из формулы (17) получаем следующее равенство:

$$q_{уп} = 5,7 \frac{\sigma_B^2 R}{E}. \quad (18)$$

Например, при $\sigma_B = 6000$ кгс/см², $R = 5$ см, $E = 2 \cdot 10^9$ кгс/см²

$$q_{уп} = 5,7 \frac{(6000)^2 \cdot 5}{2 \cdot 10^9} = 510 \text{ кгс/см}.$$

Увеличение $q_{уп}$ при возрастании R объясняется необходимостью увеличения усилий для создания контактных напряжений, равных σ_B .

Усилие обжатия и допустимые давления для прокладки. Для обеспечения герметичности стыка прокладка должна быть предварительно обжата под определенным давлением (для устранения неплотности прилегания).

Необходимое усилие обжатия

$$P_{обж} = \pi D_{ср.п} b q_{обж}, \quad (19)$$

где $D_{ср.п}$ — средний диаметр прокладки; b — ширина прокладки; $q_{обж}$ — давление на прокладку для ее обжатия.

Полное усилие, действующее на болты,

$$Q_6 = Q_0 + \chi P, \quad (21)$$

где Q_0 — предварительное усилие на болты до приложения внешней нагрузки (суммарное усилие затяжки); $\chi = \chi_1 - \chi_2$.

Коэффициент осевой нагрузки

$$\chi_1 = \frac{\lambda_n + \lambda_{тр}}{\lambda_6 + \lambda_{ф} + \lambda_n + \lambda_{тр}}, \quad (22)$$

где λ_n , $\lambda_{тр}$, λ_6 , $\lambda_{ф}$ — коэффициенты податливости прокладки, трубы, болтов и фланцев, см/кгс.

Коэффициент осевой нагрузки изменяется в пределах

$$0 \leq \chi_1 \leq 1.$$

В приближенных расчетах можно принимать: при металлических прокладках $\chi_1 = 0,1 \div 0,3$; при мягких прокладках (исключая резиновые) $\chi_1 = 0,2 \div 0,4$; при резиновых $\chi_1 = 0,6 \div 1$.

Коэффициент внутреннего давления

$$\chi_2 = \frac{\lambda_{ф}^*}{\lambda_6 + \lambda_{ф} + \lambda_n + \lambda_{тр}}, \quad (23)$$

где $\lambda_{ф}^*$ — коэффициент податливости фланца, связанный с радиальной деформацией стенок трубы. Эта деформация вызывает поворот тарелок фланцев и уменьшает нагрузку на фланцевые болты.

В приближенных расчетах можно принимать

$$\chi_2 \approx 0,3 \frac{S_{ср}}{l_1}.$$

Обычно $\chi_2 = 0,1 \div 0,3$.

Приближенная формула для усилия на болты в рабочих условиях:

$$Q_6 \approx Q_0. \quad (24)$$

Определение коэффициентов податливости.

Коэффициент податливости болтов

$$\lambda_6 = \frac{l_6 + 0,3d}{z E_6 \frac{\pi d^2}{4}}, \quad (25)$$

где l_6 — расчетная длина болта; d — диаметр стержня болта; z — число болтов; E_6 — модуль упругости материала болта (с учетом температуры).

Увеличением длины на $0,3d$ приближенно учитывается податливость витков резьбы.

Коэффициент податливости прокладки

$$\lambda_n = \frac{h_n}{E_n \pi D_{ср.п} b},$$

где E_n — модуль упругости материала прокладки (см. табл. 2).

Коэффициент податливости трубы

$$\lambda_{тр} \approx \frac{l_6 - h_n}{E_n \pi D_1 s_1}.$$

Коэффициент податливости фланцев при действии осевой нагрузки определяют с учетом поворотной деформации фланца и изгиба связанной с ним цилиндрической оболочки (трубы).

Если угол поворота фланца под действием усилия Q составляет φ_p , то коэффициент податливости (для двух фланцев)

$$\lambda_\Phi = 2 \frac{\varphi_\Phi l_1}{Q}$$

На основании решения, изложенного на стр. 82,

$$\lambda_\Phi = 1,6 \frac{l_1^3 (1-\eta)}{Eh^3 \lg \frac{D_n}{D}} \quad (26)$$

Значения η приведены в табл. 1. При высокой температуре ($t > 300^\circ \text{C}$) следует учитывать уменьшение модуля упругости.

Коэффициент податливости фланцев при действии внутреннего давления на основании решения, изложенного на стр. 82 (для двух фланцев),

$$\lambda_\Phi^* = \frac{D_{\text{тр}}^2}{D_k^2} \cdot 0,8 (1-\eta) \frac{s_{\text{ср}} l_1}{Eh^3 \lg \frac{D_n}{D}} \quad (27)$$

Усилие на прокладке. После приложения внешней нагрузки усилие на прокладке уменьшается до величины

$$R_n = Q_0 - (1-\chi) P, \quad (28)$$

где $\chi = \chi_1 - \chi_2$.

Усилие затяжки фланцевых болтов. Усилие затяжки болтов должно обеспечивать герметичность соединения. Исходя из равенства (28), получим

$$Q_0 \geq (1-\chi) P + P_{\text{уп}}, \quad (29)$$

где $P_{\text{уп}}$ — усилие на прокладку, необходимое для герметичности стыка.

Усилие затяжки для обеспечения герметичности при рабочих условиях выбирают с некоторым запасом на потерю затяжки:¹

$$Q_0 \geq k \left[(1-\chi) \frac{\pi D_{\text{ср.п}}^2}{4} p + P_{\text{уп}} \right], \quad (30)$$

где p — наибольшее давление среды в рабочих условиях (рабочее давление); $k = 1,0 \div 1,4$ — коэффициент, большие значения которого принимают для металлических прокладок и для прокладок, подвергающихся частому действию повторных нагрузок при повышенных температурах. Для резиновых прокладок $k = 1$.

Для обеспечения условий герметичности при гидравлических испытаниях усилие затяжки болтов

$$Q_0 \geq (1-\chi) \frac{\pi D_{\text{ср.п}}^2}{4} p_{\text{проб}} + P_{\text{уп}}, \quad (31)$$

где $p_{\text{проб}}$ — давление при гидравлических испытаниях (пробное давление).

Величина $p_{\text{проб}}$ устанавливается техническими условиями и составляет обычно $(1,1 \div 1,5) p$.

Усилие затяжки должно быть больше необходимого усилия обжатия

$$Q_0 > P_{\text{обж}} \quad (32)$$

При выборе усилия затяжки рассматривают все три условия (30) — (32) и принимают наибольшее значение Q_0 . Однако выбранное значение Q_0 должно удовлетворять условию прочности прокладки.

¹ В приближенных расчетах температурное усилие не учитывают, что идет в запас. При действии внешнего изгибающего момента M к величине $P_{\text{уп}}$ добавляется слагаемое

$$\frac{1-\chi}{4} \frac{M}{D_{\text{ср.п}}}$$

Давление на прокладку

$$q = \frac{Q_0 + Q_t}{\pi D_{\text{ср.п}} b} \leq [q], \quad (33)$$

где $[q]$ — допускаемое давление на прокладку (см. табл. 4).

Температурное усилие

$$Q_t = \frac{(\alpha_\Phi t_\Phi - \alpha_\epsilon t_\epsilon) l_\epsilon}{\lambda_\epsilon + \lambda_\Phi + \lambda_n + \lambda_{\text{тр}}}, \quad (34)$$

где α_Φ , t_Φ и α_ϵ , t_ϵ — коэффициенты линейного расширения и температуры материала фланца и болтов соответственно.

Коэффициенты податливости в формуле (34) определяют из соотношений (25) — (27).

Разность температур болтов и фланца обычно составляет $10-15^\circ \text{C}$ при температуре среды $300-400^\circ \text{C}$ и $15-20^\circ \text{C}$ при температуре среды $400-500^\circ \text{C}$.

Разность температур в момент прогрева следует принимать в 3—4 раза большей.

Расчет на прочность фланцевых болтов. Суммарное усилие, действующее на фланцевые болты в рабочих условиях,

$$Q_\epsilon = Q_0 + Q_t + \chi P. \quad (35)$$

Усилие при монтаже Q_0 должно удовлетворять условиям (30) — (33). Условие прочности фланцевых болтов

$$\sigma = \frac{4Q_\epsilon}{\pi d_f^2} \leq (0,6 \div 0,9) \sigma_T. \quad (36)$$

При воздействии высокой температуры расчет проводят на длительную прочность.

Запас длительной прочности в болте определяют из равенства

$$n_{\text{дл}} = \frac{\sigma_{\text{в дл}}}{\sigma}, \quad (37)$$

где $\sigma_{\text{в дл}}$ — предел длительной прочности материала болта при рабочей температуре за время работы конструкции; $n_{\text{дл}} = 1,5 \div 2,5$.

При различных режимах работы конструкции определение запаса указано в гл. 2.

Прочность фланцевых болтов должна быть проверена при гидравлических испытаниях и для режима прогрева.

Напряжение в болтах при гидравлической опрессовке

$$\sigma = \frac{4(Q_0 + \chi P_{\text{проб}})}{\pi d_f^2} \leq (0,6 \div 0,9) \sigma_T. \quad (38)$$

Напряжение в болтах при прогреве определяют по формуле (36), причем значение Q_t соответствует нестационарному температурному режиму. Принимают, что σ_T соответствует максимальной температуре.¹

Расчет на прочность фланцев. Напряжения изгиба в трубе в месте присоединения к фланцу (сечение AB на рис. 10) определяют по формуле (5)*

В самом фланце возникают окружные напряжения (см. гл. 19)

$$\sigma_{\text{окр}} = E \frac{\varphi y}{r}, \quad (39)$$

¹ При высокой температуре и большей длительности работы предел длительной прочности часто меньше предела текучести при той же температуре.

* В приближенных расчетах часто принимают $l_1 \approx \frac{1}{2} (D_\epsilon - D_1)$.

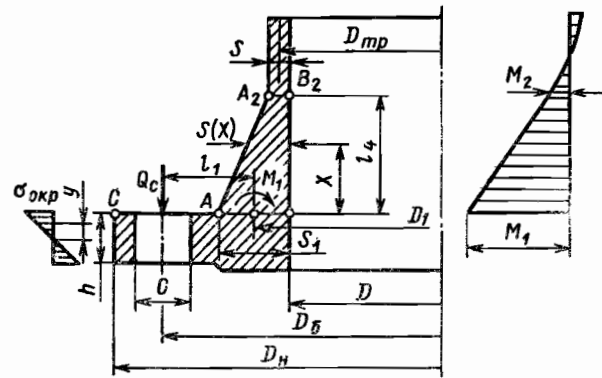


Рис. 19. Напряжения во фланце

где φ — угол поворота фланца; y и r — радиальная и осевая координаты рассматриваемой точки.

Угол поворота фланца (см. гл. 19)

$$\varphi = \frac{Q_c l_1}{2\pi} - \frac{1}{2} D_н M_1 \cdot \frac{E h^3}{12 \ln \frac{D_н}{D}}$$

Учитывая равенство (3), находим

$$\varphi = \frac{Q_c l_1}{2\pi} \frac{1 - \eta}{E h^3 \ln \frac{D_н}{D}}$$

В удовлетворительно работающих фланцевых соединениях

$$\varphi \leq \frac{3^\circ}{4} \quad (\varphi < 0,013).$$

В точке B (см. рис. 10) в двух взаимно перпендикулярных площадках действуют сжимающее напряжение $\sigma_и$ и растягивающее напряжение $\sigma_{окр}$.

Наибольшее окружное напряжение во фланцах будет в точке B

$$\sigma_{окр} = 0,83 \frac{Q_c l_1 (1 - \eta)}{D h^2 \lg \frac{D_н}{D}} \quad (40)$$

Приведенное напряжение

$$\sigma_{пр} = \sqrt{\sigma_и^2 + \sigma_{окр}^2} + \sigma_и \sigma_{окр} < 0,8 \sigma_в \quad (41)$$

где $\sigma_в$ — предел прочности материала с учетом температуры и длительности работы

В равенстве (41) напряжения $\sigma_и$ и $\sigma_{окр}$ вычисляются по формулам (38) и (40).

Условие (41) обеспечивает запас по напряжениям

$$n = \frac{\sigma_в}{\sigma_{пр}} > 1,25. \quad (42)$$

При большой конусности трубы $> 1:2$ и в трубах больших диаметров может оказаться опасным сечение в месте перехода от цилиндрической части к конической.

Изгибающий момент в сечении x (см. гл. 24)

$$M(x) = M_1 e^{-\beta x} \cos \beta x, \quad (43)$$

где коэффициент

$$\beta = \frac{1,28}{\sqrt{s_{ср} r_{тр}}}, \quad (44)$$

здесь координату x см. на рис. 10; $s_{ср} = \frac{1}{2}(s_1 + s)$ — средняя толщина конического участка; $r_{тр}$ — средний радиус трубы.

Напряжения изгиба в сечении A_2B_2

$$\sigma_и = \frac{6M_2}{s^2} = \frac{6\eta Q_c l_1}{\pi D_н s^2} e^{-\beta l_1} \cos \beta l_1, \quad (45)$$

где l_1 — длина конической части трубы.

Окружное напряжение в этом сечении

$$\sigma_{окр} = p \frac{r_{тр}}{s}. \quad (46)$$

Прочность оценивают по уравнению (41). Если $\beta l_1 > 3,5$, то прочность сечения A_2B_2 обеспечивается, так как изгибающий момент быстро затухает.

Кроме определения запаса прочности по напряжениям, целесообразно рассчитывать запас по разрушающей нагрузке.

Разрушающее усилие при кратковременном действии внешних нагрузок (см. стр. 83)

$$Q_{разр} = \frac{\pi}{l_1} \frac{(2\sigma_в + \sigma_т)}{3} \left[\frac{h^2}{4} (D_н - D - 2c) + \frac{s_1^2}{4} D_н \right], \quad (47)$$

причем $\sigma_в$ и $\sigma_т$ определяют с учетом температуры.

Для длительного действия нагрузки

$$Q_{разр. дл} = Q_{разр} \frac{\sigma_в дл}{\sigma_в}, \quad (48)$$

где $\sigma_в дл$ и $\sigma_в$ — пределы длительной и кратковременной прочности материала фланца при рабочей температуре.

Запас прочности фланца по разрушающей нагрузке

$$n_{разр} = \frac{Q_{разр. дл}}{Q_c}, \quad (49)$$

где Q_c — осевая нагрузка на фланец в рабочих условиях (суммарная нагрузка на болты).

Запас по разрушающей нагрузке в удовлетворительно работающих соединениях $n_{разр} > 2$.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ФЛАНЦА И ТРУБЫ¹

Расчетная схема соединения с неконтактирующими фланцами. Рассмотрим упрощенную схему фланцевого соединения (рис. 11). Трубу заменяем цилиндрической оболочкой постоянной толщины, фланец рассматриваем как кольцо (см. гл. 19).²

¹ Здесь приведено обоснование расчетных зависимостей, используемых при расчете на прочность фланцевых соединений.

² В гл. 19 указаны области применения теории колец вместо более сложной теории круглых пластинок.

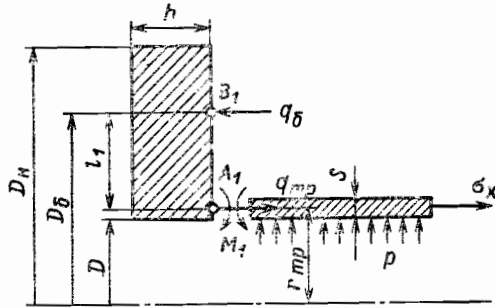


Рис. 11. Расчетная схема соединения с неконтактирующими фланцами

Такую расчетную схему можно использовать для фланцевых соединений с неконтактирующими фланцами. Кольцо считаем жестким в радиальном направлении, влиянием перерезывающих усилий в месте соединения фланца и трубы пренебрегаем.

Коэффициент η . Незвестный (распределенный) момент M_1 находят из условия равенства угла поворота фланца и трубы в месте сопряжения (рис. 12).

Используя решения для длинной цилиндрической оболочки (см. гл. 24), найдем угол поворота оболочки от действия изгибающего момента M_1 (при $\mu = 0,3$):

$$\varphi_{M_1} = \frac{M_1}{2\beta D} = \frac{M_1}{2 \frac{1,28}{\sqrt{r_{тр} s}} \frac{E s^3}{12 \cdot 0,91}} = 4,25 \frac{M_1 \sqrt{r_{тр} s}}{E s^3}. \quad (50)$$

Угол поворота от действия давления возникает потому, что радиальному перемещению стенок трубы

$$u = \frac{\sigma_{окр} r_{тр}}{E} = \frac{p r_{тр}^2}{E s} \quad (51)$$

препятствует кольцо.

Угол поворота (см. гл. 24)

$$\varphi_p = \beta \frac{p r_{тр}^2}{E s} = \frac{1,28}{\sqrt{r_{тр} s}} \frac{p r_{тр}^2}{E s}.$$

Если учесть, что вследствие действия осевых напряжений

$$\sigma_x = \frac{p r_{тр}}{2s}$$

радиальное перемещение оболочки

$$u = -\frac{\nu \sigma_x r_{тр}}{E},$$

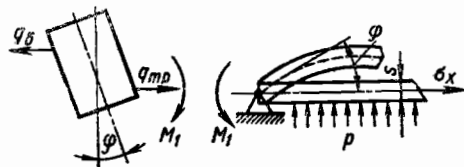


Рис. 12. Условие совместности деформаций фланца и трубы

то суммарный угол поворота

$$\varphi_p + \sigma_x = \frac{1,28}{\sqrt{r_{тр} s}} \frac{p r_{тр}^2}{E s} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = 1,03 \frac{p r_{тр}^2}{E s \sqrt{r_{тр} s}}. \quad (52)$$

Угол поворота кольца от действия распределенного усилия по окружности болтов (см. гл. 19)

$$\varphi_{q_б} = \frac{M}{\frac{E h^3}{12} \ln \frac{D_н}{D}} = \frac{q_б r_б^2 - q_{тр} r_{тр}^2}{\frac{E h^3}{12} \ln \frac{D_н}{D}} = \frac{Q_c l_1}{2\pi \frac{E h^3}{12} \ln \frac{D_н}{D}}, \quad (53)$$

где $l_1 = r_б - r_{тр} = \frac{1}{2} (D_б - D_{тр})$ — плечо осевой силы.

Угол поворота кольца от действия распределенного момента

$$\varphi_{M_1} = \frac{r_{тр} M_1}{\frac{E h^3}{12} \ln \frac{D_н}{D}}. \quad (54)$$

Приравнявая углы поворота фланца и трубы:

$$\varphi_{q_б} + \varphi_{M_1}^{(ф)} = \varphi_{M_1}^{(тр)} + \varphi_p + \sigma_x,$$

находим

$$M_1 = \frac{\frac{Q_c l_1}{2\pi \frac{E h^3}{12} \ln \frac{D_н}{D}} - 1,03 \frac{p r_{тр}^2}{E s \sqrt{r_{тр} s}}}{4,25 \frac{\sqrt{r_{тр} s}}{E s^3} + \frac{r_{тр}}{\frac{E h^3}{12} \ln \frac{D_н}{D}}}. \quad (55)$$

Второй член в числителе формулы (55) выражает действие внутреннего давления. Оно уменьшает изгибающий момент M_1 , что идет в запас прочности; этим членом можно пренебречь.

Теперь представим равенство (55) в виде

$$M_1 = \eta \frac{Q_c l_1}{2\pi r_{тр}}, \quad (56)$$

где

$$\eta = \frac{1}{1 + 0,82 \left(\frac{h}{s}\right)^3 \sqrt{\frac{s}{r_{тр}} \lg \frac{D_н}{D}}}. \quad (57)$$

Коэффициент податливости фланца при действии осевой нагрузки. На фланец действует суммарное осевое усилие Q_c , вызывающее смещение точки B_1 относительно A_1 на величину Δ (см. рис. 11).

Коэффициент податливости и угол поворота фланца будут

$$\lambda = \frac{\Delta}{Q_c} = \frac{\varphi l_1}{Q_c}, \quad (58)$$

$$\varphi = \frac{q_б r_б^2 - q_{тр} r_{тр}^2 - M_1 r_{тр}}{\frac{E h^3}{12} \ln \frac{D_н}{D}} = \frac{Q_c l_1 (1 - \eta)}{2\pi \frac{E h^3}{12} \ln \frac{D_н}{D}}. \quad (59)$$

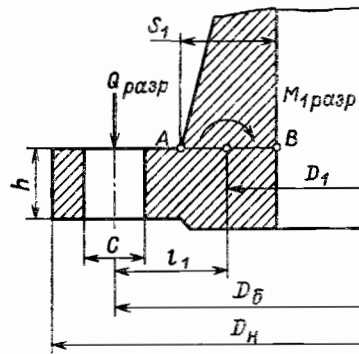


Рис. 13. К определению разрушающей нагрузки

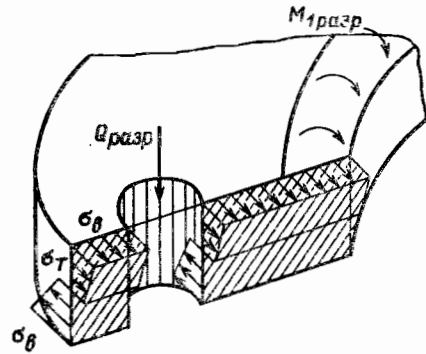


Рис. 14. Распределение напряжений во фланце при разрушающей нагрузке

Внося значение φ в равенство (58), получим

$$\lambda = \frac{l_1^2 (1 - \eta)}{\frac{2\pi}{12} E h^3 \cdot 2,30 \lg \frac{D_n}{D}} = 0,83 \frac{l_1^2 (1 - \eta)}{E h^3 \lg \frac{D_n}{D}} \quad (60)$$

Коэффициент податливости фланца при действии внутреннего давления. Из формулы (55) при $Q_c = 0$

$$M_1 = -p \frac{\pi D_{тр}^2}{4} 0,077 \frac{s}{r_{тр}} (1 - \eta) \quad (61)$$

Уменьшение расстояния по оси болтов

$$\Delta = \varphi l_1 = \frac{M_1 r_{тр} l_1}{E h^3 \ln \frac{D_n}{D}} \quad (62)$$

Коэффициент податливости, отнесенный к величине P ,

$$\lambda^* = \frac{\Delta}{P} = \frac{D_{тр}^2}{D_n^2} 0,4 (1 - \eta) \frac{s l_1}{E h^3 \lg \frac{D_n}{D}} \quad (63)$$

Разрушающая нагрузка. При определении разрушающей нагрузки фланец рассматривают как кольцо прямоугольного сечения с учетом ослаблений от отверстий (рис. 13).

Предполагается, что в поперечном сечении кольца и в сечении AB одновременно возникает предельное распределение напряжений (см. гл. 17).

Предельный изгибающий момент в поперечном сечении кольца (рис. 14)

$$M = \left(\frac{D_n - D}{2} - c \right) \left[\sigma_t \frac{h^2}{4} + (\sigma_b - \sigma_t) \frac{h^2}{6} \right] = \left(\frac{D_n - D}{2} - c \right) \frac{h^2}{4} \frac{(2\sigma_b + \sigma_t)}{3} \quad (64)$$

где c — диаметр отверстия под болт; σ_b и σ_t — пределы прочности и текучести материала фланца.

Предельный изгибающий момент в сечении AB трубы (на единицу длины)¹

$$M_{1разр} = \frac{\sigma_t s_1^2}{4} + \frac{(\sigma_b - \sigma_t) s_1^2}{6} = \frac{s_1^2}{4} \frac{2\sigma_b + \sigma_t}{3} \quad (65)$$

Из условия равновесия

$$M = \frac{Q_{разр} l_1}{2\pi} - \frac{1}{2} D_1 M_{1разр} \quad (66)$$

Из равенств (64) и (65) получаем формулу для разрушающего усилия при поворотной деформации фланца:

$$Q_{разр} = \frac{\pi}{l_1} \frac{2\sigma_b + \sigma_t}{3} \left[\frac{h^2}{4} (D_n - D - 2c) + \frac{s_1^2}{4} D_1 \right] \quad (67)$$

Расчетная схема для соединения с контактирующими фланцами. В приближенном расчете фланцевого соединения с контактирующими фланцами предполагают, что на окружности болтов имеется заделка фланцев (рис. 15). Фланец следует считать кольцевой пластинкой, но при наличии заделки и при $\frac{D}{D_n} > 0,5$ можно пренебречь влиянием кольцевых напряжений и рассматривать фланец как стержень-полоску.

Изгибающий момент. Угол поворота фланца в сечении на расстоянии l_1 от заделки под действием усилия P и момента M_1

$$\varphi = \frac{P l_1^2}{2EJ} - \frac{2\pi r_{тр} M_1 l_1}{EJ} \quad (68)$$

где момент инерции сечения

$$J = \frac{(\pi D_6 - zc) h^3}{12} \quad (69)$$

В равенствах (68), (69) $P = \frac{\pi D_n^2}{4} p$ — внешнее осевое усилие, действующее на фланцевое соединение; M_1 — изгибающий момент на единицу длины средней окружности трубы; z — число болтов.

Угол поворота цилиндрической оболочки определяют из формул (50) и (52)

$$\varphi = 4,25 \frac{M_1 \sqrt{r_{тр} s}}{E s^3} + 1,03 \frac{p r_{тр}^2}{E s \sqrt{r_{тр} s}} \quad (70)$$

Приравняв выражения (68) и (70), находим

$$M_1 = \frac{\frac{P l_1^2}{2EJ} - 1,03 \frac{p r_{тр}^2}{E s \sqrt{r_{тр} s}}}{\frac{2\pi r_{тр} l_1}{EJ} + 4,25 \frac{\sqrt{r_{тр} s}}{E s^3}} \quad (71)$$

¹ При более точном выводе следует рассмотреть возможность образования пластического шарнира в других сечениях конического участка трубы и учесть влияние растягивающего усилия в сечении.

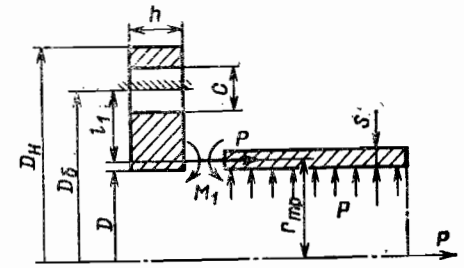


Рис. 15. Расчетная схема фланцевого соединения с контактирующими фланцами

В приближенных расчетах, пренебрегая влиянием внутреннего давления в трубе на изменения угла поворота, получим

$$M_1 = \frac{Pl_1}{\pi D_{тр}} \frac{1}{2 + \lambda}, \quad (72)$$

где

$$\lambda = 0,72 \frac{\sqrt{r_{тр} s}}{l} \left(\frac{h}{s} \right)^3 \frac{(\pi D_6 - zc)}{\pi D_{тр}}. \quad (73)$$

Напряжения изгиба в стенке трубы

$$\sigma_{и} = \frac{6M_1}{s^2}. \quad (74)$$

Изгибающий момент в заделанном сечении фланца

$$M = Pl_1 - \pi D_{тр} M_1 = Pl_1 \frac{1 + \lambda}{2 + \lambda} = \eta Pl_1, \quad (75)$$

где

$$\eta = \frac{1 + \lambda}{2 + \lambda}. \quad (76)$$

Напряжения изгиба во фланце

$$\sigma_{и} = \frac{6\eta Pl_1}{(\pi D_6 - zc) h^2}. \quad (77)$$

Разрушающее усилие. Предельное значение изгибающего момента в заделанном сечении фланца

$$M_{разр} = (\pi D_6 - zc) \frac{2\sigma_{в} + \sigma_{т}}{3} \frac{h^2}{4}. \quad (78)$$

Предельное значение изгибающего момента в трубе

$$M_{тр разр} = \frac{2\sigma_{в} + \sigma_{т}}{3} \frac{s^2}{4}. \quad (79)$$

Из условия равновесия

$$M_{разр} = P_{разр} l_1 - \pi D_{тр} M_{тр разр}. \quad (80)$$

Учитывая равенства (78) и (79), найдем величину разрушающего осевого усилия

$$P_{разр} = \frac{1}{l_1} \frac{2\sigma_{в} + \sigma_{т}}{3} \left[(\pi D_6 - zc) \frac{h^2}{4} + \pi D_{тр} \frac{s^2}{4} \right]. \quad (81)$$

ШПОНОЧНЫЕ И ШЛИЦЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

ШПОНОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

В машиностроении применяют *ненапряженные* соединения (с помощью призматических и сегментных шпонок (рис. 1) и *напряженные* соединения (с помощью клиновых шпонок). Шпопки этих типов стандартизованы, их размеры выбирают по стандартам СЭВ.

Основной недостаток соединений — отсутствие взаимозаменяемости и как следствие необходимость ручной пригонки или подбора.

Наибольшее применение имеют соединения с *призматическими* шпонками. Такие соединения в сравнении с напряженными более технологичны (легкий монтаж и демонтаж) и обеспечивают лучшее центрирование деталей¹. Призматические шпопки имеют прямоугольное сечение с отношением высоты к ширине от $\frac{h}{b} = 1$ (для валов малых диаметров) до $\frac{h}{b} = 0,5$ (для валов больших диаметров, табл. 1). Глубина врезания шпопки в вал составляет $t_1 \approx 0,6 h$.

1. Шпопки призматические обыкновенные (по СТ СЭВ 189—75)
Размеры, мм

Диаметр вала d	Ширина шпопки b	Высота шпопки h	Глубина паза на валу t_1	Длина шпопки l
От 6 до 8 Св. 8 » 10 » 10 » 12	2 3 4	2 3 4	1,2 1,8 2,5	От 6 до 20 » 6 » 36 » 8 » 45
» 12 » 17 » 17 » 22	5 6	5 6	3 3,5	» 10 » 56 » 14 » 70
» 22 » 30 » 30 » 38 » 38 » 44	8 10 12	7 8 8	4 5	» 18 » 90 » 22 » 110 » 28 » 140
» 44 » 50 » 50 » 58 » 58 » 65	14 16 18	9 10 11	5,5 6 7	» 36 » 160 » 45 » 180 » 50 » 200
» 65 » 75 » 75 » 85 » 85 » 95	20 22 25	12 14 14	7,5 9	» 56 » 220 » 63 » 250 » 70 » 280
» 95 » 110 » 110 » 130	28 32	16 18	10 11	» 80 » 320 » 90 » 360
» 130 » 150 » 150 » 170 » 170 » 200	36 40 45	20 22 25	12 13 15	» 100 » 400 » 100 » 400 » 110 » 450

Рабочими у призматических шпонок являются боковые узкие грани. В радиальном направлении предусмотрен зазор. В ответственных шпоночных соединениях сопряжения дна паза с боковыми сторонами выполняются по радиусу (см. СТ СЭВ 189—75). Материал шпонок — чистотянутая сталь с пределом прочности $\sigma_{в} \geq 60$ кгс/мм².

¹ Во многих случаях посадку деталей на вал осуществляют с натягом.

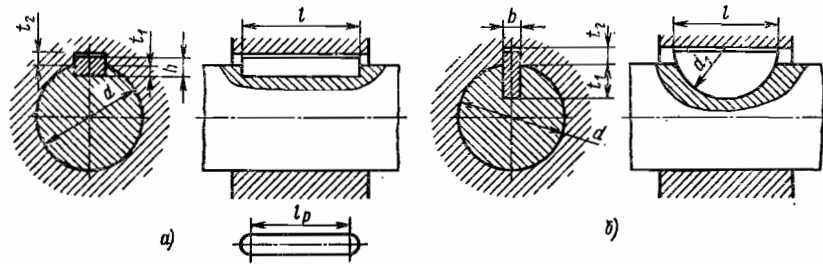


Рис. 1. Основные типы шпоночных соединений:
а — с призматической шпонкой; б — с сегментной шпонкой

Основным для соединений с призматическими шпонками является условный расчет на смятие (упруго-пластическое сжатие в зоне контакта).

Если принять для упрощения, что нормальные напряжения (давления) в зоне контакта распределены равномерно и плечо главного вектора давлений равно $0,5d$ (где d — диаметр вала), то

$$\sigma_{см} = \frac{2M_k}{d l_p t_2} \leq [\sigma]_{см} \quad (1)$$

где l_p — рабочая длина шпонки; $t_2 = 0,4h$ — глубина врезания шпонки в ступицу, $[\sigma]_{см}$ — допускаемое напряжение на смятие.

По формуле (1) обычно проверяют напряжения в зоне контакта или вычисляют предельный крутящий момент.

При необходимости по формуле (1) можно вычислить длину шпонки, однако обычно ее принимают в соответствии с длиной ступицы.

Проверку прочности шпонок на срез обычно не производят, так как это условие удовлетворяется при использовании стандартных сечений шпонок и рекомендуемых значений $[\sigma]_{см}$.

Если условие (1) не выполняется, то в конструкции можно применить две шпонки, установив их под углом 120° или 180° .

Сегментные шпонки благодаря более глубокой посадке практически не имеют перекоса под нагрузкой, они взаимозаменяемы. Однако глубокий паз ослабляет вал, и сегментные шпонки используют преимущественно для закрепления деталей на концах валов (или в других малонагруженных участках вала).

Расчет соединений с сегментными шпонками также производят по формуле (1), принимая $t_2 = h - t_1$ (см. рис. 1, б).

Допускаемые напряжения в неподвижных шпоночных соединениях

$$[\sigma]_{см} = \frac{\sigma_T}{n},$$

где σ_T — предел текучести наиболее слабого материала детали (вала, шпонки или ступицы); n — коэффициент безопасности; при точном учете нагрузок $n = 1,25$, в остальных случаях $n = 1,5 \div 2,0$.

Если шпонки изготовлены из чистой стали (ГОСТ 8787—68), то принимают $[\sigma]_{см} = 8 \div 15$ кгс/мм² (меньшие значения — для ступиц из чугуна и алюминиевых сплавов).

В редукторостроении для шпонок из стали 45 принимают (см. [2] к гл. 6):

$[\sigma]_{см} = 5 \div 7$ кгс/мм² — при непрерывном использовании редукторов с полной нагрузкой;

$[\sigma]_{см} = 13 \div 18$ кгс/мм² — при среднем режиме использования редукторов;

$[\sigma]_{см} = 26$ кгс/мм² — при предельных статических перегрузках.

В подъемно-транспортном машиностроении $[\sigma]_{см}$ принимают по данным табл. 2.

2. Допускаемые напряжения смятия $[\sigma]_{см}$ в кгс/мм² для шпоночных соединений в подъемно-транспортном машиностроении

Соединение	Материал	Нагрузка								
		постоянная			реверсивная			ударная		
		Режим								
		I	II	III	I	II	III	I	II	III
Неподвижное	Сталь	18	16,5	15	12	11	10	6	5,5	5
	Чугун	10	9	8	6,5	6	5,4	3,3	3	2,7
Подвижное	Сталь	6	5,5	5	5	4,5	4	3,6	3,3	3

Примечания: 1. Допускаемые напряжения выбирают по материалу наименее прочной детали (ступицы, вала, шпонки).
2. Режимы: I — легкий; II — средний; III — тяжелый, весьма тяжелый или непрерывный режим.

Для ступиц из текстолита и древеснослоистых пластиков $[\sigma]_{см} = 2$ кгс/мм². Если шпонки используют в качестве направляющих при осевом перемещении деталей под нагрузкой (подвижные шпоночные соединения), то допускаемые контактные давления в соединении ограничивают во избежание заедания и уменьшения износа. При незакаленных поверхностях и малой скорости перемещения принимают $[\sigma]_{см} = 1,0 \div 3,0$ кгс/мм².

Применение шпоночных соединений для быстровращающихся динамически нагруженных валов ответственного назначения не рекомендуется.

ШЛИЦЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Шлицевые соединения имеют преимущества перед шпоночными благодаря более высокой несущей способности при постоянных и переменных нагрузках. Их применяют для неподвижного и подвижного соединения валов со ступицами деталей. Они имеют меньшие радиальные габариты и обеспечивают хорошее центрирование по сравнению со шпоночными соединениями.

По форме поперечного сечения различают три основных типа соединений.

Соединения с *прямоугольными зубьями* наиболее распространены в машиностроении. Их можно центрировать по боковым граням шлицев, по наружному или внутреннему диаметру вала (рис. 2). Первый способ применяют при числе зубьев $z = 10, 16$ и наружном диаметре $D \leq 90$ мм для передачи больших крутящих моментов и при отсутствии высоких требований к точности центрирования деталей.

При высоких требованиях к соосности вала и ступицы детали центрируют по наружному диаметру вала (если зубья в ступице получают протягиванием) или по внутреннему диаметру вала. Нагрузочная способность таких соединений ниже, чем при центрировании по боковым поверхностям зубьев из-за менее благоприятного распределения нагрузки между зубьями.

В зависимости от числа зубьев и их высоты СТ СЭВ 188—75 предусмотрены три серии соединений (легкая, средняя и тяжелая, см. табл. 3).

Соединения с *завальцованными зубьями*¹ (рис. 3) более технологичны, нежели соединения с прямоугольными шлицами, имеют более высокую прочность (благодаря большому числу зубьев и скругления впадин) и точность. Они могут центрироваться по боковым граням (наиболее распространенный способ, рис. 3, а) и по наружному диаметру вала, рис. 3, б. Основные размеры шлицевых соединений даны в табл. 4.

¹ Исходный контур и форма зубьев по СТ СЭВ 268—76.

3. Основные геометрические параметры прямобочных соединений (по СТ СЭВ 188—75) и расчетные коэффициенты

d, мм	Легкая серия					Средняя серия					Тяжелая серия							
	D		b	z	S _{см'} , мм ²	α _τ	D		b	z	S _{см'} , мм ²	α _τ	D		b	z	S _{см'} , мм ²	α _τ
	мм						мм						мм					
11	—	—	—	—	—	14	3	—	—	0,25	1,90	—	—	—	—	—	—	
13	—	—	—	—	—	16	3,5	—	—	0,29	1,98	—	—	—	—	—	—	
16	—	—	—	—	—	20	4	—	—	0,56	2,06	—	—	20	2,5	10	0,94	2,08
18	—	—	—	—	—	22	5	—	—	0,63	—	—	—	23	3	10	1,46	—
21	—	—	—	—	—	25	5	—	—	0,72	—	—	—	26	3	10	1,69	2,17
23	26	6	6	0,5	2,21	28	6	6	—	1,08	—	—	—	29	4	10	2,34	—
26	30	6	6	0,9	2,31	32	6	6	—	1,44	—	—	—	32	4	10	2,4	2,69
28	32	7	6	0,94	2,33	34	7	—	—	1,54	—	—	—	35	4	10	3,2	—
32	36	6	—	1,22	—	38	6	—	—	2,31	2,19	—	—	40	5	10	4,3	2,25
36	40	7	—	1,38	2,18	42	7	—	—	2,55	—	—	—	45	5	10	5,6	2,22
42	46	8	—	1,58	2,23	48	8	—	—	3	2,34	—	—	52	6	10	7,4	2,31
46	50	9	—	1,75	2,25	54	9	—	—	4,5	—	—	—	56	7	10	8,2	—
52	58	10	8	3,37	2,1	60	10	8	—	5,03	2,17	—	—	60	5	16	10	2,06
56	62	10	—	3,53	—	65	10	—	—	6,4	—	—	—	65	5	16	12,9	—
62	68	12	—	3,90	2,16	72	12	—	—	7,9	2,29	—	—	72	6	16	16,2	—
72	78	12	—	5,63	—	82	12	—	—	11,5	—	—	—	82	7	16	18,6	2,29
82	88	12	—	6,4	2,2	92	12	—	—	13,1	2,36	—	—	92	6	20	25,9	2,29
92	98	14	—	7,1	2,24	102	14	—	—	14,3	2,42	—	—	102	7	20	29,2	—
102	108	16	10	7,9	2,26	112	16	10	—	16,6	2,47	—	—	115	8	20	45	2,51
112	120	18	—	13	—	125	18	—	—	24,4	2,59	—	—	125	9	20	49	—

4. Основные геометрические параметры эвольвентных соединений (по СТ СЭВ 269—76)

Наружный диаметр D, мм	Число зубьев z при модуле m					Наружный диаметр D, мм	Число зубьев z при модуле m				
	0,8*	1	1,5	2*	2,5		2*	2,5	3,0	5*	10
20	23	18	12	8	6	65	31	24	20	15	—
22*	26	20	14	9	7	70	34	26	22	12	—
25	30	24	15	11	8	75	36	28	24	13	—
28*	34	26	17	12	10	80	38	30	25	14	6
30	36	28	18	13	10	85	41	32	27	15	7
32*	38	30	20	14	11	90	44	34	28	16	7
35	42	34	22	16	12	95	46	36	30	18	8
38*	46	36	24	18	14	100	48	38	32	18	8
40	48	38	25	18	14	110	54	42	35	20	9
42*	51	40	26	20	15	120	58	46	38	22	10
45	55	44	28	21	16	130	64	50	42	24	11
50	50	48	32	24	18	140	68	54	45	26	12
55	66	54	35	26	20	150	74	58	48	28	13
60	74	58	38	28	22	160	—	—	52	30	14

Примечания: 1. При выборе наружного (номинального) диаметра и модуля предпочтительны значения, не отмеченные звездочкой.
2. Числа зубьев, заключенные в рамки, являются предпочтительными.

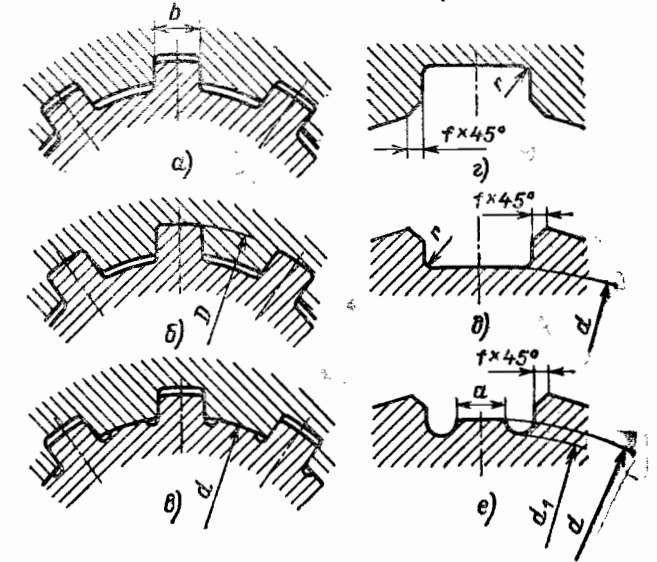


Рис. 2. Способы центрирования прямобочных соединений:
а — по боковым поверхностям; б — по наружному диаметру; в — по внутреннему диаметру; г — форма сечения ступицы; д, е — форма сечения вала соответственно для исполнений б и в

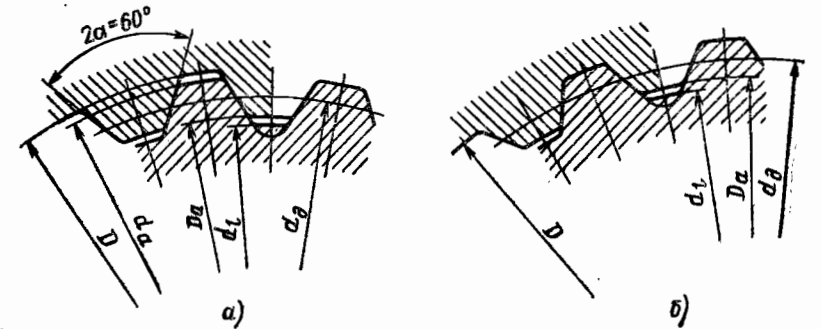


Рис. 3. Эвольвентные соединения

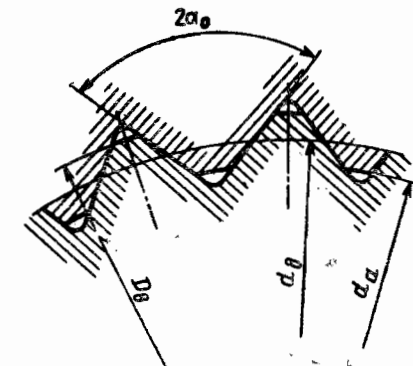


Рис. 4. Соединение с треугольными зубьями

Соединения с прямобочными и эвольвентными зубьями широко применяют также для направления осевого передвижения деталей, посаженных на вал (например, зубчатых колес в коробках передач). В этом случае твердость поверхности зубьев повышают до HRC 54...60 для уменьшения их износа.

Для неподвижной в осевом направлении посадки на валы дисков турбин, для посадки на валы передвижных косозубых колес используют соединения с *винтовыми зубьями*, которые уменьшают относительное скольжение диска на валу под нагрузкой и снижают износ.

Соединения с *треугольными зубьями* (рис. 4) применяют при стесненных радиальных габаритах конструкции.

Для *быстроходных передач* (авиационные и автомобильные коробки передач) *точность центрирования* зубчатых соединений *недостаточна*. Для повышения точности центрирование осуществляют по вспомогательным поверхностям (см. стр. 95) либо отказываются от применения соединений (колеса изготавливают за одно целое с валом).

РАСЧЕТ ШЛИЦЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА ПРОЧНОСТЬ

Шлицевые соединения подобно резьбовым характеризуются неравномерным распределением нагрузки по длине. В отличие от соединения типа стяжки (см. рис. 16 гл. 3), детали которого работают на растяжение, в соосном зубчатом соединении вал и охватывающая деталь *скручиваются*. Поэтому закон распределения нагрузки в соединении, когда крутящие моменты приложены к втулке и валу с разных сторон (рис. 5), будет таким же, как и для соединения типа стяжки. На рис. 6 в качестве примера приведено экспериментальное распределение относительного крутящего момента на валу $m^*(z) = m(z)/m_{cp}$ (здесь $m(z) = dM(z)/dz$, $m_{cp} = M/l$) по длине соединения карданной передачи автомобиля.

Соотношение для $m(z)$ имеет структуру, аналогичную формуле для распределения нагрузки между витками резьбы.

Неравномерность распределения нагрузки оказывает существенное влияние на работоспособность соединений и учитывается в расчетах.*

Шлицевые соединения выходят из строя главным образом из-за повреждения рабочих поверхностей (износ, смятие), а также усталостного разрушения зубьев и тонкостенных валов, которому обычно предшествует контактная коррозия (фреттинг-коррозия).

Расчет шлицевых соединений включает: 1) расчет шлицевых валов на кручение при действии статических и переменных крутящих моментов; (см. гл. 8); 2) расчет зубьев.

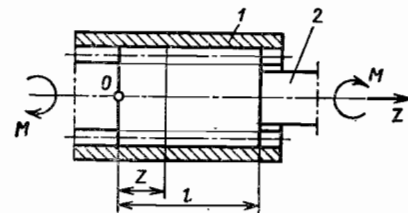


Рис. 5. Схема шлицевого соединения:
1 — вал; 2 — втулка

* Для снижения концентрации напряжений на краях соединения, особенно в условиях перекоса, применяют бочкообразные шлицы.

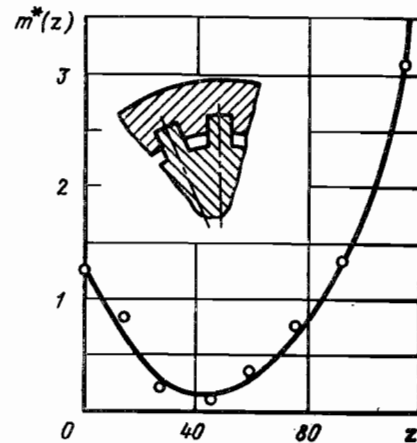


Рис. 6. Распределение относительного крутящего момента по длине соединения

В отечественной и зарубежной практике в основу расчета зубьев положено определение напряжений смятия (средних контактных давлений). Напряжения изгиба и среза в основании зуба пропорциональны напряжениям смятия, и последние можно рассматривать как критерий подобия, обобщающий опыт эксплуатации конструкций.

Расчет ведут по формуле

$$\sigma_{см} = \frac{2M_K}{d_{cp} z h l \psi} \leq [\sigma]_{см} \quad (2)$$

где d_{cp} — средний диаметр соединений; z — число зубьев; h и l — соответственно высота и длина поверхности контакта зубьев; ψ — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения давлений в соединении, обычно принимают $\psi = 0,7 \div 0,8$; $[\sigma]_{см}$ — допускаемое напряжение смятия на боковых поверхностях зубьев. В табл. 5 даны $[\sigma]_{см}$ для соединений подъемно-транспортных устройств. Допускаемые напряжения в станкостроении более низкие: для неподвижных соединений $[\sigma]_{см} = 120 \div 200$ кгс/см²; для подвижных без нагрузки — $[\sigma]_{см} = 40 \div 70$ кгс/см² и для соединений подвижных под нагрузкой $[\sigma]_{см} \leq 20$ кгс/см².

5. Допускаемые напряжения смятия для шлицевых соединений в изделиях подъемно-транспортного машиностроения (валы и втулки с $\sigma_B > 50$ кгс/мм²)

Тип соединения	Условия эксплуатации	Поверхность зубьев	
		без термообработки	с термообработкой
		[$\sigma_{см}$], кгс/см ²	
Обычное (с осевой фиксацией)	а	350—500	400—700
	б	600—1000	1000—1400
	в	800—1200	1200—2000
Подвижное без нагрузки	а	150—200	200—350
	б	200—300	300—600
	в	250—400	400—700

Примечания: 1 В таблице: а — условия эксплуатации тяжелые: нагрузка знакопеременная с ударами в обоих направлениях; значительные углы перекоса; смазка отсутствует; б — условия эксплуатации средние (переменная нагрузка не более 10% от постоянной; угол перекоса осей под нагрузкой не более 10'; смазка бедная); в — условия эксплуатации хорошие (статическая нагрузка; переменная нагрузка не выше 5% от статической; угол перекоса осей не более 5—7'; смазка хорошая).

2. Допускаемые напряжения для подвижных соединений под нагрузкой ниже, чем для подвижных соединений в 4—5 раз.

Средние напряжения смятия (при $\psi = 1$) для некоторых соединений приведены в табл. 6.

Высота и длина поверхности контакта:

а) для прямобочных зубьев (см. рис. 2)

$$h = \frac{D-d}{2} - 2f; \quad d_{cp} = \frac{D+d}{2};$$

б) для эвольвентных зубьев (см. рис. 3)

$$h = 6m; \quad d_{cp} = d_d = mz,$$

здесь $6 = 1$ при центрировании по боковым поверхностям и $\theta = 0,9$ — при центрировании по наружному диаметру; m — модуль шлицев; d_d — диаметр делительной окружности;

6. Средние напряжения смятия $\sigma_{см}$ (при $\psi = 1$) в длительно работающих соединениях

Соединение	Тип соединения	HRC вала втулки	$\sigma_{см}$, кгс/см ²
Трансмиссии грузовых и легковых автомобилей			
Ведомый диск сцепления — первичный вал коробки передач	Прямобочное	45—60	120—180
Вторичный вал коробки передач — зубчатое колесо 1-й передачи		До 30	300—600
Вторичный вал коробки передач — фланец карданного вала		До 65	430—830
Подвижные соединения карданных валов		48—55	140—194
Полуось — полуосевая втулка	Эвольвентное	До 30	1100—1600
Зубчатые муфты коробок передач		До 64	270—700
		До 65	
		50—65	
Коробки приводов авиационных двигателей			
Валы и зубчатые колеса	Эвольвентное	35—42	500—1000
Торсионные рессоры		35—42	1000—1500

Примечания: 1. Средние напряжения в соединениях трансмиссии тракторов приблизительно такие же, как и в автомобилях.
2. В подвижном соединении карданного вала автомобиля марки БелАЗ-540 $\sigma_{см} = 450$ кгс/см².

в) для треугольных зубьев (см. рис. 4)

$$h = \frac{D_b - d_a}{2}; \quad d_{ср} = d_d = mz.$$

Предельный момент, передаваемый соединением,

$$M_{к. пр} = [\sigma]_{см} z h l \frac{d_{ср}}{2} \psi = S_{см} l [\sigma]_{см}, \quad (3)$$

где приведенный статический момент $S_{см} = z h l \frac{d_{ср}}{2} \psi$. Значения $S_{см}$ при $\psi = 0,75$ для прямобочных соединений приведены в табл. 3.

При действии переменных нагрузок нередки случаи разрушения деталей со шлицами (в особенности тонкостенных валов) от усталости из-за высокой концентрации напряжений.

В свободной (неконтактирующей) части шлицевого вала имеет место значительная концентрация касательных напряжений. Теоретический коэффициент концентрации касательных напряжений при кручении шлицевого вала

$$\alpha_{\tau} = \frac{\tau_{max}}{\tau_n},$$

где τ_{max} и τ_n — соответственно максимальное и номинальное напряжение в зубчатом валу при кручении; для сплошного вала

$$\tau_n = \frac{M_k}{W_k} \approx \frac{M_k}{0,2d^3}; \quad (4)$$

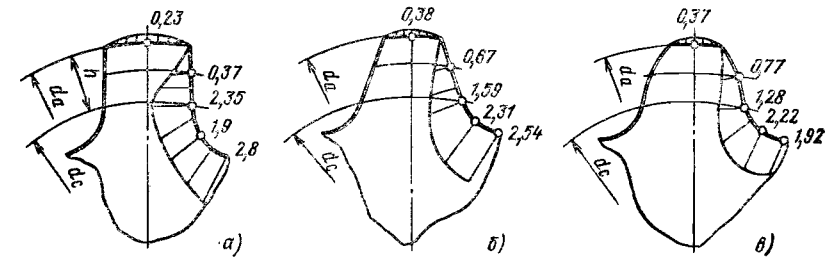


Рис. 7. Концентрация напряжений при кручении шлицевых валов: а — $\alpha = 0^\circ$; б — $\alpha = 32^\circ$; в — $\alpha = 30^\circ$

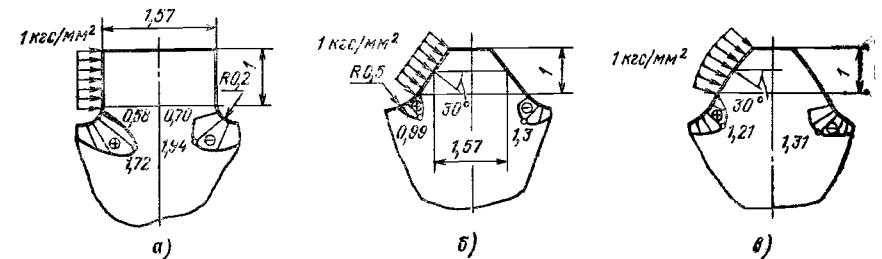


Рис. 8. Концентрация напряжений от изгиба зубьев

здесь W_k — момент сопротивления сечения вала кручению; d — внутренний диаметр зубчатого вала.

На рис. 7 показано изменение теоретического коэффициента концентрации напряжений по контуру шлицев прямобочного (рис. 7, а), треугольного (рис. 7, б) и эвольвентного (рис. 7, в) профиля с одинаковой высотой h и максимальными радиусами галтелей.

В расчетах на прочность учитывают максимальное значение α_{τ} , соответствующее наиболее нагруженной точке на контуре.

В контактирующей части вала касательные напряжения уменьшаются благодаря распределению крутящего момента по длине соединения. Однако в этой части вала появляются нормальные и касательные напряжения от изгиба и сдвига зубьев, наибольшие значения которых также концентрируются в основании шлицев. На рис. 8 показано изменение контурных (главных) напряжений в галтелях зубьев при контактом давлении $\sigma_{см} = 100$ кгс/см².

Максимальные нормальные напряжения в контактирующей части соединения оказываются обычно ниже касательных напряжений в свободной части шлицевого вала, поэтому разрушение шлицевых валов от усталости происходит, как правило, в неконтактирующей части¹.

В приближенных расчетах на усталостную прочность шлицевых валов учитывают лишь концентрацию напряжений от кручения. Значения теоретических коэффициентов концентрации напряжений при кручении прямобочных шлицевых валов приведены в табл. 3.

Для валов с эвольвентными зубьями

при z	11 — 14;	16 — 22;	24 — 36;	38 и св.
α_{τ}	1,55 — 1,62;	1,76 — 1,82;	1,86 — 1,92;	1,93 — 1,98

Большие значения α_{τ} соответствуют большим z .

¹ Если разрушение происходит в контактирующей части, то ему предшествует существенный износ шлицев.

ИЗНОС СОЕДИНЕНИЙ

Шлицевые соединения выходят из строя в основном из-за износа боковых (рабочих) поверхностей шлицев (зубьев). Износ наблюдается в шлицевых рессорах, передающих крутящий момент от одного агрегата к другому, в карданных валах, в соединениях валов и зубчатых колес и др.

Износ зубьев связан с практически неизбежными взаимными циклическими смещениями деталей соединения под действием радиальной нагрузки, в результате несопадения или взаимного наклона осей при действии крутящего момента. Начальный монтажный перекос может возрастать в работе за счет тепловых деформаций, изменения взаимного расположения деталей под нагрузкой и т. д.

Износ шлицевых соединений происходит более интенсивно при развитии на рабочих гранях контактной коррозии, которая появляется даже в соединениях с высокой твердостью рабочих поверхностей ($HRC\ 45-55$), и сравнительно невысоких средних контактных напряжениях $\sigma_{см} = 5\text{ кгс/мм}^2$.

Условный расчет на износостойкость можно производить по допускаемой удельной мощности трения (мощности трения, отнесенной к 1 мм^2 контактной поверхности шлицев).¹

Если принять, что ось шлицевого вала в результате монтажа или под нагрузкой получила перекос на угол $\Delta\varphi$ (рад) по отношению к оси охватывающей втулки (ступени колеса), то наибольшее взаимное смещение точек зубьев за один оборот составит

$$\Delta l = \Delta\varphi d_{ср} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{d_{ср}}\right)^2}, \quad (5)$$

где l и $d_{ср}$ — соответственно длина и средний диаметр соединения, мм.

Скорость относительного скольжения, мм/с

$$v_{ск} = \frac{\Delta\varphi n d_{ср}}{60} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{d_{ср}}\right)^2}, \quad (6)$$

a удельная мощность трения

$$N_1 = v_{ск} \mu \sigma_{см} = \frac{\Delta\varphi n d_{ср}}{60} \mu \sigma_{см} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{d_{ср}}\right)^2}, \quad (7)$$

где n — частота вращения шлицевого вала, об/мин; μ — коэффициент трения; $\sigma_{см}$ — среднее контактное давление в соединении при $\psi = 1$.

Обычно, в удовлетворительно работающих соединениях рессор при твердости поверхностей деталей $> 50HRC$, углах перекоса $\Delta\varphi \leq 7'$ ($\leq 0,002$ рад) и бедной смазке $N_1 \leq 15\text{ кгс}\cdot\text{мм}/(\text{мм}^2\cdot\text{с})$, а при обильной смазке $N_1 \leq 25\text{ кгс}\cdot\text{мм}/(\text{мм}^2\cdot\text{с})$.

Допустимый угол перекоса в шлицевых соединениях по условиям износостойкости

$$[\Delta\varphi] \leq \frac{60 [N_1]}{\mu \sigma_{см} n d_{ср} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{d_{ср}}\right)^2}}, \quad (8)$$

где $[N_1]$ — допускаемая мощность трения, $\text{кгс}\cdot\text{мм}/(\text{мм}^2\cdot\text{с})$. Можно принимать² $[N_1] = 0,3HRC$ при бедной смазке (масляный туман и др.) соединений; $[N_1] = 0,5HRC$ для соединений при обильной смазке.

Если затрачиваемая на трение мощность $N_1 \leq 0,1HRC$ при обильной смазке и $N_1 \leq 0,36HRC$ при бедной смазке, то износ в соединениях практически не наблюдается при неограниченно большом числе циклов нагружения.

¹ В ГОСТ 21425-75 рекомендуется более сложный метод расчета прямобочных шлицевых соединений.

² При неодинаковой твердости поверхностей сопрягаемых деталей расчет ведут для детали с меньшей твердостью поверхности.

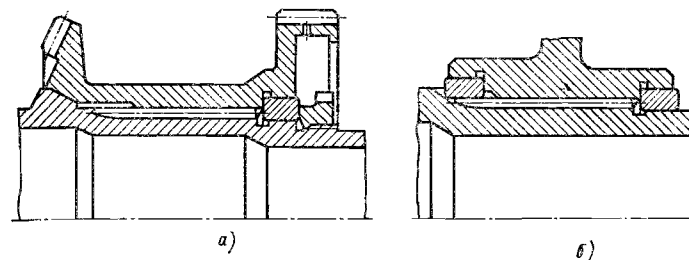


Рис. 9. Способы центрирования деталей в соединениях:

a — по конической и цилиндрической поверхностям; b — по цилиндрическим поверхностям с помощью втулок

Из соотношения (8) следует, что допустимый угол перекоса деталей в соединении может быть увеличен за счет снижения контактных давлений и коэффициента трения. Для снижения коэффициента трения применяют различные гальванические покрытия (никелевое, медное, серебряное, кадмиевое, окисное и др.). Толщина слоя металлических покрытий $6-15\text{ мкм}$. Для повышения износостойкости применяют также покрытия из сухих смазок на основе дисульфида молибдена и другие, зазоры заполняют термопластичными полимерами типа эпоксидных и фенольных смол.

Повышение износостойкости наблюдается при использовании твердых и жидких смазок (особенно в случае непрерывной подачи в зону контакта масла, стабилизирующего тепловой режим).

Эффективным оказывается также применение химико-термической и упрочняющей обработки для повышения износостойкости.

Азотированию подвергают шлицевые валы (рессоры) из сталей 38Х2МЮА, 38ХА, 40ХН2МА. Толщина азотированного слоя $0,1-0,3\text{ мм}$, твердость азотированной поверхности для стали 38Х2МЮА $HRC\ 58-61$ (в сердцевине $HRC\ 30-37$); валы из сталей 38ХА и 40ХН2МА имеют твердость поверхности $HRC\ 45$ и сердцевины $HRC\ 28-35$.

Валы из сталей 12Х2Н4А, 18Х2Н4МА и другие цементируют на глубину $0,2-0,7\text{ мм}$. Твердость поверхности шлицев $HRC\ 55-58$, твердость сердцевины $HRC\ 32-41$.

Валы и рессоры из сталей 12Х2Н4А, 12ХН3А, 18Х2Н4МА и другие иногда подвергают цианированию на глубину $0,2-0,4\text{ мм}$. Твердость поверхностного слоя $HRC\ 57-59$, а твердость сердцевины $HRC\ 32-41$.

Применяют также закалку поверхности до твердости $HRC\ 45-50$.

В последние годы для повышения износостойкости широко применяют виброшлифование и дробеструйное упрочнение шлицевых деталей (см. гл. 34). Диаметр шарика обычно $d_{ш} < 0,1r$ (r — радиус скругления во впадинах шлицев).

Основным методом оценки надежности шлицевых соединений являются ресурсные испытания в стендовых или эксплуатационных условиях. Ускоренные испытания можно проводить с заранее созданным перекосом.

Эффективными средствами повышения износостойкости соединений являются:

a) уменьшение углов перекоса осей сопрягаемых деталей при монтаже и в рабочих условиях (за счет неравномерного нагрева, деформации под нагрузкой и т. п.). Угол перекоса свыше $10'$ нежелателен для валов (рессор) с $d_{ср} = 10 \div 50\text{ мм}$. Для соединений, допускающих относительное проскальзывание, углы перекоса свыше $40'$ недопустимы.

b) увеличение твердости контактирующих поверхностей путем азотирования, цементации, обдувки дробью и др.;

$в$) уменьшение зазоров в шлицевом соединении, применение более плотных посадок, центрирование по вспомогательным поверхностям и затяжка соединений (рис. 9).

При проектировании соединений, воспринимающих радиальные нагрузки, зубья желательно располагать симметрично относительно венцов.

СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ
С ГАРАНТИРОВАННЫМ НАТЯГОМ

Соединение деталей машин с натягом осуществляют за счет сил упругости от предварительной деформации деталей.

С помощью натяга — разности посадочных размеров сопрягаемых деталей — можно соединять детали как с цилиндрическими (рис 1), так и с коническими поверхностями контакта.

Основное применение имеют цилиндрические соединения с натягом, называемые часто прессовыми. Эти соединения просты в изготовлении, обеспечивают хорошее центрирование сопрягаемых деталей, могут воспринимать значительные статические и динамические нагрузки (радиальные и осевые).

Основные недостатки соединений: сложность демонтажа, возможность повреждения посадочных поверхностей при разборке, ограниченность несущей способности, особенно при наличии вибраций, возникновение фреттинг-коррозии, связанной с взаимными микросмещениями деталей, концентрацией напряжений.

Взаимное смещение деталей в прессовых соединениях предотвращается за счет сил трения на поверхностях контакта, поэтому нагрузочная способность соединений определяется преимущественно натягом, который назначают в соответствии с посадками, установленными СТ СЭВ 144—75. Однако возможны случаи, когда посадка не может быть реализована в конструкции по условиям прочности. Поэтому при проектировании соединений должны быть удовлетворены как требования неподвижности соединений, так и условия прочности деталей.



Рис. 1. Соединение с натягом

УСЛОВИЯ НЕПОДВИЖНОСТИ И КОНТАКТНЫЕ ДАВЛЕНИЯ
В СОЕДИНЕНИЯХ

Для обеспечения неподвижности соединений средние (номинальные) контактные давления q_m должны быть такими, чтобы силы трения превышали внешниедвигающие силы.

При нагружении осевой силой A (рис. 2)

$$q_m \geq \frac{Ak}{\mu l dl}; \quad (1)$$

при нагружении крутящим моментом M_k

$$q_m \geq \frac{2M_k k}{\mu l d^2 l}; \quad (2)$$

при совместном действии осевой силы и крутящего момента

$$q_m \geq \frac{k \sqrt{\left(\frac{2M_k}{d}\right)^2 + A^2}}{\mu l dl}. \quad (3)$$

В формулах (1) — (3) k — коэффициент запаса сцепления, обычно принимают $k \approx 1,5 \div 2$; μ — коэффициент трения; d и l — соответственно диаметр и длина посадочной поверхности.

Значения коэффициентов трения для прессовых соединений даны в табл. 1. При сборке стальных и чугунных деталей гидропрессованием (с подводом масла) принимают $\mu = 0,12$.

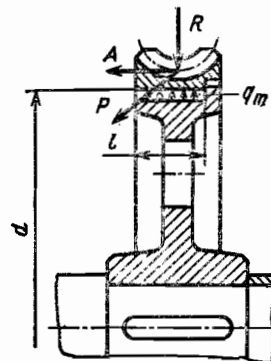


Рис. 2. К расчету соединений с гарантированным натягом

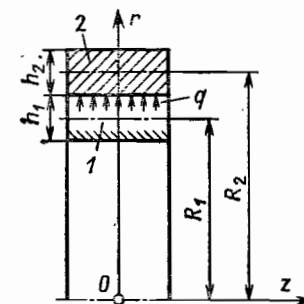


Рис. 3. Соединения колец

1. Значения коэффициента трения (сцепления) μ при посадках с гарантированным натягом (охватываемая деталь из стали)

Способ сборки соединений	Материал охватываемой детали				
	Сталь	Чугун	Алюминиевые и магниевые сплавы	Латунь	Пластмассы
Механическая запрессовка	0,06—0,13*	0,07—0,12	0,02—0,06	0,05—0,1	0,4—0,5
Тепловая сборка	0,14—0,16**	0,07—0,09	0,05—0,06	0,05—0,14	—

* Поверхности сопрягаемых деталей предварительно смазаны машинным маслом.
** В знаменателе дроби указаны значения μ при сборке охлажденной охватываемой детали.

Для соединений, работающих при переменной внешней нагрузке с частотой $f > 10$ Гц значения коэффициентов трения следует понижать на 30—40%.

Из формул (1) и (3) следует, что несущая способность соединений при статических (постоянных) нагрузках определяется номинальными (средними) контактными давлениями. Эти давления зависят от натяга в соединении и условий работы (температурных и др.).

Соединения тонкостенных колец (рис. 3). Величину контактного давления определяют из условия совместности перемещений колец 1 и 2:

$$u_2 - u_1 = \frac{\delta}{2}, \quad (4)$$

где δ — диаметральный натяг.

Радиальные перемещения колец

$$u_1 = -q\lambda_1; \quad u_2 = q\lambda_2, \quad (5)$$

где q — контактное давление; λ_i — коэффициент радиальной податливости кольца ($i = 1, 2$ — номер кольца),

$$\lambda_1 = \frac{R_1^3}{E_1 h_1}; \quad \lambda_2 = \frac{R_2^3}{E_2 h_2}, \quad (6)$$

где R_i — радиус срединной поверхности кольца толщиной h_i ; E_i — модуль упругости материала кольца.

Из соотношения (4) и (5) следует

$$q = \frac{\delta}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} = \frac{\delta}{2 \left(\frac{R_1^3}{E_1 h_1} + \frac{R_2^3}{E_2 h_2} \right)}, \quad (7)$$

а изменение радиуса кольца после запрессовки

$$\left. \begin{aligned} \Delta R_1 = u_1 &= -\frac{\delta}{2} \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}; \\ \Delta R_2 = u_2 &= \frac{\delta}{2} \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Изменение диаметров свободной поверхности необходимо учитывать при посадке подшипников на валы, так как излишний натяг может не только существенно уменьшить радиальный зазор в подшипниках, но и привести к заземлению тел качения. Окружное напряжение для тонких колец

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta 1} \approx \varepsilon_1 E_1 &= -\frac{E_1 \delta}{2R_1} \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}; \\ \sigma_{\theta 2} \approx \varepsilon_2 E_2 &= \frac{E_2 \delta}{2R_2} \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — относительная деформация 1-го и 2-го колец; $\varepsilon_i = \Delta R_i / R_i$.

Наибольший допустимый натяг в соединении из условия появления допустимых пластических деформаций

$$\delta_{\max} = 2\sigma_{i\tau} \frac{R_i}{E_i} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_i}, \quad (10)$$

где $\sigma_{i\tau}$ — наименьшее значение (из двух) предела текучести материала кольца ($i = 1, 2$).

Если соединение будет работать при повышенной температуре, то произойдет расширение колец и натяг в соединении изменится на величину

$$\delta_T = 2(\alpha_1 R_1 T_1 - \alpha_2 R_2 T_2) \quad (11)$$

и станет равным

$$\delta^* = \delta_0 + \delta_T, \quad (12)$$

где α_i и T_i — соответственно коэффициент линейного расширения и изменение температуры кольца; δ_0 — первоначальный натяг

В этом случае контактное давление

$$q = \frac{\delta^*}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (13)$$

Окружные напряжения и наибольший натяг в соединении при повышенной температуре можно вычислить по формулам (9) и (10), подставляя в них значения $\sigma_{i\tau}$ и E_i , соответствующие рабочей температуре.

Если $\alpha_2 R_2 T_2 > \alpha_1 R_1 T_1$, то при $T_1 = T_2 = T$ найдем температуру, при которой натяг в соединении исчезает,

$$T = \frac{\delta_0}{\alpha_2 R_2 - \alpha_1 R_1}. \quad (14)$$

Если кольца *вращаются* вокруг продольной оси с угловой скоростью ω , то радиальные смещения колец от центробежных сил ($i = 1, 2$)

$$u_{i\omega} = \frac{\rho_i}{E_i} \omega^2 R_i^3, \quad (15)$$

где ρ_i — плотность материала кольца.

Изменение натяга составит

$$\delta_{\omega} = 2(u_{1\omega} - u_{2\omega}) = 2\omega^2 \left(R_1^3 \frac{\rho_1}{E_1} - R_2^3 \frac{\rho_2}{E_2} \right). \quad (16)$$

Так как отношение $\frac{\rho}{E}$ для большинства материалов (сталь, сплавы титана, алюминия и др.) приблизительно одинаково, то

$$\delta_{\omega} = 2\omega^2 \frac{\rho}{E} R_1^3 \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^3 \right]. \quad (17)$$

Из соотношения (17) видно, что во вращающихся соединениях обычно происходит уменьшение натяга.

Угловая скорость (предельная), при которой натяг исчезнет (освобождающая частота вращения),

$$\omega_k = \frac{\delta_0}{2 \frac{\rho}{E} R_1^3 \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 1 \right]}. \quad (18)$$

Соединения дисков и толстостенных цилиндров (рис. 4). После запрессовки дисков (цилиндров) возникнут контактные давления q , которые для деталей одинаковой ширины (длины) можно считать постоянными в зоне контакта.

Условия совместности перемещения дисков описываются соотношением (4), а связь радиальных смещений с давлениями в зоне контакта — зависимостями (5).

Используя решения, приведенные в гл. 16, коэффициенты радиальной податливости дисков 1 и 2 можно записать в виде

$$\lambda_1 = \frac{c_1 d}{2E_1}; \quad \lambda_2 = \frac{c_2 d}{2E_2}, \quad (19)$$

где c_1 и c_2 — коэффициенты;

$$c_1 = \frac{1 + \left(\frac{d_1}{d} \right)^2}{1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2} - \nu_1; \quad c_2 = \frac{1 + \left(\frac{d}{d_2} \right)^2}{1 - \left(\frac{d}{d_2} \right)^2} + \nu_2. \quad (20)$$

В отношениях (19) и (20) d, d_1 и d_2 — диаметры деталей (см. рис. 4); ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона.

Контактное давление связано с натягом, как и прежде, соотношением (7). С учетом равенств (19) и (20) получим

$$q = \frac{\delta}{d \left(\frac{c_1}{E_1} + \frac{c_2}{E_2} \right)}. \quad (21)$$

В табл. 2 приведены значения коэффициентов c_1 и c_2 для стальных деталей.

2. Значения коэффициентов c_1 и c_2 для стальных деталей

d_1/d или d/d_2	c_1	c_2	d_1/d или d/d_2	c_1	c_2
0,0	0,70*	—	0,5	1,37	1,97
0,1	0,72	1,32	0,6	1,83	2,43
0,2	0,78	1,38	0,7	2,62	3,22
0,3	0,89	1,49	0,8	4,25	4,85
0,4	1,08	1,68	0,9	9,23	9,83

* Охватываемая деталь имеет сплошное сечение.

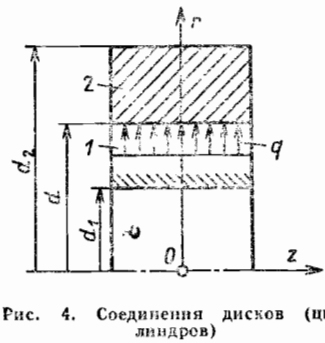


Рис. 4. Соединения дисков (цилиндров)

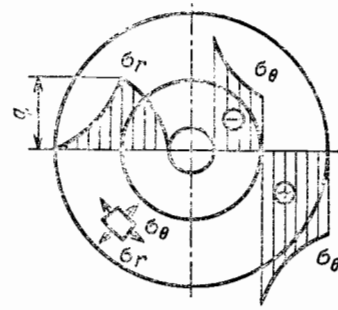


Рис. 5. Напряжения в прессовом соединении дисков

Уменьшение внутреннего диаметра охватываемой детали

$$\Delta d_1 = \frac{2qd_1}{E_1 \left[1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2 \right]}, \quad (22)$$

а увеличение наружного диаметра охватывающей детали

$$\Delta d_2 = \frac{2qd_2}{E_2 \left[\left(\frac{d_2}{d} \right)^2 - 1 \right]}. \quad (23)$$

Напряжения в первом диске (цилиндре)

$$\sigma_r = -q \frac{1 - \left(\frac{d_1}{d_*} \right)^2}{1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2}; \quad \sigma_\theta = -q \frac{1 + \left(\frac{d_1}{d_*} \right)^2}{1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2}. \quad (24)$$

Напряжения во втором диске (цилиндре)

$$\sigma_r = q \frac{1 - \left(\frac{d_2}{d_*} \right)^2}{\left(\frac{d_2}{d} \right)^2 - 1}; \quad \sigma_\theta = q \frac{1 + \left(\frac{d_2}{d_*} \right)^2}{\left(\frac{d_2}{d} \right)^2 - 1}, \quad (25)$$

где d_* — диаметр сечения, в котором вычисляют напряжения.

Изменение напряжений в деталях соединений с натягом показано на рис. 5. Наибольшие напряжения возникают у внутренней поверхности охватываемой детали ($d_* = d$). Условие отсутствия пластических деформаций

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2q}{1 - \left(\frac{d}{d_2} \right)^2} \leq \sigma_T. \quad (26)$$

Наибольшие давления в зоне контакта

$$q_{\text{max}} = 0,5\sigma_T \left[1 - \left(\frac{d}{d_2} \right)^2 \right] \quad (27)$$

и наибольший расчетный натяг в соединении (по условию возникновения пластических деформаций)

$$\delta_{\text{max}} = 0,5\sigma_T d \left(\frac{c_1}{E_1} + \frac{c_2}{E_2} \right) \left[1 - \left(\frac{d}{d_2} \right)^2 \right]. \quad (28)$$

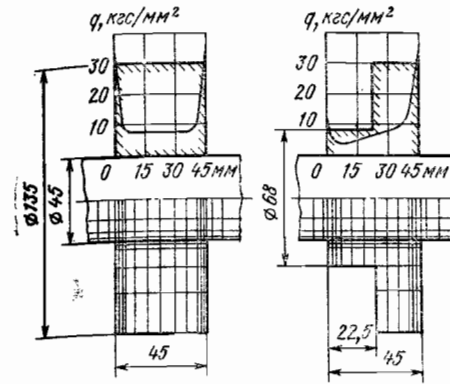


Рис. 6. Сеточная разметка и распределение контактных напряжений в соединениях с натягом

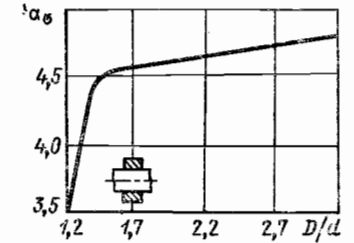


Рис. 7. Теоретический коэффициент концентрации напряжений в соединениях с гарантированным натягом

Если соединение подвержено действию повышенных температур, то последовательность расчета в этом случае сохраняется такой же, как и для колец

Для вращающихся относительно продольной оси соединений дисков уменьшение натяга при $\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2} = \frac{\nu}{E}$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ составит

$$\delta_\omega = \frac{\rho}{E} \frac{\omega^2}{16} d (d_2^2 - d_1^2) (3 + \nu), \quad (29)$$

где ν — коэффициент Пуассона, $\nu = 0,3$.

Контактное давление в соединении

$$q = \frac{\delta_0 - \delta_\omega}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (30)$$

Угловая скорость, при которой натяг в соединении исчезнет ($q = 0$),

$$\omega_K = 4 \sqrt{\frac{\delta_0 E}{(d_2^2 - d_1^2) d \rho (3 + \nu)}}. \quad (31)$$

Соединения дисков и валов. Если сопрягаемые детали имеют различную длину, то контактные давления распределяются по посадочной поверхности неравномерно.

На рис. 6 показано распределение давлений по длине соединений стальных валов и втулок (дисков) при диаметральном натяге $\delta = 50$ мкм, полученное из численного решения контактных задач (см гл. 26 и 29). Наибольшие давления концентрируются вблизи краев втулок, что связано с влиянием выступающих концов вала, затрудняющих его деформацию в пределах соединения.

При уменьшении толщины втулки и, как следствие, увеличении ее радиальной податливости наблюдается снижение теоретического коэффициента концентрации напряжений $\alpha_0 = \frac{q_{\text{max}}}{q_n}$ [рис. 7; q_n — номинальное контактное давление, вычисляемое по формуле (21)].

С увеличением длины втулки (толщины диска) от $0,5d$ до $2d$ значение максимального контактного давления на кромке втулки возрастает на 30—40% (большие значения соответствуют толстостенным втулкам).

Значения максимальных контактных давлений у торцов ступенчатых втулок практически такие же, как и в соединениях с цилиндрическими втулками соответствующих толщин.

В соединениях стальных валов с дисками (втулками) из чугуна (модуль упругости $E = 10^4$ кгс/мм²) q_{\max} приблизительно на 30% ниже, чем для соединений со стальными дисками.

РАСЧЕТНЫЙ И ПОТРЕБНЫЙ НАТЯГИ

При проектировании соединений по заданной величине внешней нагрузки определяют расчетный натяг $\delta = d_B - d_A$, где d_B и d_A — измеренные соответственно наружный диаметр вала и внутренний диаметр охватываемой детали. Диаметры измеряют по вершинам микронеровностей, которые затем при сборке частично обминаются, и потребный натяг принимают несколько большим расчетного:

$$\delta_n = \delta + 1,2 (Rz_1 + Rz_2) \tag{32}$$

и по δ_n выбирают посадку. В формуле (32) Rz_1 и Rz_2 — высоты микронеровностей сопрягаемых деталей (табл. 3).

3. Классы шероховатости поверхности

Класс шероховатости	Разряды	Среднее арифметическое отклонение профиля Ra , мкм	Высота микронеровностей (по 10 точкам) Rz , мкм	Класс шероховатости	Разряды	Среднее арифметическое отклонение профиля Ra , мкм	Высота микронеровностей (по 10 точкам) Rz , мкм
1 2 3	—	—	320—160 160—80 80—40	10	а б в	0,160—0,125 0,125—0,100 0,100—0,080	$\approx 5Ra$
4 5	—	—	40—20 20—10	11	а б в	0,080—0,063 0,063—0,050 0,050—0,040	$\approx 5Ra$
6	а б в	2,5—2,0 2,0—1,6 1,6—1,25	$\approx 4Ra$	12	а б в	0,040—0,032 0,032—0,025 0,025—0,020	$\approx 5Ra$
7	а б в	1,25—1,0 1,0—0,80 0,80—0,63	$\approx 5Ra$	13	а б в	—	0,100—0,080 0,080—0,063 0,063—0,050
8	а б в	0,63—0,50 0,50—0,40 0,40—0,32	$\approx 5Ra$	14	а б в	—	0,050—0,040 0,040—0,032 0,032—0,025

Посадки следует назначать в системе отверстия. Систему вала можно использовать только в случаях, когда это оправдано конструктивными или экономическими соображениями (например, если необходимо получить разные посадки нескольких деталей с отверстиями на одном гладком валу).

В табл. 4 приведены посадки, применяемые ранее, и рекомендуемые посадки для их замены по СТ СЭВ 144—75. Предпочтительные посадки заключены в рамки.

Более обоснованно посадку можно выбрать, используя вероятностный расчет. Распределение действительных размеров деталей по полю допуска таково, что предельные сочетания размеров встречаются редко. Можно считать, что работоспособность соединения будет обеспечена, если потребный натяг будет больше минимального вероятностного натяга $\delta_{p \min}$ при заданном проценте риска.

4. Некоторые посадки по СТ СЭВ 144—75 (система отверстия), рекомендуемые для замены посадок по системе ОСТ

Посадка по ОСТ	Посадка по СТ СЭВ	Посадка по ОСТ	Посадка по СТ СЭВ	Посадка по ОСТ	Посадка по СТ СЭВ	Посадка по ОСТ	Посадка по СТ СЭВ
$\frac{A_1}{Pr2_1}$	$\frac{H6}{s5}$	$\frac{A}{Gr}$	$\frac{H7}{u7}$	$\frac{A_{2a}}{Pr2_{2a}}$	$\frac{H8}{u8}$	$\frac{A_3}{Pr3_3}$	$\frac{H8}{z8}$
$\frac{A_1}{Pr1_1}$	$\frac{H6}{r5}$	$\frac{A}{Pr}$	$\frac{H7}{s6}$	$\frac{A_{2a}}{Pr1_{2a}}$	$\frac{H8}{s7}$	$\frac{A_3}{Pr2_3}$	$\frac{H8}{x8}$
$\frac{A_1}{G_1}$	$\frac{H6}{n5}$	$\frac{A}{Pa}$ $\frac{A}{P}$	$\frac{H7}{p6}$ $\frac{H7}{n6}$	—	—	$\frac{A_3}{Pr1_3}$	$\frac{H8}{u8}$
$\frac{A_1}{T_1}$	$\frac{H6}{m5}$	$\frac{A}{T}$	$\frac{H7}{m6}$	$\frac{A_{2a}}{T_{2a}}$	$\frac{H8}{m7}$	—	—
$\frac{A_1}{H_1}$	$\frac{H6}{k5}$	$\frac{A}{H}$	$\frac{H7}{k6}$	$\frac{A_{2a}}{H_{2a}}$	$\frac{H8}{k7}$	—	—
$\frac{A_1}{P_1}$	$\frac{H6}{j5}$	$\frac{A}{P}$	$\frac{H7}{j6}$	$\frac{A_{2a}}{P_{2a}}$	$\frac{H8}{j7}$	—	—

При нормальном законе распределения размеров

$$\delta_{p \min} = \delta_{cp} - t_* S_\delta; \quad \delta_{p \max} = \delta_{cp} + t_* S_\delta, \tag{33}$$

где δ_{cp} — средний натяг, $\delta_{cp} = \Delta_B - \Delta_A$ (Δ_B и Δ_A — средние значения отклонений размеров вала и отверстия, $\Delta_B = \frac{es+ei}{2}$, $\Delta_A = \frac{ES+EI}{2}$, es (ES) и ei (EI) — верхнее и нижнее отклонения вала (отверстия)); $S_\delta = \sqrt{S_A^2 + S_B^2}$ — среднее квадратическое отклонение табличного натяга, $S_B = \frac{es-ei}{6}$, $S_A = \frac{ES-EI}{6}$; t_* — квантиль нормального распределения. В зависимости от вероятности P нахождения искомого параметра в расчетных пределах принимают следующие значения t_* :

P	0,5	0,9	0,95	0,97	0,99	0,995	0,997	0,999
t_*	0	1,23	1,64	1,83	2,33	2,58	2,75	3,1

Пример. Подобрать посадку зубчатого колеса из стали 45 на вал из стали 40X, чтобы соединение было способно передавать крутящий момент $M_k = 10^4$ кгс·мм.

Размеры соединения: $d = 60$ мм, $l = 80$ мм, $d_2 = 100$ мм. Шероховатость посадочных поверхностей вала и отверстия соответствует $Rz_1 = Rz_2 = 10$ мкм. Сборку соединения осуществляем запрессовкой на прессе, смазка — трансформаторное масло, $\mu = 0,08$.

По формуле (2) определяем контактное давление в соединении при $k = 1,5$:

$$q_m = \frac{2M_k k}{\mu l d^2 l} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1,5}{0,08 \cdot 3,14 \cdot 60^2 \cdot 80} \approx 4,3 \text{ кгс/мм}^2.$$

Используя соотношение (21), вычисляем расчетный натяг

$$\delta = qd \left(\frac{c_1}{E_1} + \frac{c_2}{E_2} \right) = 4,3 \cdot 60 \left(\frac{0,7}{2 \cdot 10^4} + \frac{2,4}{2 \cdot 10^4} \right) \approx 40 \text{ мкм}.$$

Потребный натяг (минимальный)

$$\delta_{n \min} = \delta + 1,2 (Rz_1 + Rz_2) = 40 + 1,2 (10 + 10) = 64 \text{ мкм.}$$

По соотношению (28) вычисляем наибольший расчетный и потребный натяги при $\sigma_T = 47 \text{ кгс/мм}^2$ для колеса из стали 45:

$$\delta_{n \max} = 0,5\sigma_T d \left(\frac{c_1}{E_1} + \frac{c_2}{E_2} \right) \left[1 - \left(\frac{d}{d_2} \right)^2 \right] = 0,5 \cdot 47 \cdot 60 \left(\frac{0,7}{2 \cdot 10^4} + \frac{2,4}{2 \cdot 10^4} \right) \left[1 - \left(\frac{60}{100} \right)^2 \right] \approx 141 \text{ мкм.}$$

$$\delta_n \max = 141 + 1,2 (10 + 10) = 165 \text{ мкм.}$$

По формулам (33) при $P = 0,95$ определяем характеристики рассеяния табличных натягов (табл. 5).

5. Вероятностные натяги для различных посадок с натягом

Посадка		Вероятностный натяг, мкм		Посадка		Вероятностный натяг, мкм	
СТ СЭВ	ОСТ	$\delta_p \min$	$\delta_p \max$	СТ СЭВ	ОСТ	$\delta_p \min$	$\delta_p \max$
60H6/s5	$\Phi 60 \frac{A_1}{Pr^2_1}$	42,3	58,7	60H8/u8	$\Phi 60 \frac{A_{2a}}{Pr^2_{2a}}$	61,8	112,2
60H7/r7	$\Phi 60 \frac{A}{Gr}$	58,6	91,4	60H9/u8	$\Phi 60 \frac{A_3}{Pr^2_{2a}}$	51,0	109,0
60H7/u8	$\Phi 60 \frac{A}{Pr^2_{2a}}$	72	118	60H9/z8	$\Phi 60 \frac{A_3}{Pr^3_{2a}}$	117,2	182,8
60H7/s7	$\Phi 60 \frac{A}{Pr^1_{2a}}$	34,6	67,4	60H9/x8	$\Phi 60 \frac{A_3}{Pr^2_{2a}}$	57,2	122,8

Примечание. Соответствие между полями допусков по СТ СЭВ 144—75 и системой ОСТ приближительное.

Из сравнения данных расчета с табличными следует, что условию работоспособности соединения будет удовлетворять посадка 60H7/u8 ($\Phi 60 \frac{A}{Pr^2_{2a}}$).

Более точный выбор посадки можно осуществить, проводя расчет с учетом рассеяния характеристик материала деталей, внешней нагрузки, длины соединения и коэффициента трения. После выбора посадки вычисляем усилие запрессовки, используя соотношения (1) и (21) при наибольшем вероятностном натяге $\delta_p \max = 118 \text{ мкм}$ (см. табл. 5), а с использованием соотношений (2) и (21) при минимальном вероятностном натяге $\delta_p \min = 72 \text{ мкм}$ определяем наименьший крутящий момент, передаваемый соединением.

ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Усталостная прочность соединений с гарантированным натягом в 1,5—3 раза ниже, чем прочность гладких образцов (стандартных). Это объясняется высокой концентрацией напряжений и контактной коррозией, вызываемой местным проскальзыванием деталей при переменных внешних нагрузках (особенно изгибающих).

В табл. 6 приведены значения отношения эффективного коэффициента концентрации напряжений в соединении k_σ к коэффициенту ϵ_σ , учитывающему влияние масштабного эффекта, которые рекомендуется использовать в расчете валов на выносливость.

Значение отношения k_τ/ϵ_τ (при кручении валов) можно определить приближенно из соотношений

$$\frac{k_\tau}{\epsilon_\tau} = 1 + 0,6 \left(\frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma} - 1 \right).$$

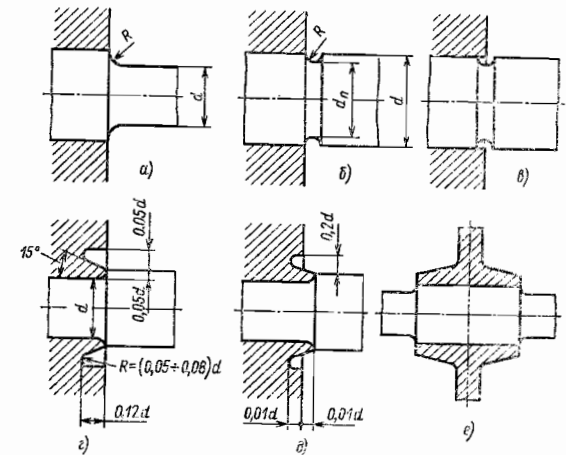


Рис. 8. Конструктивные способы повышения усталостной прочности соединений

Расчет на выносливость прессовых соединений приведен в гл. 8. Одним из распространенных конструктивных способов повышения усталостной прочности соединений является утолщение подступичной части вала (обычно диаметр увеличивают на 5—7%) с плавным переходом к утолщению (см. рис. 8, а; $R \geq 0,2a$).

6. Значения отношения $\frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma}$ в месте посадки деталей

Диаметр вала, мм	Посадка		Значения k_σ/ϵ_σ при σ_B в кгс/мм ²						
	по СТ СЭВ	по ОСТ	50	60	70	80	90	100	120
30	H7/r6	$\frac{A}{Pr}$	2,5	2,75	3,0	3,25	3,5	3,75	4,25
	H7/k6	$\frac{A}{H}$	1,9	2,05	2,25	2,45	2,6	2,8	3,2
	H7/h6	$\frac{A}{C}$	1,6	1,8	1,95	2,10	2,3	2,45	2,75
50	H7/r6	$\frac{A}{Pr}$	3,05	3,35	3,65	3,95	4,3	4,6	5,2
	H7/k6	$\frac{A}{H_1}$	2,3	2,5	2,75	3,0	3,2	3,45	3,9
	H7/h6	$\frac{A}{C}$	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,4
100 и более	H7/s6	$\frac{A}{Pr}$	3,3	3,6	3,95	4,25	4,6	4,9	5,6
	H7/k6	$\frac{A}{H}$	2,45	2,7	2,95	3,2	3,45	4,0	4,2
	H7/h6	$\frac{A}{C}$	2,15	2,35	2,55	2,75	3,0	3,2	3,6

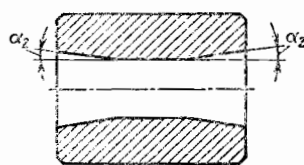


Рис. 9. Конусная расточка отверстия

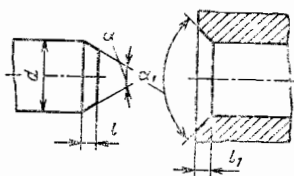


Рис. 10. Конусная расточка отверстия и вала

Предел выносливости соединений с утолщением повышается на 20—25% при передаче изгибающего момента через ступицу и на 40—50% при ненагруженной ступице в сравнении с соединением без утолщения.

Предел выносливости прессовых соединений можно повысить на 30—50% за счет применения накатных *разгружающих выточек* на валу (рис. 8, б, в) или на охватываемой детали (рис. 8, г, д). Обычно диаметр проточки $d_n = (0,92 \div 0,95)d$, а радиус проточки $R = (0,1 \div 0,15)d_n$.

Значительное (на 15—20%) повышение усталостной прочности соединений можно получить при напрессовке *ступиц конической формы* (рис. 8, е).

Усталостная прочность прессовых соединений со шпоночных соединений на прессовой посадке) такая же, как и для обычных прессовых соединений. Она определяется концентрацией напряжений от посадки.

Для снижения коэффициента концентрации напряжений целесообразно скруглять острые торцовые кромки ступицы радиусом

$$R = \frac{l_2}{8},$$

где l_2 — протяженность зоны концентрации напряжений, мм; $l_2 = (0,05 \div 0,08)d$; δ — натяг, мм.

Более эффективным средством снижения концентрации напряжений является конусная расточка с торцов отверстия в охватываемой детали с плавным переходом в цилиндрическую поверхность (рис. 9): $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,016 \div 0,020$.

Усталостная прочность прессовых соединений зависит и от материала охватываемой детали. Использование для изготовления охватываемых деталей более пластичных и менее прочных материалов, чем для валов, способствует повышению выносливости соединений.

Усталостная прочность прессовых соединений может быть существенно повышена за счет ряда технологических мер.

Во избежание повреждения контактирующих участков вала при сборке рекомендуется изготавливать вал с заходным конусом, а охватываемую деталь — с фаской (рис. 10).

Существенное повышение усталостной прочности (на 80—100%) можно получить при поверхностном упрочнении *подступичной части вала* (дробеструйной обработкой, обкаткой роликом, алмазным выглаживанием и т. п.). Такими способами в настоящее время упрочняют и валы больших диаметров (до 600 мм) При этом значительно замедляется развитие фреттинг-коррозии.

Степень повышения усталостной прочности соединений зависит от режимов упрочнения (табл. 7). При дробеструйной обработке мелкой дробью ($d = 0,5 \div 0,8$ мм) подступичных зон валов наблюдается большее повышение прочности (в 2—2,2 раза), чем при обработке крупной дробью.

Усталостная прочность прессовых соединений может быть повышена в 2—3 раза за счет химико-термического поверхностного упрочнения (цементацией или азотированием).

При расчете на выносливость упрочненных валов коэффициент технологического упрочнения можно принимать в пределах $\beta_{уп} = 1,7 \div 2$.

7. Влияние упрочнения подступичных частей валов на усталостную прочность

Образец	Материал вала	Способ обработки поверхности	Предел выносливости при изгибе σ_{-1} , кгс/мм ²	Эффективный коэффициент концентрации напряжений k_σ
Гладкий $d = 50$ мм	Ст5 нормализованная	Шлифование	23	1
С напрессованной втулкой $d = 50$ мм			10	2,3
		Дробеструйная обработка	19	1,2
Гладкий $d = 12$ мм	Сталь 45ХН, $\sigma_B = 125 \div 160$ кгс/мм ²	Шлифование	48,3	1
С напрессованной втулкой $d = 12$ мм			20	2,42
		Дробеструйная обработка	57,5	0,84
Гладкий $d = 50$ мм	Сталь 45, $\sigma_B = 62$ кгс/мм ²	Шлифование	24,2	1
С напрессованной втулкой $d = 50$ мм			10,5	2,3
		Обкатка роликом с усилием $P = 270$ кгс	23,2	1,04
		То же, $P = 540$ кгс	23,9	1,01
Гладкий $d = 60$ мм	Сталь 45, $\sigma_B = 60$ кгс/мм ²	Шлифование	21,5	1
С напрессованным (тепловой сборкой) шарикоподшипником $d = 60$ мм			10	2,15
		Обкатка роликом	17	1,26

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ СОЕДИНЕНИЙ

Различают следующие виды соединений, выполняемых дуговой и газовой сваркой: стыковые (рис. 1), нахлесточные (рис. 2), тавровые и угловые (рис. 3).

Для ответственных конструкций применяют стыковые соединения, имеющие прочность, близкую к прочности основного металла. В зависимости от толщины деталей сварку выполняют односторонним (рис. 1, а) или двусторонними (рис. 1, б) швами, а также производят подготовку кромок [прямолинейный (рис. 1, в—г) или криволинейный (рис. 1, д) скосы]. Если сварку можно производить лишь с одной стороны, то для предотвращения стекания металла с противоположной стороны подкладывают привариваемые стальные или отъемные медные подкладки (рис. 1, е).

Нахлесточные, тавровые и угловые соединения выполняют угловыми швами с нормальным сечением — основной форма шва (рис. 4, а) и улучшенным сечением (рис. 4, б, в).

Нахлесточные соединения тонколистовых конструкций выполняют с помощью контактной сварки [точечной (рис. 5, а) и шовной (рис. 5, б)].

Диаметр сварной точки устанавливают в зависимости от толщины свариваемых деталей: $d = 1,2 S + 4$ мм; этот диаметр не должен превышать величины $d = 1,5 S + 5$ мм, где S — наименьшая толщина свариваемых элементов. Рекомендуемое расстояние между точками $a = 3d$ при сварке двух элементов и $a = 4d$ при сварке трех элементов.

Расстояние от ряда сварных точек до ребер жесткости и кромок уголков должно быть не менее $2d$.

Электронно-лучевая сварка имеет преимущества перед другими видами сварки благодаря высокой проплавливающей способности луча и возможности регулирования его размеров:

- 1) обеспечивает малые габариты сварных швов и, как следствие, малое коробление деталей в зоне сварных швов;
- 2) позволяет сваривать металл очень малых и очень больших толщин;
- 3) допускает сварку через щели наружных стенок;
- 4) дает возможность сваривать за один проход несколько деталей, расположенных одна под другой; так как сварку производят в вакууме, окисление металла сварного соединения исключается.

Электронно-лучевая сварка оказывается целесообразной для соединения деталей из тугоплавких металлов, жаропрочных и титановых сплавов.

При использовании электронно-лучевой сварки предъявляются высокие требования к подготовке кромок деталей и точности прилегания.

Отдельные виды соединений, получаемые с помощью электронно-лучевой сварки, показаны в табл. 1.

В паяных конструкциях помимо соединений встык и нахлестку распространены следующие: телескопические (рис. 6, а) внахлестку с заклепкой (рис. 6, б) или штифтом (рис. 6, в), внахлестку со шпонкой (рис. 6, г), замок (рис. 6, д).

КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Для обеспечения надежности изделий в машиностроении вводят полный или выборочный контроль сварных соединений. Контроль осуществляют визуально, а также с помощью разрушающих и неразрушающих методов. Выборочный контроль осуществляют обычно путем механических испытаний (статических или усталостных) на прочность или герметичность (вплоть до разрушения).

В турбостроении основным методом контроля сварных швов является ультразвуковая дефектоскопия. Наличие поверхностных трещин, непроваров и шлаковых включений контролируют в этих швах магнитной дефектоскопией, травлением и керосиновой пробой. Часто применяют рентгеновский контроль.

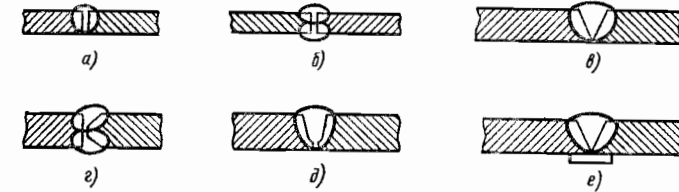


Рис. 1. Стыковые соединения

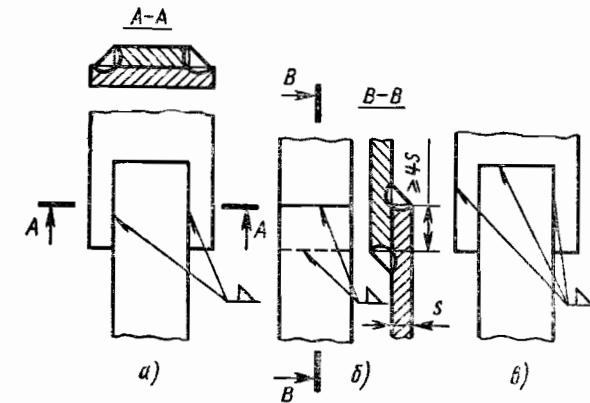


Рис. 2. Нахлесточные соединения, выполненные: а — фланговыми швами; б — лобовыми швами; в — комбинированным (фланговыми и лобовым) швом

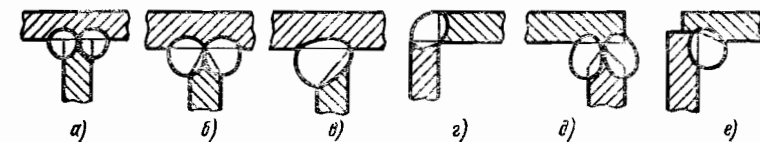


Рис. 3. Тавровые (а—в) и угловые (г—е) соединения

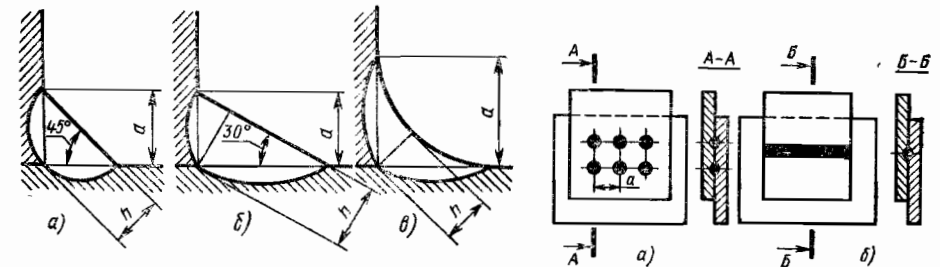


Рис. 4. Формы угловых швов

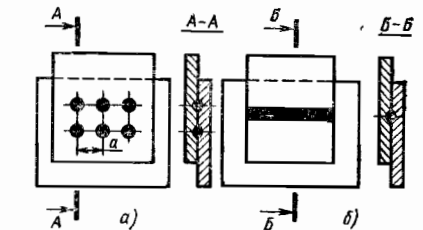


Рис. 5. Соединения контактной сваркой: а — точечной; б — шовной (роликной)

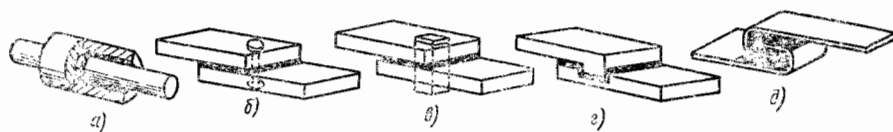


Рис. 6. Виды паяных соединений

1. Виды соединений, выполняемых электронно-лучевой сваркой
Размеры, мм

Вид соединения	Толщина свариваемого материала S	Размеры кромок		
		a	n	m
	1-5 Св. 5	0-0,1 0-0,2	0,8-1,5 1,0-3,0	5-8 6-10
	1-5 Св. 5	0-0,1 0-0,2	1,0-2,0 1,0-3,0	3-4 3-6
	0,1-0,4	0-0,15	0,3-0,8	0,5-1,0
	Св. 3	0-0,1	1,0-10	1,0-1,5
	0,2-1,0 0,5-10	—	—	3-6 3-10
	0,2-0,8 0,3-10	—	—	0,6-1,5 Св. 1
	Св. 0,2	0-0,1	0,5-2,0	0,1-2,0
	Св. 1	—	0,8-3,0	6-10
	0,3-1,0 0,6-3,0	0-0,15 0-0,15	—	1-40 2-40

Для сосудов, работающих при давлении свыше 50 кгс/см² при температуре стенки свыше 200° С и ниже - 70° С, ультразвуковая дефектоскопия является обязательной для всех швов. При давлении до 16 кгс/см² и температуре стенки от - 40 до 200° С контролируют 25% длины швов.

Все места пересечения сварных швов подлежат 100%-ному контролю. Для ответственных сварных соединений во всех отраслях машиностроения предусмотрены механические испытания образцов-свидетелей, а в исключительных случаях — вырезка контрольных проб из изделия.

Основным видом сдаточного испытания элементов, работающих под давлением, является гидравлическое испытание всех сосудов, трубопроводов и других элементов и узлов после изготовления. По правилам Котлонадзора при рабочем давлении в сосуде $p \leq 5$ кгс/мм² пробное давление должно превышать рабочее давление не менее чем в 1,5 раза ($p_{\text{проб}} \geq 2$ кгс/мм²). При рабочем давлении $p > 5$ кгс/мм² пробное давление назначают $p_{\text{проб}} = 1,25p$, но не менее $(p + 3)$ кгс/мм². Конструкции из литых элементов независимо от рабочего давления подвергают испытаниям при пробном давлении $p_{\text{проб}} = 1,5p$, но не менее 3 кгс/мм².

Силовой метод контроля повышенным давлением позволяет выявить грубые начальные дефекты.

В тех случаях, когда используют физические неразрушающие методы контроля, пробное давление принимают равным $(1,05 \div 1,1)p$.

В химическом машиностроении для аппаратуры емкостного типа, работающей под давлением, контроль качества сварных швов осуществляют 100%-ным визуальным осмотром и выборочным контролем ультразвуковым и рентгеновским методами. Готовые изделия проходят гидравлические испытания при давлении, увеличенном на 20-50% в сравнении с эксплуатационным.

РАСЧЕТ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ПРИ ПОСТОЯННЫХ НАГРУЗКАХ

Стыковые швы рассчитывают на прочность по номинальному сечению соединяемых деталей (без учета утолщения швов), как целые детали.

Напряжения растяжения

$$\sigma = \frac{P}{lS} \leq [\sigma']_p, \quad (1)$$

где P — внешняя нагрузка; l и S — соответственно длина шва и толщина соединяемых деталей; $[\sigma']_p$ — допускаемое напряжение сварного шва при растяжении; часто принимают $[\sigma']_p = (0,9 \div 1,0) [\sigma]_p$, где $[\sigma]_p$ — допускаемое напряжение при растяжении основного металла (см. табл. 2).

Допустимая растягивающая или сжимающая нагрузка

$$P = [\sigma']_p lS. \quad (2)$$

Напряжения в шве при совместном действии внешней силы и изгибающего момента

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W_c} + \frac{P}{lS} \leq [\sigma']_p, \quad (3)$$

здесь M и P — изгибающий момент и внешняя сила; W_c — момент сопротивления сечения шва.

Расчет на прочность угловых фланговых и лобовых швов производится на срез по сечению, проходящему через биссектрису прямого угла (рис. 7). Площадь расчетного сечения принимают

$$F = 0,7k_p l, \quad (4)$$

где k_p — расчетный катет углового шва; l — длина шва.

Наибольшая длина лобового шва не ограничивается, а длину флангового шва не следует делать большей $50k_p$ из-за неравномерного распределения нагрузки по длине.

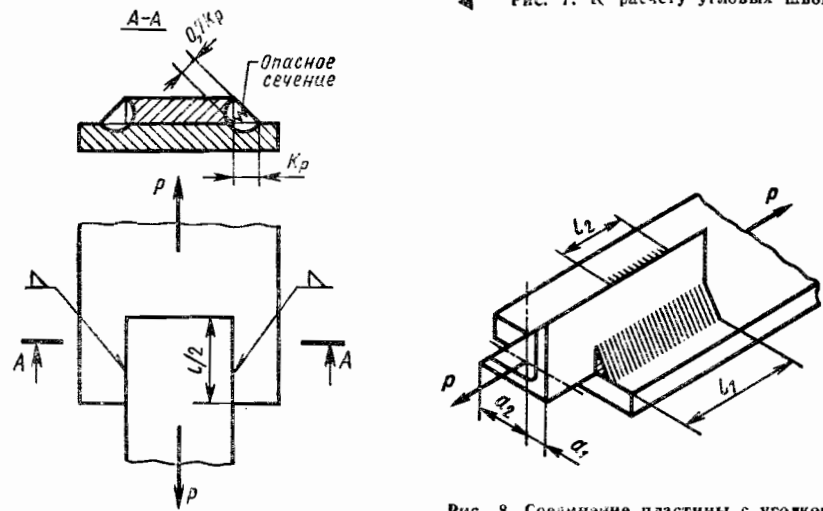


Рис. 7. К расчету угловых швов

Рис. 8. Соединение пластины с уголком

Напряжения среза в расчетном сечении

$$\tau = \frac{P}{0,7k_p l} \leq [\tau'] \quad (5)$$

где $[\tau']$ — допускаемое напряжение сварного шва на срез.

Если соединение имеет лобовые и фланговые швы, то в формулу (5) вместо l следует подставлять длину всего периметра угловых швов.

Допустимая растягивающая нагрузка

$$P = 0,7k_p l [\tau'] \quad (6)$$

Швы целесообразно располагать так, чтобы они были нагружены равномерно.

Если фланговые швы размещены несимметрично относительно нагрузки, например, в соединении с уголком (рис. 8), то, полагая, что напряжения равномерно распределены по длине шва, из уравнений равновесия получим соотношения для нагрузок на фланговые швы в виде

$$P_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} P; \quad P_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} P, \quad (7)$$

где a_1 и a_2 — расстояния от центра тяжести сечения элемента до центра тяжести сечения швов.

Если задана длина шва

$$l = \frac{P}{0,7k_p [\tau']},$$

то ее целесообразно разместить пропорционально нагрузкам P_1 и P_2 :

$$l_1 = l \frac{a_2}{a_1 + a_2}; \quad l_2 = l \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad (8)$$

что эквивалентно условию $\tau_1 = \tau_2$.

Для получения равномерного распределения нагрузки между швами необходимо длину каждого шва принимать обратно пропорциональной расстоянию между центрами тяжести шва и детали.

Расчет комбинированных (фланговых и лобовых) угловых швов под действием момента в плоскости стыка (рис. 9) выполняют, полагая, что швы работают независимо, а фланговые швы передают только силы вдоль своей оси.

Из условий равновесия следует

$$M = F_c h \tau + W_c \tau, \quad (9)$$

$$\text{где } F_c = 0,7k_p l; \quad W_c = \frac{0,7k_p h^2}{6},$$

откуда

$$\tau = \frac{M}{F_c h + W_c} \leq [\tau']. \quad (10)$$

В уточненном расчете можно принять, что приращенный элемент стремится повернуться вокруг центра тяжести площади сечений швов. Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{M}{J_p} r_{\max} \leq [\tau'], \quad (11)$$

где J_p — полярный момент инерции швов, $J_p = J_x + J_y$; J_x и J_y — моменты инерции швов относительно осей x и y , проходящих через центр тяжести площади сечений швов; r_{\max} — расстояние от центра тяжести до наиболее удаленной точки шва.

Тавровые соединения, выполненные угловыми швами, рассчитывают по формулам (5) и (6), а стыковые по формулам (1) и (2).

Угловые соединения (см. рис. 3) не используются как силовые, их применяют, как правило, для образования профилей из отдельных элементов.

Прочность стыкового соединения, полученного контактной сваркой, принимают равной прочности основного металла.

Соединение, полученное точечной контактной сваркой, при действии нагрузки в плоскости стыка, рассчитывают на срез, принимая равномерное распределение нагрузки между точками

$$\tau = \frac{4P}{i \pi d^2} \leq [\tau'], \quad (12)$$

где P — усилие, приходящееся на одну точку, i — число плоскостей среза точек. Швы, получаемые на роликовых машинах, рассчитывают по формуле

$$\tau = \frac{P}{a l} \leq [\tau'], \quad (13)$$

здесь a — ширина шва; l — его длина.

Допускаемые напряжения в сварных швах в долях от допускаемых напряжений основного металла приведены в табл. 2. Допускаемые напряжения для основного металла в металлоконструкциях вычисляют по формуле

$$[\sigma] = \frac{Rm}{K}, \quad (14)$$

где $R = (0,85 \div 0,9) \sigma_T$ — расчетное сопротивление с учетом неоднородности материала (σ_T — предел текучести материала); m — коэффициент, который принимают в зависимости от типа соединения и условий его работы, обычно $m = 0,8 \div 0,9$. K — коэффициент перегрузки, обычно $K = 1 \div 1,2$; для резервуаров с внутренним давлением $K = 1,2$; для подкрановых балок при тяжелом режиме работы $K = 1,3 \div 1,5$.

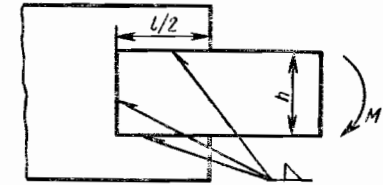


Рис. 9. К расчету соединений с комбинированным угловым швом

2. Допускаемые напряжения для сварных швов при статической нагрузке

Сварка	Допускаемые напряжения для сварных швов		
	при растяжении $[\sigma]_p$	при сжатии $[\sigma]_{сж}$	при сдвиге $[\tau]$
Автоматическая, ручная электродами Э42А и Э50А, в среде защитного газа, контактная стыковая	$[\sigma]_p$	$[\sigma]_p$	$0,65 [\sigma]_p$
Ручная электродами обычного качества	$0,9 [\sigma]_p$	$[\sigma]_p$	$0,6 [\sigma]_p$
Контактная точечная	—	—	$0,5 [\sigma]_p$

Примечание. $[\sigma]_p$ — допускаемое напряжение при растяжении основного металла соединяемых элементов.

В строительных конструкциях принимают расчетное сопротивление $R = 0,9 \sigma_T$. Значения R , принимаемые в ряде отраслей машиностроения, приведены в табл. 3.

3. Расчетные сопротивления R для низкоуглеродистых сталей

Марка стали	R в кгс/мм ² при		
	растяжении*	сжатии	срезе
Ст3, Ст4	21/18	21	13—15
14Г2, 10Г2С1, 15ХСНД	29/25	29	17—20
10ХСНД	34/29	34	20—24

* В числителе дроби приведены значения R для швов, контролируемых физическими методами, в знаменателе — обычными методами (визуальным и т. п.).

ВЛИЯНИЕ ОСНОВНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Усталостная прочность сварных соединений часто оказывается более низкой, чем сплошных деталей. Это объясняется следующими факторами: концентрацией напряжений, связанной с геометрией шва, несплошностями и т. п.; неравномерным распределением нагрузки вдоль шва (во фланговых швах и др.); остаточными напряжениями после сварки; литой структурой шва и околошовной зоны.

Стыковые соединения. Эти соединения по сравнению с соединениями других типов обладают повышенной прочностью благодаря невысокой концентрации напряжений. На рис. 10 в качестве примера показано распределение нормальных напряжений в поверхностных слоях образца. Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений в сварных соединениях приведены в табл. 4.

Стыковая сварка является основным видом соединения ответственных элементов конструкции.

На основании экспериментальных исследований и данных практики можно указать следующие основные факторы, существенно влияющие на усталостную прочность стыковых соединений.

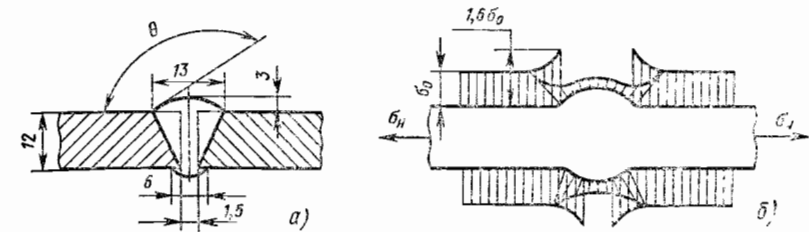


Рис. 10. Напряжения в стыковом соединении

Состояние поверхности основного металла в зоне шва. Пределы выносливости деталей из низкоуглеродистых сталей, сваренных без удаления окисных пленок с поверхности, ниже, чем у основного металла на 40—65% и практически не зависят от режима автоматической сварки и сварочных материалов (электродов, флюса). Для низколегированных и среднеуглеродистых сталей прочность снижается еще в большей мере.

Если окисную пленку удалить методами резания, то предел выносливости соединений повысится на 20 — 30%.

4. Эффективные коэффициенты концентрации напряжений в сварных соединениях

Элементы соединения и их характеристика	Коэффициент k_σ для стали	
	углеродистой	низколегированной
Сварные швы		
Стыковые швы (по оси шва) с полным проваром корня шва: при автоматической и ручной сварке и контроле шва просвечиванием	1,0	1,0
при ручной сварке без просвечивания	1,2	1,4
Угловые швы:		
поперечные (лобовые) при сварке:		
ручной	2,3	3,2
автоматической	1,7	2,4
продольные (фланговые), работающие на срез	3,5	4,5
Основной металл		
У перехода к стыковому шву с усилением:		
без механической обработки шва	1,5	1,9
с механической обработкой шва абразивным кругом или специальной фрезой и стыковании листов: одинаковой ширины и толщины	1	1
разной ширины	1,2	1,4
разной толщины	1,3	1,6
У перехода к лобовому шву при направлении усилия вдоль большего катета и отношении катетов 1-го и 2-го листов:		
$k_1/k_2 = 2$	2,3/1,2*	3,2/1,4*
$k_1/k_2 = 1,5$	2,7/1,5*	3,7/1,9*
У флангового шва	3,5	4,5
У косынок, приваренных встык и втавар:		
без механической обработки	2,7	3,3
с механической обработкой при плавных формах косынок	1,5	1,9
У косынок, приваренных внахлестку	2,7	3,3
У ребер жесткости и диафрагм, приваренных лобовыми швами с плавными переходами	1,5	1,9

* В числителе дроби дано значение k_σ для механически необработанного шва, в знаменателе — для механически обработанного шва.

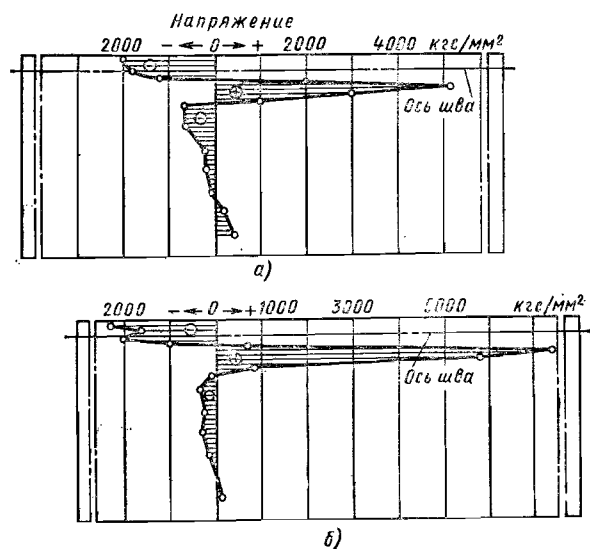


Рис. 11. Остаточные напряжения в сварном соединении

Форма и размеры сварного шва. Размеры шва характеризуются высотой усиления шва g , его шириной b и углом θ (см. рис. 10; $g = 3$ мм; $b = 13$ мм).

Рекомендуется выполнять швы с усилением при $\theta = 160 \div 170^\circ$ и отношении $b/g = 9 \div 11$, при этом эффективный коэффициент концентрации напряжений можно принимать по табл. 4. При $\theta = 120^\circ$ и $b/g = 3 \div 5$ значения k_σ из табл. 4 следует увеличивать в 2 раза.

При односторонней сварке, когда невидимая часть шва формируется на флюсо-медной подкладке с водяным охлаждением, можно получить предел выносливости, близкий к пределу выносливости основного металла.

В сварных конструкциях следует избегать пересечения швов, иначе предел выносливости соединений снизится на 17—30%.

Остаточные напряжения от сварки. Если распад аустенита в сталях происходит при высоких температурах (например, в низкоуглеродистых и низколегированных сталях), то после охлаждения шва в околошовных зонах образуются растягивающие остаточные напряжения с высоким градиентом (рис. 11, а). Со временем остаточные напряжения изменяются (см. рис. 11, б), что может привести к появлению трещин в околошовной зоне.

Остаточные растягивающие напряжения на 30—40% снижают сопротивление усталости стыковых соединений из сталей 22К, 15ГФ и др.

Во многих легированных сталях (например, 20Х2Н4А и др.) распад аустенита происходит при низких температурах. При охлаждении шва в таких материалах в околошовных зонах образуются сжимающие остаточные напряжения.

Для ответственных конструкций после сварки обязательно проводят отжиг (в среде аргона или в вакууме) для снятия остаточных напряжений.

Механическая обработка шва. Зачистка и снятие методами резания усиления шва способствует повышению усталостной прочности соединений вследствие снижения концентрации напряжений. Эффективным средством повышения сопротивления усталости стыковых соединений из низколегированной стали 15ХСНД и среднелегированных сталей 34ХМ, 40ХН и др. является сочетание механической зачистки шва и термической обработки (снятие остаточных напряжений и улучшение структуры металла околошовной зоны).

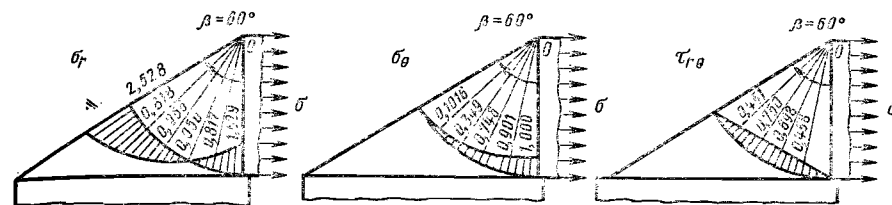


Рис. 12. Напряжения в лобовом шве

Обработка швов и околошовных зон методами поверхностного пластического деформирования (обдвка дробью, чекалка, обкатка роликком и др.) приводит к существенному повышению предела выносливости соединений. Особенно эффективно применение упрочняющей обработки для крупногабаритных деталей. В этом случае можно добиться равнопрочности основного металла и шва даже без обработки усиления шва методами резания. Повышение предела выносливости на таких деталях составляет 50—100%.

5. Пределы выносливости стыковых сварных соединений из низколегированных сталей при симметричном и пульсирующем циклах

Сталь	Пределы выносливости, кгс/мм ²		Сталь	Пределы выносливости, кгс/мм ²	
	σ_{-1}	σ_0		σ_{-1}	σ_0
14Г2	9,7	—	10Г2С1*	6,8	—
15ГФ	10,3	—	10Г2С1Д*	6,8	11
20Г	8,9	—	10ХСНД*	8,0	16
10Г2С1Д	7,0	15	15ХСНД**	7,0	9,8
09Г2С	7,3	15	15Г2СФД	7,2	—

* Термообработанная.
** Горячекатаная.

В табл. 5 приведены значения пределов выносливости стыковых соединений при симметричном (σ_{-1}) и пульсирующем (σ_0) циклах нагружений.

Иногда для усиления стыкового соединения лобовыми швами приваривают накладку. В результате этого усталостная прочность соединений снижается на 30—40%.

Нахлесточные соединения. В отличие от стыковых нахлесточные соединения имеют более высокую концентрацию напряжений. На рис. 12 показано распределение радиальных σ_r , окружных σ_θ и касательных τ_{θ} напряжений в нахлесточных соединениях с лобовыми швами. При уменьшении β до 45° концентрация напряжений возрастает, а усталостная прочность снижается на 20%. Применение пологих катетов ($\beta > 60^\circ$) в сочетании с механической обработкой швов позволяет повысить предел выносливости соединений на 30%.

Значения теоретических коэффициентов концентрации напряжений в соединениях с лобовыми швами даны в табл. 6.

Соединения с фланговыми швами имеют большую концентрацию напряжений, чем соединения с лобовыми швами. Последнее связано с неравномерным распределением нагрузки вдоль шва (рис. 13, а). Поэтому в динамически нагруженных конструкциях нежелательно использовать соединения с фланговыми швами.

В соединениях с фланговыми и лобовыми швами последние улучшают распределение нагрузки и повышают усталостную прочность соединений на 34—50%. Предел выносливости таких соединений с необработанными швами составляет в ряде случаев

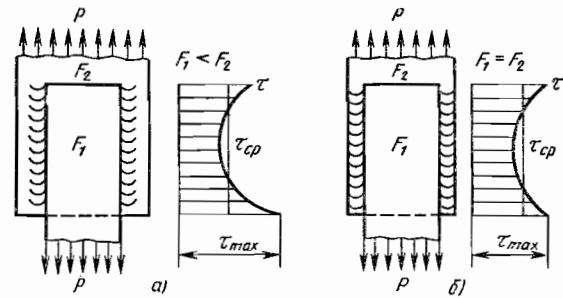


Рис. 13. Распределение нагрузки по длине нахлесточного соединения

30—45% от предела выносливости цельной пластины. Высокий отпуск после сварки нахлесточных соединений не изменяет прочности. Поверхностный наклеп повышает усталостную прочность на 25% соединений с фланговыми швами и на 60% — с лобовыми швами.

6. Теоретические коэффициенты концентрации напряжений в нахлесточных соединениях с лобовыми швами

Характеристика углового шва	α_σ	
	у кромки	у корня
$\beta = 60^\circ$ (см. рис. 12)	2,5	2,5
$\beta = 45^\circ$	3,5	3,5
$\beta = 45^\circ$, шов с непроваром	4,0	4,0
$\beta = 45^\circ$, шов с глубоким непроваром	3,0	3,0
Тангенциальный вогнутый профиль	1,5	3,5
Нетангенциальный вогнутый профиль	3,0	4,0
Выпуклый профиль	4,0	4,0

С увеличением площади поперечного сечения накладки F_1 (например, за счет толщины накладки) предел выносливости соединений возрастает, так как максимум нагрузки смещается в этом случае в сторону основного листа с площадью поперечного сечения F_2 (рис. 13, б).

В нахлесточных соединениях низколегированные высокопрочные стали не имеют преимуществ по сравнению с углеродистыми конструкционными сталями.

Усталостная прочность нахлесточных соединений, полученных контактной сваркой (точечной и шовной) низкая, что связано с высокой концентрацией напряжений в шве (табл. 7).

7. Эффективные коэффициенты концентрации напряжений в соединениях, полученных контактной сваркой

Марка стали или сплава	Толщина листов, мм	Состояние	k_σ
10	3—3	Нормализованная	7,5/3
12X18H9T 30XГСА	1,5—1,5	Нагартованная	12/7,5
		Высокий отпуск	12/—
ВТ1 Д16Т		В состоянии поставки	10/5 5,5/2,25

Примечание. В числителе дроби указаны значения k_σ для точечной сварки, а в знаменателе — для шовной.

Тавровые соединения. Концентрация напряжений в тавровых соединениях существенно выше, чем в стыковых, и зависит от подготовки кромок и степени проплавления (рис. 14)

Цифрами на рис. 14 показаны значения нормальных напряжений в кгс/мм² в различных сечениях шва.

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений в тавровых соединениях с неподготовленными кромками и без проплавления изменяются от 2 до 4,5, а теоретические — от 3,4 до 5.

Для тавровых соединений с малой глубиной проплавления (рис. 15, а—в) менее прочным является сечение по сварному шву. В соединениях с разделкой кромок элементов при наличии глубокого проплавления (рис. 15, г—е) эффективные коэффициенты концентрации напряжений k_σ изменяются от 1,1 до 1,7. Меньшие значения k_σ получают при тщательном выполнении сварки со сквозным проплавлением.

В соединениях толстых листов получение полного провара затруднено и удорожает изготовление сварных конструкций. Наиболее рациональным в тавровых соединениях при больших толщинах принято считать применение частичного скоса кромок с сохранением непроваренной щели (см. рис. 15, в), отрицательное влияние которой можно компенсировать повышенной прочностью сварных швов. Исследования показали, что при ширине щели до 50% от толщины листов, несущая способность соединений не снижается.

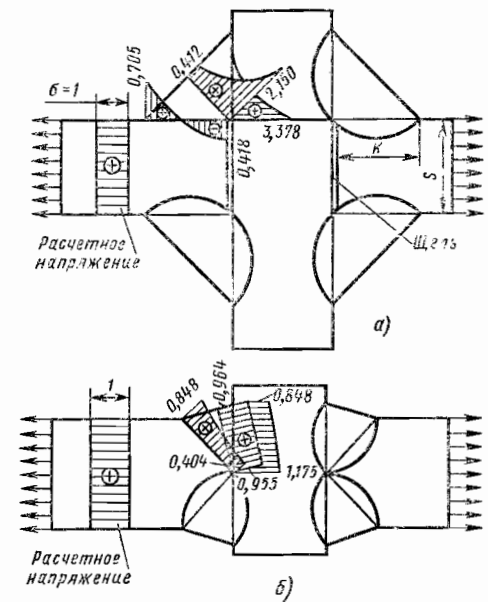


Рис. 14. Напряжения в тавровом соединении: а — детали перед сваркой без скоса кромок; б — детали с двусторонним скосом кромок

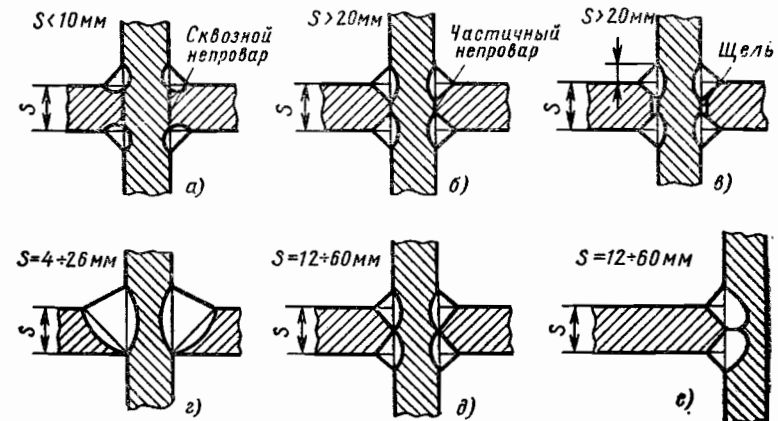




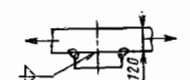
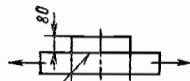
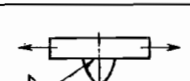
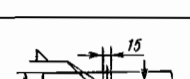
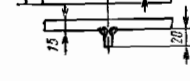
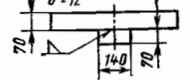
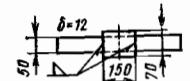



Рис. 15. Тавровые соединения

8. Усталостная прочность соединений с конструктивными элементами

Эскиз соединения	Основной металл	r	σ_{\max} , кгс/мм ²	k_{σ}
	Углеродистая сталь $\sigma_B = 37,7$ кгс/мм ² ; $\sigma_T = 24,5$ кгс/мм ²	0	20—22	1,2 (шов обработан)
			18—21	1,3
			19—21	1,25 (шов обработан)
			16—18	1,5
			20,5	1,2 (шов обработан)
			17,5	1,4
			18,5	1,35
	8	2,6		
	8,8	2,6		
	16	1,6 (шов обработан)		
	Углеродистая сталь $\sigma_B = 53$ кгс/мм ² $\sigma_T = 36$ кгс/мм ²	0,2	16—17	—
	Ст3сп $\sigma_B = 40,3$ кгс/мм ² $\sigma_T = 24,2$ кгс/мм ²	-1,0	5,5	2,9
	Ст3сп $\sigma_B = 43$ кгс/мм ² $\sigma_T = 30,5$ кгс/мм ²	0	11,6	—
	Ст3сп $\sigma_B = 43$ кгс/мм ² $\sigma_T = 30,5$ кгс/мм ²	-1,0	9,6	1,5

Соединения с конструктивными элементами. В ряде конструкций к основным силовым элементам приваривают различные конструктивные и связующие элементы (косынки, ребра, планки, накладки и др.), образующие обычно тавровые и угловые соединения. В таких конструкциях через сварные швы, как правило, не передается нагрузка на основной элемент. Однако при нагружении основного элемента в зоне присоединения дополнительного элемента создается значительная концентрация напряжений из-за резкого изменения сечения.

Усталостная прочность конструкции в результате присоединения элементов может снизиться в несколько раз (табл. 8). Фланговые швы снижают усталостную прочность в большей степени, чем лобовые.

Для уменьшения концентрации напряжений следует применять косынки с плавным очертанием и механической обработкой места перехода.

Сопоставление пределов выносливости однотипных сварных соединений из низколегированных сталей показывает, что химический состав и механические свойства сталей практически мало влияют на усталостную прочность соединений в исходном состоянии (без обработки). Выносливость соединений практически не изменяется даже после термического упрочнения сталей и зависит главным образом от амплитуды переменных напряжений цикла (табл. 9, при коэффициенте асимметрии $r = 0$ $\sigma_a = \frac{1}{2} \sigma_r$, при $r = -1$ $\sigma_a = \sigma_r$).

9. Максимальные разрушающие напряжения $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ для сварных соединений из низкоуглеродистых сталей ($N = 10^7$ циклов)

Соединение	σ_{\max} в кгс/мм ² при r		
	-1	0	+0,3
Стыковое, выполненное автоматической или ручной сваркой, при обычном усилии шва	6,9	13,0	18,6
Стыковое в случае пересечения его продольным швом	5,2	10,6	—
Стыковое трапециевидных фасонек	5,5	11	—
Со вспомогательными элементами (планками, ребрами и т. д.) лобовыми швами при отношении катетов 1:1	4	9	12
Нахлесточное с сваркой по контуру	3,5	6,8	—
Нахлесточное с фланговыми швами	2,3	5,8	7,8

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Если среднее напряжение цикла σ_m и амплитуда σ_a возрастают пропорционально при нагружении соединения, то запас прочности

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a k_{\sigma} + \psi_{\sigma} \sigma_m}, \quad (15)$$

где σ_{-1} — предел выносливости материала с учетом масштабного фактора; k_{σ} — эффективный коэффициент концентрации напряжений (табл. 4); ψ_{σ} — коэффициент, учитывающий влияние на сопротивление усталости асимметрии цикла, $\psi_{\sigma} = 0,1 \div \pm 0,2$ для стыковых соединений из низкоуглеродистых сталей, $\psi_{\sigma} = 0,2 \div 0,3$ — то же, для средне- и низкоуглеродистых сталей.

Если при нагружении соединения возрастает лишь амплитуда переменных напряжений, то запас по переменным напряжениям (например, в случае резонансных колебаний сварных деталей)

$$n_a = \frac{\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_m}{\sigma_a k_{\sigma}}. \quad (16)$$

Обычно $n_{\sigma} \geq 2$, $n_a \geq 2,5$.

В крано- и мостостроении расчет сварных конструкций при переменных нагрузках выполняют по допускаемым напряжениям, которые получают умножением допускаемых значений напряжений при статических нагрузках $[\sigma]_p$ на коэффициент γ , получаемый опытным путем:

$$\gamma = \frac{1}{(ak_{\sigma} \pm b) - (ak_{\sigma} \mp b) r}, \quad (17)$$

где a и b — коэффициенты, характеризующие материал, в краностроении для углеродистой стали принимают $a = 0,6$, $b = 0,2$; в мостостроении для низкоуглеродистых сталей $a = 0,9$, $b = 0,3$ и для низколегированных сталей $a = 0,95$, $b = 0,35$; k_{σ} — эффективный коэффициент концентрации напряжений; r — коэффициент асимметрии цикла.

Верхние знаки в знаменателе дроби формулы (17) соответствуют расчету при растягивающих σ_{\max} , нижние — при сжимающих σ_{\max} . Если конструкция рассчитывается на ограниченный срок службы: $N_p < N_{\sigma}$ (где N_p и N_{σ} — соответственно число циклов обработки конструкции за ресурс и базовое число циклов, соответствующее перегибу кривой усталости на уровне предела выносливости), то формула (17) уточняется:

$$\gamma^* = \gamma \sqrt[3]{\frac{N_{\sigma}}{N_p}},$$

где

$$v = \frac{11,2}{k_{\sigma}}.$$

Для предварительной оценки N_p можно пользоваться нормами для крановых конструкций, установленными Европейской административной федерацией [4]:

Интенсивность использования	N_p^* (циклов)
Случайное, периодическое	$6,3 \cdot 10^4$
Постоянное неинтенсивное	$2,0 \cdot 10^6$
» интенсивное	$6,3 \cdot 10^6$
Непрерывное очень интенсивное	$2,0 \cdot 10^8$

Расчет на усталостную прочность соединений, полученных контактной сваркой выполняют аналогично.

ПАЯНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Паяные конструкции получили широкое распространение в различных отраслях машиностроения и в ряде случаев вытесняют сварные соединения.

Пайкой изготавливают не только отдельные детали, но и сложные крупногабаритные узлы.

При конструировании паяных изделий важное значение имеют выбор припоя и способа пайки.

При выборе основного металла следует учитывать паяемость его припоями, обеспечивающими требуемую прочность, чувствительность основного металла к нагреву и склонность его к образованию трещин под действием расплавленных припоев, проникающих между кристаллами по границам зерен.

Например, пайку сталей латунию применяют в ограниченном масштабе, так как медь является основным компонентом, вызывающим охрупчивание соединений. Поэтому в серебряные и никелевые припои для деталей, работающих при повышенной температуре, не вводят медь [2]. Для уменьшения склонности к хрупкому разрушению рекомендуется наносить на детали никелевое покрытие.

При паянии разнородных металлов необходимо учитывать различие в коэффициентах их термического расширения.

При высокотемпературной пайке ряда разнородных металлов (например, титана с медью и никелем, магния со сталью, алюминия с медью и др.) невозможно полу-

чить пластичные и прочные соединения без нанесения на них барьерных покрытий, предохраняющих разнородные металлы от активного взаимодействия и, как следствие, возникновения в паяном шве хрупких интерметаллидов.

В качестве барьерного покрытия наносят такой металл, который легко паяется и образует прочные связи с основным конструкционным материалом.

Припои должны хорошо смачивать покрытие и другой металл (без покрытия), не образуя с ними интерметаллиды.

Например, для пайки стали с титаном на последний наносят молибденовое покрытие, затем осуществляют пайку медными или серебряными припоями.

В табл. 10 приведены механические характеристики и области применения некоторых припоев. Для пайки жаропрочных сталей и сплавов используют припои на основе никеля, марганца и палладия с добавками других элементов (хрома, кобальта, циркония и др.), а также твердые и газообразные флюсы.

10. Механические характеристики и области применения распространенных припоев

Марка припоя	Основа	$\sigma_{\text{в}}$, кгс/мм ²	δ , %	Назначение
ВПр 1 ВПр 2 ВПр 4	Медь	84—90 33—44 69—76	12—18 22—46 9—13	Припои теплостойкие для пайки трубопроводов, лопаток газовых турбин и других деталей и узлов из коррозионно-стойкой стали
Л63 (проволака)	Медь	45	2	Для пайки стальных изделий неответственного назначения, а также для пайки сталей с нагартовкой при неравномерном нагреве
ПСр 40 ПСр 45	Серебро	38—44 37—51	18—37 16—35	Для пайки трубопроводов, патрубков и других деталей и узлов из конструкционных и коррозионно-стойких сталей. Могут работать до температур 350—450°С
ПОС 90 ПОС 61 ПОС 40	Олово и свинец	4,3 4,1 3,6	25 34 32	Внутренние швы медицинской аппаратуры, детали электротехнической и приборостроительной промышленности

Пайку в атмосфере газообразных флюсов (фтористый водород, трехфтористый бор и др.) производят в герметичных контейнерах, нагреваемых в печах.

Пайку нержавеющих сталей, жаропрочных и титановых сплавов, керамики и тугоплавких металлов производят часто в вакууме (в вакуумных печах)

На качество соединения существенное влияние оказывает величина паяльного зазора (табл. 11) и условий течения припоя в нем. Чем лучше припой смачивает поверхность основного металла, тем меньшим можно назначить зазор. При активном растворении основного металла расплавленным припоем зазоры устанавливают большими, так как припои повышают температуру плавления и хуже растекаются. При увеличении зазоров прочность паяного соединения уменьшается из-за образования пустот, незаполненных припоем, флюсовых включений и т. п.

Указанные в табл. 11 зазоры должны быть выдержаны при нагреве до температуры пайки.

Прочность паяных соединений существенно зависит от прочности припоя и активности взаимодействия расплавленного припоя и основного металла. При активном растворении припоя в металле прочность соединений на 30—60% выше прочности припоя.

Механические характеристики паяных соединений приведены в табл. 12—15. При повышении температуры окружающей среды прочность соединений снижается.

11. Зазоры, применяемые при пайке металлов

Основной металл	Основа припоя	Зазор, мм
Углеродистые стали	Медь Латунь Серебро	0,02—0,15 0,05—0,30 0,05—0,15
Коррозионно-стойкие стали	Медь Латунь Серебро Никель — хром	0,05—0,12 0,05—0,30 0,05—0,12 0,05—0,10
Жаропрочные стали и сплавы	Никель Палладий	0,05—0,10 0,05—0,10
Титановые сплавы	Серебро Серебро — марганец	0,03—0,10 0,03—0,10
Медь и медные сплавы	Медь — цинк Медь — фосфор Серебро	0,10—0,30 0,02—0,15 0,03—0,15
Алюминиевые сплавы	Алюминий	0,10—0,30

Для соединений, работающих при повышенных температурах, целесообразно применять припой, легированные марганцем (ПСр 37,5) и никелем (ПСр 40). Жаропрочные припои на основе меди (табл. 14) могут работать до температуры 600° С. С помощью жаропрочных припоев на основе никеля получают соединения с рабочей температурой до 900° С.

Прочность соединений, паянных оловянно-свинцовыми припоями, составляет 3—6 кгс/мм² (табл. 15).

В паяных конструкциях в основном следует применять соединения внахлестку (особенно в герметичных соединениях, рис. 16). В соединениях необходимы вентиляционные отверстия для отвода газов, создающих давление при нагреве во время пайки (рис. 17).

При пайке фланцев к трубам следует предусматривать посадочный пояс и упор на трубе или фланце (рис. 18), а при пайке конструкции с плотной посадкой деталей канавки для лучшего затекания припоя.

При конструировании соединения, пайка которого будет производиться в печи и других установках, следует предусматривать специальные пазы или выемки для укладки на место спая припоя в виде порошка, пасты, проволоки, полос, шайб или нанесения припоев гальваническим способом, с термовакуумным напылением и т. д. (рис. 19).

12. Прочность при срезе паяных соединений

Основной металл	Прочность на срез в кгс/мм ² для припоев	
	ПСр 40	ПСр 45
12X18H9T	24—29	13—26
40XН2МА	33—46	—
30ХГСА	35—46	35—41
Медь	25	25

В конструкциях, где припой укладывают в виде шайб, фольги или тонкой полосы, необходимо обеспечить возможность перемещения паяных деталей в сторону уменьшения зазора (например, за счет прижимов и т. д.). Паз или выемку для укладки припоя выполняют, как правило, на детали, имеющей большее сечение.

Расчет на прочность паяных соединений производят так же, как и расчет сварных соединений. Контроль качества паяных соединений аналогичен контролю сварных соединений.

13. Прочность при срезе паяных соединений внахлестку при повышенных температурах

Основной металл	Припой	Предел прочности в кгс/мм ² при температуре, °С			
		200	300	400	600
12X18H9T	ПСр 45 ПСр 37,5	—	16—24 31—35	14,5—15	3—4 11—18
15X18H12C4TЮ	ПСр 40	22—32	15—17	5—9	—

14. Прочность при срезе соединений, паяных жаропрочным припоем на основе меди ВПр1

Основной металл	Предел прочности σ_B в кгс/мм ² при температуре, °С					
	-60	20	200	400	500	600
12X18H9T	43—58	37—50	30—40	19—22	—	9—16
X15H9Ю	25—30	21—30	20—30	19—24	12—20	—
X17H5M3	19—22	21—25	19—23	21—25	9—13	—

15. Прочность при срезе соединений, паяных оловянно-свинцовым припоем ПОС 40

Основной металл	Предел прочности τ_B в кгс/мм ² при температуре, °С					
	-196	-183	-96	-60	20	85
M3	3,5	3,3	3,4	3,5	2,7	1,6
L62	2,9	2,9	3,1	2,7	2,2	1,4
Сталь 20	6,0	5,5	5,5	5,1	2,8	2,2
12X18H9T	3,0	3,4	3,0	5,0	3,2	2,0

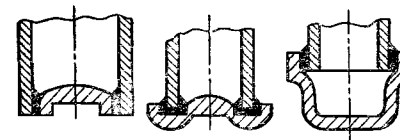


Рис. 16. Паяные соединения внахлестку

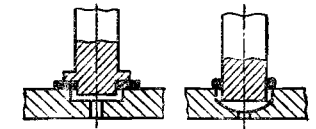


Рис. 17. Соединения с вентиляционными отверстиями

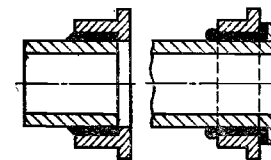


Рис. 18. Соединения с посадочным пояском и упором

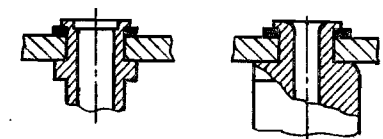


Рис. 19. Укладка припоя

В машиностроении наиболее распространены прямые валы в форме тел вращения, устанавливаемые в подшипниковых опорах.

Валы, передающие только крутящий момент от одной детали к другой, называют торсионными (рессорами).

Часто передача крутящего момента связана с появлением осевых и радиальных сил. В результате валы обычно подвержены действию крутящего и изгибающего моментов, а также перерезывающих и продольных сил.

Реже встречаются валы, используемые лишь для поддержания вращающихся деталей и не передающие полезного крутящего момента. Такие валы называют осями.

Для обеспечения работоспособности валы и оси должны удовлетворять условиям прочности, жесткости и технологичности.

В специальных конструкциях к валам предъявляют дополнительные требования: износостойкости, устойчивости, минимальной массы и т. п.

КОНСТРУКТИВНЫЕ ФОРМЫ И МАТЕРИАЛЫ ВАЛОВ

В зависимости от распределения нагрузок вдоль оси вала и условий сборки прямые валы выполняют ступенчатыми (рис. 1, а) или гладкими¹ (рис. 1, б).

Более распространены валы ступенчатые, близкие по форме к балкам равного сопротивления изгибу. Такие валы удобны при сборке, а уступы используют обычно для упора деталей, насаживаемых на вал, и передачи осевых усилий. При конструировании ступенчатых валов необходимо иметь в виду, что любая насаживаемая неразъемная деталь должна проходить до своего места посадки на валу без натяга (во избежание ослабления посадок из-за повреждения поверхностей).

Диаметры посадочных поверхностей (под ступицы колес, звездочек и др.) следует выбирать из стандартного ряда посадочных размеров, а диаметры посадочных поверхностей под подшипники качения — из стандартного ряда внутренних диаметров подшипников.

Конструктивная форма зависит от нагрузок на вал и, как следствие, от способа соединения вала с насаживаемыми на него деталями.

При больших крутящих моментах и повышенных требованиях к центрированию применяют шлицевые соединения (см. гл. 5). Для снижения напряжений на шлицевых участках валов целесообразно увеличивать внутренний диаметр шлицев на 15—20% по сравнению с диаметром вала (рис. 2). Входные кромки шлицев на валу должны иметь фаски для облегчения монтажа и снижения контактных давлений при работе.

Если соединение передает (помимо крутящего момента) осевое усилие, то осуществляют затяжку соединения, фиксируя его в осевом направлении с помощью упорного буртика, который выполняют обычно на гладкой части вала.

При средних значениях крутящего момента и менее высоких требованиях к точности центрирования применяют шпоночные соединения (см. гл. 5). При действии осевых усилий соединяемые детали также фиксируются в осевом направлении затяжкой (рис. 3). Для зубчатых колес 7-й степени точности и выше рекомендуется применять шлицевые соединения независимо от величины крутящего момента.

Если шпоночное соединение собирается с гарантированным натягом, то необходимо предусмотреть возможность направления паза ступицы на шпонку до начала участка с натягом (например, за счет удлиненной направляющей фаски и т. д.)

Соединение валов и ступиц (шкворней, колес и др.) часто осуществляют с гарантированным натягом (см. гл. 6). В таких соединениях имеется довольно высокая концентрация напряжений (см. стр. 101). При конструировании валов следует предусмотреть меры по снижению концентрации напряжений вблизи кромок ступиц.

¹ В последние годы гладкие валы благодаря технологичности находят все более широкое применение.

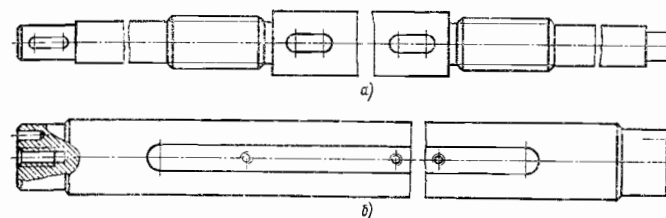


Рис. 1. Прямые валы

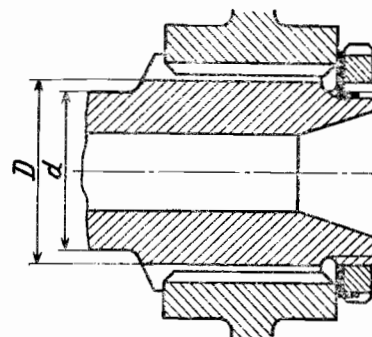


Рис. 2. Шлицевое соединение

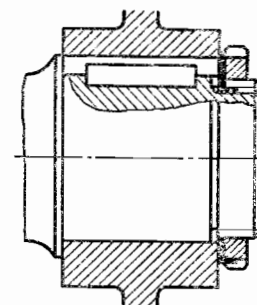


Рис. 3. Соединение шпонкой

Диаметр подступичной части вала для этих же целей следует увеличивать на 5—10% по отношению к соседним участкам. Для повышения усталостной прочности подступичную часть вала желательно упрочнить поверхностным пластическим деформированием.

Для посадки подшипников на валах делают заплечики или упорные буртики (рис. 4), их высота должна находиться в соответствии с размерами скруглений на кольцах подшипников и условиями демонтажа подшипников.

Переходные участки валов между соседними ступенями разных диаметров выполняют с полукруглой канавкой для выхода шлифовального круга (рис. 5, а), галтелью постоянного радиуса (рис. 5, б) и галтелями специальной формы (см. рис. 4).

Сопряжение шейки подшипника с соседним участком вала обычно осуществляют галтелью постоянного радиуса ($t/r = 3$, $r/d = 0,2 \div 0,4$).

В ряде конструкций применяют прямые полые валы. Канал уменьшает массу вала, его используют для размещения соосного вала, деталей управления, подачи масла, охлаждающего воздуха и т. п.

Часто для подвода масла к подшипникам или других целей вал изготавливают со сквозным поперечным отверстием, создающим высокую концентрацию напряже-

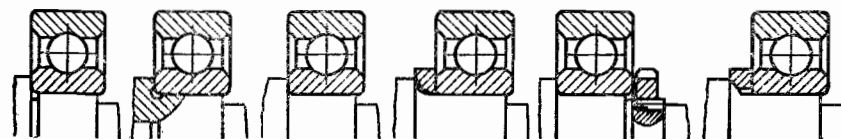


Рис. 4. Сопряжения ступеней вала

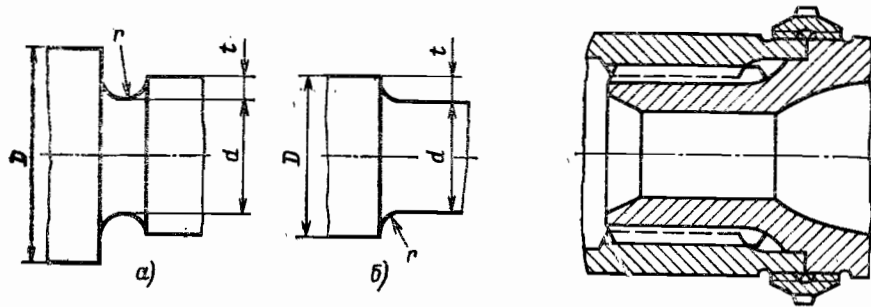


Рис. 5. Галтели на валах

Рис. 6. Шлицевое соединение валов

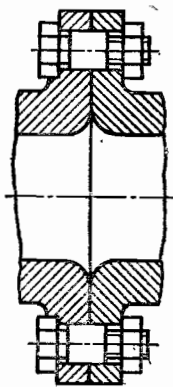


Рис. 7. Фланцевое соединение валов

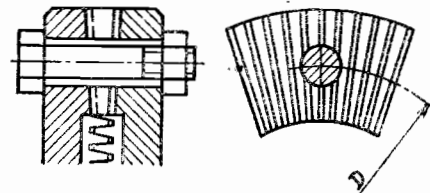


Рис. 8. Соединение с помощью торцовых шлицев

ний. Для повышения прочности валов отверстия подвергают дорнованию (шариком или дорном, см. гл. 34), края отверстий скругляют.

Длинные валы выполняют составными. Соосные валы соединяют с помощью шлицевых соединений (шлицевых муфт, рис. 6) или фланцевых соединений (рис. 7). Для передачи больших крутящих моментов и при ограниченных осевых габаритах используют соединения с торцовыми радиальными шлицами эвольвентного или, реже, треугольного профиля (рис. 8). Протяженность торцовых шлицев иногда сокращают, выполняя их секторами на участках между болтами. Подобным образом осуществляют соединения валов с дисками компрессоров и турбин.

Для изготовления валов в основном используют углеродистые стали марок 20, 30, 40, 45 и 50, а также легированные стали марок 20X, 40X, 40XH, 30XГСА, 40XH2MA, 18X2H4MA и др. (табл. 1).

Выбор материала, термической и химико-термической обработки определяется конструкцией вала (например, валы-шестерни изготавливают из низкоуглеродистых легированных сталей марок 12XH3A, 12X2H4A и других с последующей цементацией) и опор, требованиями к конструкции и условиям эксплуатации.

Быстроходные валы, вращающиеся в подшипниках скольжения, требуют высокой твердости цапф, поэтому их изготавливают из цементруемых сталей 12X2H4A, 20X, 18XГТ или азотируемых сталей 38X2MЮА и др.

1. Механические характеристики основных материалов валов

Марка стали	Диаметр заготовки, мм (не более)	Твердость НВ, не менее	σ_B	σ_T	σ_{-1}	τ_{-1}	Коэффициенты*	
			кгс/см ²				ψ_σ	ψ_τ
Ст5	Не ограничен	190	52	28	22	13	0	0
45	Не ограничен	200	56	28	25	15	0	0
	120	240	80	55	35	21	0,1	0
	80	270	90	65	38	23	0,1	0,05
40X	Не ограничен	200	73	50	32	20	0,1	0,05
	200	240	80	65	36	21		
	120	270	90	75	41	24		
40XH	Не ограничен	240	82	65	36	21	0,1	0,05
	200	270	92	75	42	25		
20 20X 12XH3A 12X2H4A 18XГТ	60	145	40	24	17	10	0	0
	120	197	65	40	30	16	0,05	0
	120	260	95	70	42	21	0,1	0,05
	120	300	110	85	50	25	0,15	0,1
	60	330	115	95	52	23	0,15	0,1
30XГТ	Не ограничен	270	95	75	45	26	0,1	0,05
	120	320	115	95	52	31	0,15	0,1
	60	415	150	120	65	33	0,2	0,1

* См. стр. 138.

ОСНОВНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ

Технические условия на изготовление валов зависят от требований к конструкции. Обработку валов производят, как правило, в центрах.

Наиболее жесткие требования по точности и шероховатости поверхности предъявляются к шейкам валов, на которые устанавливают подшипники качения.

Овальность и конусность мест посадки не должны превышать 0,5 допуска на диаметр, а для подшипников классов точности 5, 4 и 2 — 0,25 допуска на диаметр.

Биеение заплечика для подшипников классов точности 0 и 6 не должно превышать 0,02—0,03 мм, а для подшипников классов точности 5, 4 и 2 — 0,003—0,018 мм.

Контроль шеек осуществляют индикатором или миниметром.

Параметры шероховатости поверхности шеек под подшипники принимают равными $Ra = 0,032 \pm 1,25$ мкм.

Допуски на относительное радиальное биеение шеек валов для посадки зубчатых колес, муфт, шкивов и других подобных деталей в зависимости от их окружной скорости по внешнему диаметру составляют $(0,7-2) \delta$ (здесь δ — допуск на диаметр контролируемой шейки вала; меньшее значение соответствует окружной скорости $v > 10$ м/с).

Допуски на биеение упорных буртиков валов в зависимости от диаметра вала, окружной скорости сопряженных с валом деталей, а также кинематической точности зубчатых колес изменяются от 0,01 до 0,06 мм (большие значения назначают при диаметрах вала выше 55 мм).

Допуски на перекос и несимметричность расположения шпоночных пазов на валу составляют соответственно $0,5\delta$ и 2δ (здесь δ — допуск на ширину шпоночного паза). Если деталь устанавливают на двух шпонках, то допуск на их несимметричность принимают равным $0,5\delta$.

Технологический контроль вала включает проверку диаметральных и линейных размеров (скобами и универсальными измерительными средствами) ступеней, взаимного расположения обработанных поверхностей, чистоты обработки и твердости.

НАГРУЗКИ НА ВАЛЫ И РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ

Для оценки прочности необходимо знать действительное распределение напряжений в сечениях вала от внешних нагрузок (постоянных и переменных).

Внешние нагрузки передаются на валы от сопряженных деталей (зубчатых колес, муфт и др.) и могут быть определены путем расчета (стационарные устройства при установившихся режимах работы: конвейеры с непрерывным питанием, грузоподъемные устройства и т. п.).

Если внешние нагрузки известны, то при расчетном определении внутренних силовых факторов в сечениях вал рассматривают как балку, шарнирно закрепленную в жестких опорах (рис. 9, а)*. Такая модель формы вала и условий закрепления близка к действительности для валов, вращающихся в опорах качения.

При установке в опоре двух подшипников качения (рис. 9, б) большую часть нагрузки будет воспринимать внутренний подшипник. В этом случае условную опору можно поместить либо во внутренний подшипник, либо так, как показано на рис. 9, б. В более точных расчетах вал рассчитывают как многоопорную балку (рис. 9, б) на упругих опорах с осадкой (вертикальным смещением) в см [1]

$$\delta = \left[k + \frac{0,1}{bd} \left(1 + \frac{d}{D} \right) \right] P,$$

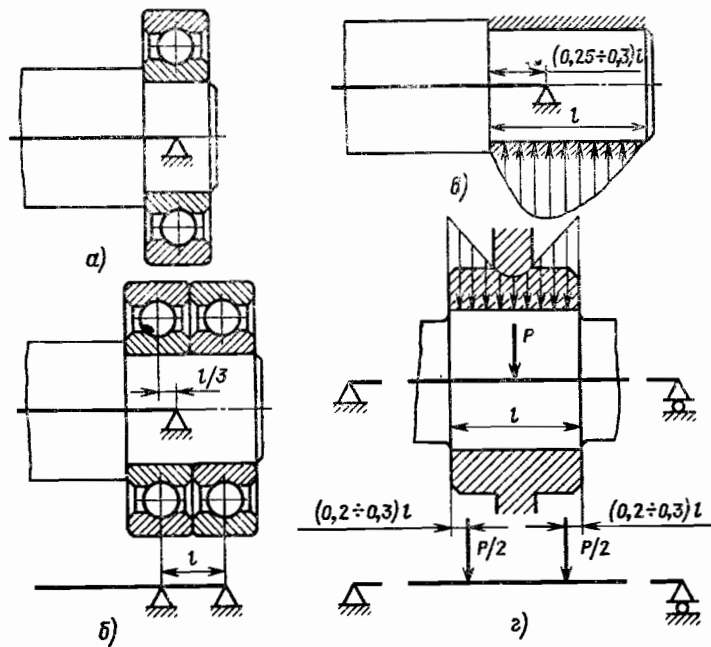


Рис. 9. Расчетные схемы опор валов

* Введение условных шарнирных опор эквивалентно замене контактных давлений на вале от подшипника сосредоточенной силой (силами).

где k — коэффициент; $k = \frac{0,7 + 0,2d}{\sqrt[3]{P}}$ — для однорядного радиального шарикоподшипника; $k = 0,32 + 0,0026d$ — для цилиндрического роликоподшипника; $k = 0,019 + 0,0015d$ — для конического роликоподшипника широкой серии; $k = 0,022 + 0,0015d$ — для конического роликоподшипника нормальной серии; b — ширина кольца; d и D — соответственно внутренний и наружный диаметры подшипника, см; P — радиальная нагрузка, кгс. Обычно $\delta/P = (5 \div 10) \cdot 10^{-6}$ см/кгс.

Условную опору для валов, опирающихся по концам на подшипники скольжения, располагают на расстоянии $(0,25 - 0,3) l$ от внутреннего торца (см. рис. 9, в), но не далее $0,5d$ от внутренней кромки подшипника [1].

Смещение опоры от центра подшипника в сторону внутреннего торца связано со смещением в эту сторону максимальных контактных давлений вследствие деформации вала и подшипника.

В уточненном расчете следует учесть распределение давлений по длине контакта цапфы и подшипника, рассматривая упругий контакт вала и подшипника через условный контактный слой (см. гл. 29).

Нагрузки от дисков, шкивов, зубчатых колес и других деталей также передаются на валы через площадки контакта. Распределение давлений (напряжений) в зонах контакта зависит от ряда конструктивных и технологических факторов (см. гл. 29), а расчетное определение этих давлений в соединениях и передачах связано со значительными математическими трудностями. В приближенных расчетах валов обычно не учитывают распределение нагрузок по длине зубьев зубчатых колес и шлицевых соединений, вдоль шпонок, вкладышей подшипников скольжения и других деталей, и при составлении расчетной схемы вала эти давления обычно заменяют эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в середине площадки (площадок) контакта¹.

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ, ЖЕСТКОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ВАЛОВ

Основными для валов являются постоянные и переменные нагрузки от деталей передач и рабочих дисков (например, дисков компрессора, турбины и др.).

Переменные напряжения в валах могут вызываться изменяющейся по времени внешней нагрузкой.

Постоянные по величине и направлению силы передач вызывают во вращающихся валах переменные напряжения, изменяющиеся по симметричному циклу. Валы могут быть нагружены и постоянными напряжениями (например, от неуравновешенности вращающихся деталей).

На статическую прочность валы рассчитывают по наибольшей возможной кратковременной нагрузке (с учетом динамических и ударных воздействий), повторяемость которой мала и не может вызвать усталостного разрушения.

Так как валы в основном работают в условиях изгиба и кручения, а напряжения от продольных усилий не велики, то эквивалентное напряжение в точке наружного волокна

$$\sigma_{\text{эв}} = \sqrt{\sigma_n^2 + 3\tau_k^2}, \quad (1)$$

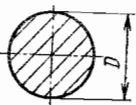
где σ_n — наибольшее напряжение при изгибе моментом M_n ; $\sigma_n = \frac{M_n}{W_n}$; τ_k — наибольшее напряжение при кручении моментом M_k ; $\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$; W_n и W_k — соответственно

осевой и полярный моменты сопротивления сечения вала (табл. 2—5),

$$W_n = \frac{\pi D^3}{32}; \quad W_k = 2W_n = \frac{\pi D^3}{16}.$$

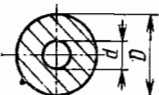
¹ Такая схематизация нагрузок справедлива при малой протяженности площадки контакта.

2. Моменты сопротивления и площадь сечения сплошных круглых валов



D , мм	$W_{и'}$, см ³	$W_{к'}$, см ³	F , см ²	D , мм	$W_{и'}$, см ³	$W_{к'}$, см ³	F , см ²
20	0,785	1,571	3,14	75	41,4	82,8	44,2
21	0,909	1,818	3,46	78	46,6	93,2	47,8
22	1,045	2,090	3,80	80	50,3	100,5	50,3
23	1,194	2,39	4,15	82	54,1	108,3	52,8
24	1,357	2,71	4,52	85	60,3	120,6	56,7
25	1,534	3,07	4,91	88	66,9	133,8	60,8
26	1,726	3,45	5,31	90	71,6	143,1	63,6
28	2,16	4,31	6,16	92	76,5	152,9	66,5
30	2,65	5,30	7,07	95	84,2	168,3	70,9
32	3,22	6,43	8,04	98	92,4	184,8	75,4
34	3,86	7,72	9,08	100	98,2	196,4	78,5
35	4,21	8,42	9,62	105	113,7	227	86,6
36	4,58	9,16	10,2	110	130,7	261	95,0
37	4,97	9,95	10,8	115	149,3	299	104
38	5,39	10,77	11,3	120	169,6	339	113
40	6,28	12,57	12,6	125	191,7	383	123
42	7,27	14,55	13,9	130	216	431	133
44	8,36	16,78	15,2	135	242	483	143
45	8,95	17,89	15,9	140	269	539	154
46	9,56	19,11	16,6	145	299	599	165
47	10,19	20,4	17,3	150	331	663	177
48	10,86	21,7	18,1	155	366	731	189
50	12,27	24,5	19,6	160	402	804	201
52	13,80	27,6	21,2	165	441	882	214
55	16,33	32,7	23,8	170	482	965	227
58	19,16	38,3	26,4	175	526	1053	241
60	21,2	42,4	28,3	180	573	1145	254
62	23,4	46,8	30,2	185	622	1243	269
65	27,0	53,9	33,2	190	673	1347	284
68	30,9	61,7	36,3	195	728	1456	298
70	33,7	67,3	38,5	200	785	1571	314
72	36,6	73,3	40,7				

3. Коэффициенты снижения момента сопротивления и площади сечения для валов с центральным каналом



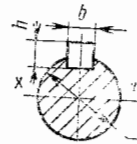
$\frac{d}{D}$	ξW	ξF	$\frac{d}{D}$	ξW	ξF
0	1,000	1,000	0,41	0,972	0,832
0,20	0,998	0,960	0,42	0,969	0,824
0,25	0,996	0,938	0,43	0,966	0,815
0,30	0,992	0,910	0,44	0,963	0,806
0,35	0,985	0,878	0,45	0,959	0,798
0,40	0,974	0,840	0,46	0,956	0,788

Продолжение табл. 3

$\frac{d}{D}$	ξW	ξF	$\frac{d}{D}$	ξW	ξF
0,47	0,952	0,779	0,74	0,701	0,452
0,48	0,947	0,770	0,75	0,684	0,437
0,49	0,942	0,760	0,76	0,666	0,422
0,50	0,938	0,750	0,77	0,643	0,407
0,51	0,932	0,740	0,78	0,630	0,392
0,52	0,927	0,730	0,79	0,610	0,376
0,53	0,921	0,719	0,80	0,590	0,360
0,54	0,915	0,708	0,81	0,569	0,344
0,55	0,909	0,698	0,82	0,548	0,328
0,56	0,901	0,686	0,83	0,526	0,311
0,57	0,895	0,675	0,84	0,501	0,294
0,58	0,888	0,664	0,85	0,473	0,278
0,59	0,879	0,652	0,86	0,452	0,260
0,60	0,870	0,640	0,87	0,427	0,243
0,61	0,862	0,623	0,88	0,400	0,226
0,62	0,852	0,616	0,89	0,372	0,208
0,63	0,842	0,603	0,90	0,343	0,190
0,64	0,833	0,590	0,91	0,314	0,172
0,65	0,822	0,577	0,92	0,284	0,154
0,66	0,811	0,564	0,93	0,252	0,135
0,67	0,800	0,551	0,94	0,219	0,116
0,68	0,787	0,538	0,95	0,185	0,098
0,69	0,773	0,524	0,96	0,151	0,073
0,70	0,760	0,510	0,97	0,115	0,059
0,71	0,747	0,496	0,98	0,077	0,040
0,72	0,731	0,482	0,99	0,040	0,020
0,73	0,713	0,467			

Примечание. Значения W_0 и F_0 для валов с наружным диаметром D , ослабленных отверстием диаметром d , вычисляются умножением приведенных в табл. 2 значений W и F соответственно на коэффициенты ξW и ξF ; $W_{и0} = W_{и'} \xi W$; $W_{к0} = W_{к'} \xi W$; $F_0 = F \xi F$.

4. Моменты сопротивления и площади сечений валов, ослабленных пазом для одной стандартной шпонки



D , мм	$b \times h$, мм	$W_{и'}$, см ³	$W_{к'}$, см ³	F , см ²	D , мм	$b \times h$, мм	$W_{и'}$, см ³	$W_{к'}$, см ³	F , см ²
20		0,655	1,44	2,96	37		4,27	9,24	10,27
21		0,770	1,68	3,28	38		4,66	10,04	10,86
22	6×6	0,897	1,94	3,62	40	12×8	5,51	11,79	12,09
23		1,038	2,23	3,98	42		6,45	13,72	13,37
24		1,192	2,55	4,34					
25		1,275	2,81	4,62	44		7,25	15,51	14,58
26		1,453	3,13	5,03	45		7,80	16,74	15,27
28	8×7	2,32	4,97	6,79	46	14×9	8,38	17,93	15,99
					47		8,98	19,17	16,72
					48		9,62	20,5	17,47
32		2,73	5,94	7,64					
34		3,33	7,19	8,68	50	16×10	10,65	22,9	18,84
35		3,66	7,87	9,22	52		12,10	25,9	20,4
36	10×8	4,01	8,59	9,78	55		14,51	30,8	23,0

Продолжение табл. 4

D, мм	b×h, мм	W _и [*] , см ³	W _к [*] , см ³	F, см ²	D, мм	b×h, мм	W _и [*] , см ³	W _к [*] , см ³	F, см ²
58	18×11	16,81	36,0	25,4	110	32×18	117,4	248	92,2
60		18,76	40,0	27,3	115		135,2	285	101,0
62		20,9	44,3	29,2	120		154,8	342	110,2
65		24,3	51,2	32,2	125	36×20	172,7	364	119,1
68	20×12	27,5	58,4	35,1	130		195,8	412	129,1
70		30,2	63,8	37,3	135		221	462	139,5
72		33,0	69,7	39,5	140		248	517	150,3
75		37,6	79,0	43,0	145	40×22	272	571	160,7
78	42,6	89,2	46,6	150	303		634	172,3	
80	24×14	44,7	95,0	48,6	155		336	702	184,3
82		48,4	102,5	51,1	160		372	774	196,7
85		54,3	114,6	55,1	165	409	850	209	
88		60,6	127,5	59,1	170	450	932	223	
90	65,1	136,7	61,9	175	45×25	484	1010	235	
92	28×16	67,9	144,3	64,2		180	529	1101	249
95		75,3	159,4	68,6		185	576	1198	263
98		83,1	175,5	73,2		190	627	1300	278
100		88,7	189,9	76,3	195	680	1408	293	
105	103,7	217	84,4	200	736	1521	309		

Примечание $W_{и} = \frac{\pi D^3}{32} - \frac{bh(2D-h)^2}{16D}$; $W_{к} = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{bh(2D-h)^2}{16D}$; $F = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{bh}{2}$

Для валов круглого сплошного сечения $W_{к} = 2W_{и}$,* в этом случае

$$\sigma_{экр} = \frac{32}{\pi D^3} \sqrt{M_{и}^2 + 0,75M_{к}^2}, \quad (2)$$

где D — диаметр вала.

Запас прочности по пределу текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{экр}}. \quad (3)$$

Обычно принимают $n_T = 1,2 \div 1,8$.

Опасное сечение (сечения), в котором следует найти запас прочности, определяются значениями моментов и размерами сечений. Это сечение находят после построения эпюр изгибающих и крутящих моментов. Если нагрузки действуют на вал в разных плоскостях, то, проектируя силы на оси координат, вначале строят эпюры моментов в координатных плоскостях. Далее производят геометрическое суммирование изгибающих моментов.

Если угол между плоскостями действия сил не превосходит 30°, то для простоты считают, что все силы действуют в одной плоскости.

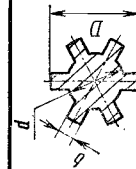
Тонкостенные валы могут выходить из строя вследствие потери устойчивости (выпучивания) как от действия крутящих моментов, так и в результате изгиба.

Проверка устойчивости тонкостенных валов является при кручении и изгибе необходимой (см. гл. 25).

Упругие перемещения валов оказывают неблагоприятное влияние на работу связанных с ними соединений (шлицевых, прессовых и др.), подшипников, зубчатых колес и других деталей: увеличивают концентрацию контактных напряжений и износ деталей, снижают усталостную прочность деталей и соединений, понижают точность механизмов и т. п.

Большие перемещения сечений вала от изгиба могут привести к выходу из строя конструкции вследствие заклинивания подшипников. Изгибная и крутильная жест-

Б. Моменты сопротивления и площади сечения шлицевых валов



d, мм	легкая					средняя					тяжелая							
	D, мм	b, мм	z	W _и [*] , см ³	W _к [*] , см ³	F, см ²	D, мм	b, мм	z	W _и [*] , см ³	W _к [*] , см ³	F, см ²	D, мм	b, мм	z	W _и [*] , см ³	W _к [*] , см ³	F, см ²
11	15	3	4	0,1633	0,327	1,19	14	3	6	0,178	0,356	1,22	14	3	6	0,178	0,356	1,22
13	18	6	4	0,380	0,76	2,02	16	3,5	6	0,279	0,558	1,642	16	3,5	6	0,279	0,558	1,642
14	20	6	4	0,517	1,034	2,49	20	4	6	0,316	1,032	2,49	20	4	6	0,316	1,032	2,49
16	22	6	4	0,686	1,372	3,03	22	5	6	0,741	1,482	3,15	22	5	6	0,741	1,482	3,15
18	25	8	4	1,102	2,204	4,10	25	5	6	1,081	2,162	4,06	25	5	6	1,081	2,162	4,06
21	28	6	6	1,367	2,734	4,70	28	6	6	1,502	3,00	5,06	28	6	6	1,502	3,00	5,06
23	26	6	6	1,508	3,016	5,03	30	6	6	1,681	3,36	5,32	30	6	6	1,681	3,36	5,32
25	30	6	6	1,908	3,816	6,03	32	6	6	2,10	4,2	6,39	32	6	6	2,10	4,2	6,39
28	32	7	6	2,408	4,816	7,60	34	7	6	2,66	5,32	7,42	34	7	6	2,66	5,32	7,42
30	36	6	8	3,640	7,28	9,00	38	6	8	3,87	7,71	9,48	38	6	8	3,87	7,71	9,48
32	36	7	8	3,640	7,28	9,00	42	8	8	5,66	11,32	13,85	42	8	8	5,66	11,32	13,85
36	40	7	8	5,180	10,36	11,29	42	8	8	8,41	16,82	15,77	42	8	8	8,41	16,82	15,77
40	46	8	8	8,00	16,0	15,12	48	8	8	8,41	16,82	15,77	48	8	8	8,41	16,82	15,77
46	50	9	8	10,46	20,92	18,06	60	10	8	16,13	32,26	24,4	60	10	8	16,13	32,26	24,4
52	58	10	8	15,54	31,08	23,6	65	10	8	19,9	39,80	29,2	65	10	8	19,9	39,80	29,2
55	62	10	8	18,94	37,9	27,0	72	12	8	27,6	55,2	35,0	72	12	8	27,6	55,2	35,0
62	68	12	10	25,8	51,6	33,1	72	12	10	37,6	75,2	46,7	72	12	10	37,6	75,2	46,7
66	72	12	10	30,3	60,6	39,3	82	12	10	43,0	86,0	53,0	82	12	10	43,0	86,0	53,0
72	78	12	10	40,3	80,6	44,3	82	12	10	60,5	121,0	58,8	82	12	10	60,5	121,0	58,8
82	88	12	10	57,8	115,6	56,4	92	12	10	—	—	—	92	12	10	—	—	—
92	98	14	10	81,3	162,2	70,7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
102	—	—	—	—	—	—	125	—	—	—	—	—	125	—	—	—	—	—
112	—	—	—	—	—	105,7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Примечание. Моменты сопротивления и площади вычислены по номинальным размерам $W_{и} \approx \frac{\pi d^4 + b(D-d)(D+d)^2 z}{32D}$; $W_{к} = 2W_{и}$.

кость валов существенно влияет на частотные характеристики системы при возникновении изгибных и крутильных колебаний.

При проектировании валов следует проверять прогибы и углы поворота сечений. Перемещения сечений валов вычисляют, используя интеграл Мора или правило Верещагина (см. гл. 17).

Допустимые величины перемещений (прогибов и углов поворота) сечений вала зависят от требований, предъявляемых к конструкции, и особенностей ее работы. Допустимые величины углов поворота сечения вала в местах расположения деталей (в рад):

Подшипников качения:	
шариковых однорядных	0,005
шариковых сферических	0,05
роликовых цилиндрических	0,0025
роликовых конических	0,0016
Подшипников скольжения	0,001
Зубчатых колес	0,001 — 0,002

Максимальный прогиб валов, несущих зубчатые колеса, обычно не должен превышать 0,0002—0,0003 от расстояния между опорами, а допустимый прогиб под колесами составляет: 0,01 *m* — для цилиндрических и 0,005 *m* — для конических, гиповидных и глобидных передач (здесь *m* — модуль зацепления).

Допустимые углы закручивания валов также зависят от требований и условий работы конструкции и лежат в пределах 0,20—1° на 1 м длины вала.

РАСЧЕТ НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

На практике переменная внешняя нагрузка изменяется либо по симметричному, либо по асимметричному циклу.

Наибольшие напряжения будут действовать в точках наружных волокон вала

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{и\ max} &= \frac{M_{и\ max}}{W_{и}}; & \sigma_{и\ min} &= \frac{M_{и\ min}}{W_{и}}; \\ \tau_{к\ max} &= \frac{M_{к\ max}}{W_{к}}; & \tau_{к\ min} &= \frac{M_{к\ min}}{W_{к}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Амплитуды и средние напряжения циклов нормальных и касательных напряжений будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}; & \tau_a &= \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2}; \\ \sigma_m &= \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; & \tau_m &= \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если амплитуды и средние напряжения возрастают при нагружении пропорционально, то запас прочности определяют из соотношения

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}, \quad (6)$$

где *n_σ* и *n_τ* — соответственно запасы прочности по нормальным и касательным напряжениям,

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{k_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}} + \psi_{\sigma} \sigma_m}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \frac{k_{\tau}}{\epsilon_{\tau} \beta_{\tau}} + \psi_{\tau} \tau_m}. \quad (7)$$

6. Эффективные коэффициенты концентрации напряжений при изгибе и кручении валов в месте кольцевой канавки (см. рис. 5, а)

Коэффициент	σ _в ¹ кгс/мм ²	При r/d							
		0,01	0,03	0,05	0,1	0,01	0,02	0,03	
k _σ	При t/r = 0,5	При t/r = 0,5			При t/r = 2				
		60	1,98	1,82	1,71	1,52	2,43	2,32	2,22
		80	2,09	1,92	1,82	1,59	2,56	2,45	2,35
		100	2,20	2,02	1,93	1,66	2,70	2,58	2,47
	120	2,31	2,12	2,04	1,73	2,84	2,71	2,59	
	При t/r = 1	При t/r = 1			При t/r = 3				
		60	2,21	2,03	1,91	—	2,56	2,42	—
		80	2,37	2,14	2,03	—	2,73	2,56	—
100		2,45	2,25	2,15	—	2,90	2,70	—	
120	2,57	2,36	2,27	—	3,07	2,84	—		
k _τ	60	1,80	1,60	1,46	1,23	—	—	—	
	80	2,00	1,75	1,57	1,28	—	—	—	
	100	2,20	1,90	1,69	1,34	—	—	—	
	120	2,40	2,05	1,81	1,40	—	—	—	

7. Эффективные коэффициенты концентрации напряжений в ступенчатом переходе с галтелью (см. рис. 5, б)

Коэффициент	σ _в ¹ кгс/см ²	При r/d							
		0,01	0,03	0,05	0,1	0,01	0,02	0,05	
k _σ	При t/r = 1	При t/r = 1			При t/r = 3				
		60	1,38	1,67	1,64	1,50	1,94	2,02	2,03
		80	1,41	1,76	1,73	1,61	2,03	2,13	2,16
		100	1,45	1,84	1,83	1,72	2,12	2,25	2,30
	120	1,49	1,92	1,93	1,83	2,21	2,37	2,44	
	При t/r = 2	При t/r = 2			При t/r = 5				
		60	1,57	1,88	1,82	—	2,17	2,23	—
		80	1,62	1,99	1,95	—	2,28	2,38	—
100		1,67	2,11	2,07	—	2,39	2,52	—	
120	1,72	2,23	2,19	—	2,50	2,66	—		
k _τ	При t/r = 1	При t/r = 1			При t/r = 3				
		60	1,29	1,42	1,44	1,39	1,59	1,66	1,68
		80	1,30	1,45	1,47	1,43	1,64	1,72	1,74
		100	1,31	1,48	1,51	1,46	1,68	1,79	1,81
	120	1,32	1,52	1,54	1,50	1,73	1,86	1,88	
	При t/r = 2	При t/r = 2			При t/r = 5				
		60	1,40	1,57	1,57	—	2,24	2,12	—
		80	1,43	1,61	1,62	—	2,37	2,22	—
100		1,46	1,66	1,68	—	2,48	2,31	—	
120	1,47	1,71	1,74	—	2,6	2,4	—		

Если известны пределы выносливости реальной детали, то равенства (7) можно переписать в виде

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_a + \psi_{\sigma d} \sigma_m}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_a + \psi_{\tau d} \tau_m} \quad (8)$$

где $\psi_{\sigma d} = \psi_\sigma \frac{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma}{k_\sigma}$; $\psi_{\tau d} = \psi_\tau \frac{\varepsilon_\tau \beta_\tau}{k_\tau}$.

В равенствах (7) и (8) σ_{-1} и σ_{-1d} — пределы выносливости стандартного образца в детали при симметричном изгибе; τ_{-1} и τ_{-1d} — то же при кручении; k_σ и k_τ — эффективные коэффициенты концентрации соответственно нормальных и касательных напряжений (табл. 6—8). При отсутствии данных значения k_σ и k_τ можно вычислить из соотношений

$$k_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1); \quad k_\tau = 1 + q(\alpha_\tau - 1),$$

здесь α_σ и α_τ — теоретические коэффициенты концентрации напряжений при изгибе и кручении (см. гл. 28); q — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений, значения q приведены в гл. 31.

8. Эффективные коэффициенты концентрации напряжений при изгибе и кручении валов со шлицами, шпоночной канавкой, с резьбой и поперечным отверстием

σ_B кгс/мм ²	Тип концентратора							
	Шлицы		Шпоночная канавка		Метрическая резьба		Поперечное отверстие с диаметром a	
	k_σ	k_τ^*	k_σ^{**}	k_τ	k_σ	k_τ	k_σ^{***}	k_τ
60	1,55	2,36/1,46	1,46/1,76	1,54	1,96	1,54	2,05/1,85	1,80
80	1,65	2,55/1,52	1,62/2,01	1,83	2,20	1,71	2,10/1,90	1,95
100	1,72	2,70/1,58	1,77/2,26	2,22	2,61	2,22	2,20/2,00	1,90
120	1,75	2,80/1,60	1,92/2,50	2,39	2,90	2,39	2,30/2,10	2,00

* В числителе приведены значения для валов с прямобочными шлицами, в знаменателе — для эвольвентных шлицев.
 ** В числителе приведены значения для канавок, полученных пальцевой фрезой, в знаменателе — дисковой.
 *** В числителе приведены значения для валов с диаметром отверстия $a = (0,05 \div 0,15) d$, в знаменателе — при $a = (0,15 \div 0,25) d$.

Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений для прессовых соединений валов и дисков приведены в гл. 6. ε_σ и ε_τ — коэффициенты, учитывающие масштабный эффект при изгибе и кручении (табл. 9); β_σ и β_τ — коэффициенты, учитывающие влияние состояния поверхности (табл. 10); ψ_σ и ψ_τ — коэффициенты, характеризующие чувствительность материала к асимметрии цикла напряжений.

В приближенных расчетах принимают $\psi_\sigma = 0,1 \div 0,2$ — для углеродистых сталей при $\sigma_B < 50$ кгс/мм², $\psi_\sigma = 0,2 \div 0,3$ — для легированных сталей, углеродистых сталей при $\sigma_B > 50$ кгс/мм², титановых и легких сплавов; $\psi_\tau \approx 0,5 \psi_\sigma$.

9. Значения коэффициентов ε_σ и ε_τ

Напряженное состояние и материал	Значение ε при диаметре вала, мм							
	15	20	30	40	50	70	100	200
Изгиб для углеродистых сталей	0,95	0,92	0,88	0,85	0,81	0,76	0,70	0,61
Изгиб для высокопрочной легированной стали и кручение для всех сталей . .	0,87	0,83	0,77	0,73	0,70	0,65	0,59	0,52

10. Значения коэффициента β при изгибе и кручении ($\beta_\sigma \approx \beta_\tau$)

Вид обработки поверхности	σ_B сердцевины, кгс/мм ²	Значения β для валов		
		гладких	при $\alpha_\sigma = 1,5$	при $\alpha_\sigma = 1,5 \div 2,0$
Точение Шлифование *	80—120	1 1,1—1,2	1 —	1 —
Закалка с нагревом ТВЧ **	60—80 80—120	1,5—1,7 1,3—1,5	1,6—1,7 —	2,4—2,3 —
Азотирование	90—120	1,1—1,25	1,5—1,7	1,7—2,1
Цементация	70—80 100—120	1,4—1,5 1,2—1,3	— 2	— —
Дробеструйная обработка	60—150	1,1—1,25	1,5—1,6	1,7—2,1
Обкатка роликом	60—150	1,2—1,3	1,5—1,6	1,8—2,0

* Шлифовочные прижоги снижают усталостную прочность.
 ** Для валов больших размеров эффективность закалки снижается.

В случае изгибных или крутильных колебаний валов может происходить возрастание переменной составляющей цикла при неизменной постоянной составляющей. В этом случае необходимо найти запас прочности по переменным напряжениям:

$$n_{\sigma\sigma} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m}{\sigma_a \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma}}; \quad (9)$$

$$n_{\sigma\tau} = \frac{\tau_{-1} - \psi_\tau \tau_m}{\tau_a \frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta_\tau}}. \quad (10)$$

Запас по переменным напряжениям n_v определяют по формуле (6).

Для обеспечения надежной работы должно быть $n \approx 1,5 \div 2,5$, $n_v > 2,5$. Допустимые значения запасов прочности назначаются на основе опыта расчета и эксплуатации подобных конструкций и т. д.

Для повышения усталостной прочности валов используют различные методы поверхностного упрочнения пластическим деформированием (см. гл. 34).

При нестационарных нагрузках расчет ведут по эквивалентному напряжению

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{m}{N_0} \sum_{i=1}^n \sigma_i^m N_i}, \quad (11)$$

где N_0 — число циклов, соответствующее точке перегиба кривой усталости, обычно принимают $N_0 = (3 \div 5) \cdot 10^6$ циклов для валов небольших сечений и $N_0 = 10^7$ циклов — для валов больших сечений; m — показатель степени кривой усталости, $m = 6$ — для валов с прессовыми посадками, $m = 9$ — для обычных конструкций стальных валов; N_i — общее число циклов нагружений при напряжении σ_i ; i — номер степени нагружения.

При известном значении σ_ε запас прочности находят обычным методом

РАСЧЕТ НА КОЛЕБАНИЯ

Колебания валов с присоединенными деталями и узлами возникают под действием внешних, постоянно действующих и периодически изменяющихся сил и связаны с упругой деформацией валов. Малые колебания около положения равновесия становятся опасными для работоспособности вала и конструкции в целом, когда частота возмущающей силы достигает какой-либо собственной частоты системы (наступает резонанс). Напряжения в вале при этом существенно возрастают и будут определяться в основном не внешней нагрузкой, а силами инерции колеблющихся масс.

На практике нередко наблюдаются изгибные (поперечные), крутильные (угловые) и изгибно-крутильные колебания валов.

Во избежание резонансных колебаний необходимо знать допустимый диапазон (по частоте или оборотам) рабочих режимов, ограничиваемый частотой собственных колебаний системы.

При расчетном определении частоты собственных колебаний вал с присоединенными дисками (зубчатыми колесами и т. п.) принимают в виде стержня (балки) с сосредоточенной массой (массами), шарнирно закрепленного в жестких или упругих опорах. В приближенных расчетах массу вала приводят к массе диска (путем суммирования масс с учетом коэффициента приведения массы вала, зависящего от расположения опор и диска, а также вида колебаний).

Методика расчета частот собственных изгибных и крутильных колебаний систем изложена в гл. 21.

Для предотвращения резонансных колебаний валов и расширения рабочих режимов роторов на практике применяют упругие и демпфирующие опоры (см. гл. 22).

КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ ВАЛОВ

При расчете быстровращающихся валов с дисками необходимо определить их критическую угловую скорость (частоту вращения), см. гл. 22.

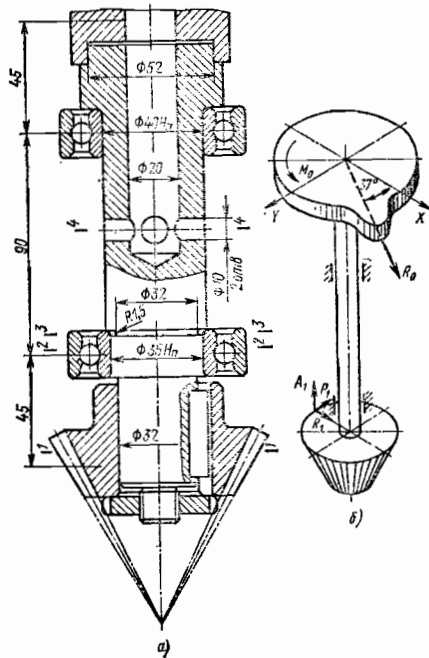


Рис. 10. Вертикальный вал пневморазрядного механизма

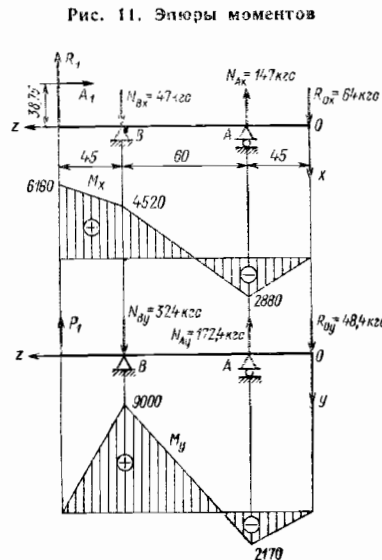


Рис. 11. Эпюры моментов

Приближение частоты вращения вала к критической проявляется в сильной тряске всей конструкции. Амплитуды вынужденных колебаний вала становятся настолько большими, что оказываются опасными не только для прочности вала, но и для опор и всей конструкции.

Для быстровращающихся валов ($n > 3000$ об/мин) должна быть проведена тщательная балансировка ротора (статическая и динамическая).

Следует также применять раздельную балансировку деталей ротора, для подавляющих роторов рекомендуется проводить балансировку на эксплуатационной частоте вращения.

Для прохождения через критические частоты вращения необходимы тщательная балансировка ротора; высокая демпфирующая способность опор; минимальное время прохождения этих частот.

Пример. Произвести проверочный расчет вертикального вала пневморазрядного механизма ткацкого станка (рис. 10). Вал изготовлен методами резания из стали 45 ($\sigma_B = 65$ кгс/мм²; $\sigma_T = 47$ кгс/мм²; $\sigma_{-1} = 27,5$ кгс/мм²; $\tau_{-1} = 16$ кгс/мм²).

Крутящий момент на водило механизма передается валом от конического зубчатого колеса. Из кинематического и силового расчетов механизма известно, что крутящий момент, изменяющийся по пульсирующему циклу, достигает наибольшего значения $M_{\max} = 7800$ кгс·мм, когда центробежная сила $R_{0 \max} = 80$ кгс составляет с осью x угол, равный 37°; усилия на коническое колесо при этом составляет (см. рис. 10, б): $P_1 = 200$ кгс, $R_1 = 36$ кгс, $A_1 = 160$ кгс.

Эпюры изгибающих моментов, действующих на вал, в плоскостях xOz и yOz показаны на рис. 11, а в табл. 11 — приведены результаты расчета запасов прочности в четырех наиболее нагруженных сечениях с концентраторами напряжений. Расчет произведен с использованием соотношений (4) — (8) и табл. 1—10.

11. Расчет запасов прочности вала

Параметры	Сечение по рис. 10			
	1	2	3	4
Диаметр вала, см	3,2	3,5	3,2	4,0
Момент сопротивления, см ³ :				
W_n	2,73	4,21	3,22	3,5
W_k	5,94	8,42	6,43	7,0
Изгибающий момент $M_{из}$, кгс·см	710	1015	866	285
Крутящий момент $M_{кр}$, кгс·см	780	780	780	780
Напряжения, кгс/см ² :				
изгиба $\sigma_{из}$	252	237	241	82
кручения $\tau_{кр}$	132	92,5	121	111
Эффективный коэффициент концентрации напряжений:				
нормальных k_{σ}	1,75	1,76	1,93	2,0
касательных k_{τ}	1,54	1,3	1,45	1,75
Коэффициент, учитывающий масштабный эффект:				
при изгибе ϵ_{σ}	0,88	0,88	0,88	0,85
при кручении ϵ_{τ}	0,77	0,76	0,77	0,73
Коэффициент запаса:				
n_{σ}	5,00	5,25	6	13,75
n_{τ}	5,75	9,7	6,6	5,71
Запас прочности n	3,78	4,63	4,44	4,74

Из табл. 11 следует, что запасы прочности достаточно высокие.

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Подшипники качения классифицируют по следующим признакам.

1. По форме тел качения подшипники делят на шариковые (рис. 1) и роликовые (рис. 2). Последние, в свою очередь, разделяют по форме роликов на подшипники с короткими (рис. 2, а) и длинными (рис. 2, б) цилиндрическими роликами, с коническими роликами (рис. 2, в), с бочкообразными роликами (рис. 2, б), с витыми роликами и игольчатыми роликами (рис. 2, е).

2. По направлению воспринимаемых сил подшипники разделяют на следующие типы:

а) радиальные, воспринимающие преимущественно радиальные нагрузки, действующие перпендикулярно оси вращения подшипника (рис. 1, а, б и 2, а, б, в, д);
б) радиально-упорные, предназначенные для восприятия комбинированных нагрузок, т. е. одновременно действующих радиальных и осевых нагрузок (рис. 1, в, г и 2, е);

в) упорно-радиальные, предназначенные для восприятия осевой нагрузки при одновременном действии незначительной радиальной нагрузки (рис. 1, д);

г) упорные, воспринимающие только осевые нагрузки (рис. 1, е).

3. По способности самоустанавливаться подшипники подразделяют на несамоустанавливающиеся и самоустанавливающиеся (сферические, рис. 1, б и 2, б).

4. По числу рядов тел качения подшипники делят на однорядные (рис. 1, а, в—е и 2, а, в—д), двухрядные (рис. 1, б и 2, б) и четырехрядные.

Подшипники одного и того же диаметра отверстия подразделяют по габаритным размерам (наружного диаметра и ширины) на *р а з м е р н ы е*: сверхлегкую, особо легкую, легкую, среднюю, тяжелую, особо узкую, узкую, нормальную, широкую и особо широкую.

Наиболее часто применяют подшипники легкой и средней серий нормальной ширины.

Подшипники различных типов, размеров и серий обладают различной грузоподъемностью и быстроходностью. Подшипники более тяжелых серий менее быстроходны, но обладают более высокой грузоподъемностью. Подшипники шариковые радиальные однорядные и радиально-упорные, а также роликовые с короткими цилиндрическими роликами обладают наибольшей быстроходностью по сравнению с подшипниками других типов.

Для особо высокой частоты вращения и действия легких нагрузок целесообразно использовать подшипники сверхлегкой или особо легкой серий. Для восприятия повышенных и тяжелых нагрузок при высокой частоте вращения обычно используют подшипники легкой серии, а при недостаточной их грузоподъемности размещают в одной опоре два подшипника.

Радиальные шарикоподшипники могут воспринимать как радиальные, так и осевые нагрузки, действующие в обе стороны вдоль оси вращения подшипника, что обеспечивает возможность фиксирования вала в осевом направлении. При использовании этих подшипников предъявляются менее высокие требования к соосности опор и жесткости валов. Они дешевле подшипников других типов, допускают наиболее простой монтаж и демонтаж. Поэтому такие подшипники наиболее распространены в различных машинах и механизмах.

Роликовые подшипники более грузоподъемны, чем шариковые. Однако роликоподшипники с цилиндрическими роликами наиболее распространенных конструкций (с направляющими бортами для роликов на одном из колец подшипника) не могут воспринимать осевых нагрузок, а конические роликоподшипники менее быстроходны. Все большее применение находят роликоподшипники с выпуклой образующей роликов (с бомбинированными роликами). Такая форма роликов позволяет снизить концентрацию напряжений на их кромках и повысить долговечность подшипников в 2 и более раза.

Радиально-упорные подшипники различают по величине угла контакта α (рис. 1, в, г и 2, е). С увеличением угла контакта радиально-упорные

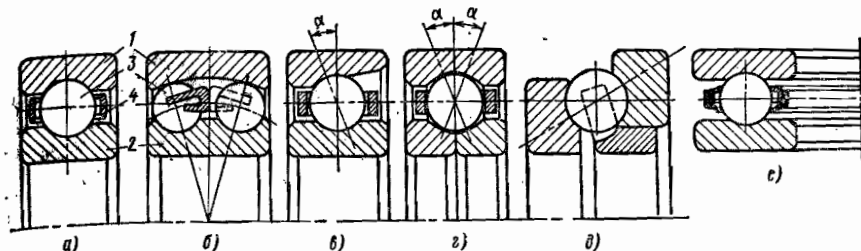


Рис. 1. Основные типы шарикоподшипников

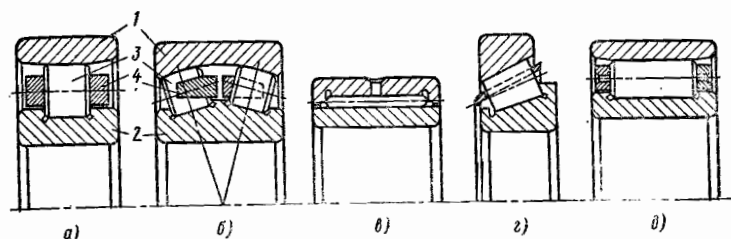


Рис. 2. Основные типы роликоподшипников

подшипники могут воспринимать более тяжелые осевые нагрузки. Однако быстроходность подшипников с увеличением угла контакта снижается. При одновременном действии на радиально-упорный шарикоподшипник радиальной F_r и осевой F_a нагрузок выбор оптимального угла контакта подшипника производят по отношению осевой нагрузки к радиальной (табл. 1).

Радиальные и радиально-упорные шарикоподшипники могут быть использованы и в случае действия на них только осевой нагрузки, особенно при высокой частоте вращения, при которой нельзя применять упорные подшипники. Самоустанавливающиеся подшипники применяют в случае повышенной несоосности опор вала (до $2-3^\circ$), а также при повышенной податливости вала.

Предельная частота вращения подшипников зависит от их конструкции и точности изготовления, от точности изготовления и монтажа сопряженных с подшипниками деталей, а также от способа смазывания и свойств смазки.

Подшипниковая промышленность изготавливает подшипники качения в соответствии с ГОСТ 520—71 пяти классов точности, которые обозначают следующими цифрами: 0, 6, 5, 4 и 2 (обозначения приведены в порядке повышения точности).

Подшипники класса точности 0 обычно используют при отсутствии особых требований к точности вращения, определяемой радиальными и осевыми биениями дорожек качения внутреннего и наружного колец подшипника, а также при частоте вращения в пределах, указанных в каталоге [2] на подшипники общего применения.

При использовании подшипников высоких классов точности необходимо посадочные поверхности сопряженных с ними деталей изготавливать с неменьшей точностью, чем точность изготовления подшипников.

1. Оптимальные углы контакта шарикоподшипников в зависимости от отношения осевой нагрузки F_a к радиальной F_r

Отношение $\frac{F_a}{F_r}$	α°
Не более 0,35	0 (радиальный подшипник)
0,35—0,8	12
0,8—2,5	26
Св. 2,5	36

Быстроходность подшипников принято оценивать параметром $d_{mn}n$, где d_m — диаметр окружности, соединяющей центры тел качения, мм; n — частота вращения подшипника, об/мин. Для радиальных и радиально-упорных шарикоподшипников со стальными штампованными («змеиковыми») сепараторами и роликоподшипников с короткими цилиндрическими роликами нормального класса точности (0) $d_{mn} = (0,5 \div 0,55) \cdot 10^6$ мм·об/мин; для тех же подшипников высоких классов точности (6,5 и 4) с массивными сепараторами, изготовленными из антифрикционных материалов (бронзы, алюминиевых сплавов, пластмасс), при интенсивной циркуляционной смазке и длительной работе параметр d_{mn} в современных быстроходных машинах достигает $(2,5 \div 2,8) \cdot 10^6$ мм·об/мин; для конических роликоподшипников $d_{mn} = (0,28 \div 0,35) \cdot 10^6$ мм·об/мин; для упорных шарикоподшипников $d_{mn} = (0,2 \div 0,25) \cdot 10^6$ мм·об/мин.

При применении специальной системы смазки и эффективного отвода выделяющегося в подшипниках (средних размеров) тепла было получено максимальное значение параметра $d_{mn} = 3,45 \cdot 10^6$ мм·об/мин. При этом окружная скорость на дорожке качения внутреннего кольца подшипника достигала 170 м/с.

Для шарикоподшипников небольших размеров при смазывании масляным туманом достигали значения параметра $d_{mn} = (1,6 \div 1,8) \cdot 10^6$ мм·об/мин, при этом частота вращения подшипника была 90 000—100 000 об/мин, а ресурс подшипников при указанной частоте вращения достигал 2000 ч и более.

В зависимости от условий работы (величина нагрузки, температура подшипника, частота вращения и др.) и конструкции подшипникового узла (посадка колец подшипника, материалы деталей, сопряженных с кольцами подшипника) используют подшипники с различными радиальными зазорами, которые разделяют на ряды, обозначаемые цифрами.

Основные характеристики подшипников: внутренний диаметр, серия, тип, конструктивные особенности, класс точности, ряд радиального зазора, материал, из которого изготовлены детали подшипника, особые требования к термообработке деталей подшипника — условно обозначают на кольцах подшипника цифрами и буквами, совокупность которых образует условное обозначение подшипника.

Каждая из указанных характеристик подшипника определяется местом расположения цифры в условном обозначении и значением этой цифры. Система основных условных обозначений подшипников стандартизована и определена ГОСТ 3189—75.

Кольца и тела качения подшипников изготавливают в основном из шарикоподшипниковых высокоуглеродистых хромистых сталей ШХ15 и ШХ15СГ а для подшипников, воспринимающих значительные ударные нагрузки, кольца и тела качения изготавливают из цементуемых сталей 18ХГТ, 20Х2Н4А и 20НМ. Для подшипников, работающих при высоких температурах (до 500°С), кольца и тела качения изготавливают из теплоустойкой вольфрамованадиевой стали ЭИ347Ш (по МРТУ14-2-115—66). В условном обозначении, правее цифровой части, теплоустойкие подшипники содержат букву «Р». Подшипники из теплоустойкой стали ЭИ347Ш не снижают своей работоспособности до температуры 400°С.

Для работы подшипников в агрессивных средах детали подшипников изготавливают из высокоуглеродистой коррозионностойкой шарикоподшипниковой стали 95Х18 или 95Х18Ш электрошлакового переплава (ТУ14-1-595—73). В условном обозначении правее цифровой части эти подшипники содержат букву «Ю».

Подшипники ответственного назначения высокой надежности изготавливают из указанных сталей повышенной чистоты, получаемых электрошлаковым или вакуумным переплавом.

Основные типы подшипников и их характеристики приведены в каталоге [2].

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ МЕЖДУ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

Действующая на подшипник радиальная нагрузка воспринимается телами качения в зоне, ограниченной дугой не более 180° (при отсутствии натяга между кольцами и телами качения). При определении нагрузок, воспринимаемых каждым телом качения, расположенным в нагруженной зоне, исходят из следующих допущений: 1) радиальный зазор в подшипнике равен нулю; 2) кольца подшипника не изгиба-

ются под действующей на подшипник нагрузкой; 3) геометрические размеры тел качения и колец идеально точные.

В соответствии с указанными допущениями можно принять, что тела качения, расположенные симметрично относительно плоскости действия нагрузки, будут воспринимать одинаковые нагрузки.

Условия равновесия внутреннего кольца подшипника, нагруженного от вала радиальной силой F_r ,

$$F_r = P_0 + 2P_1 \cos \gamma + \dots + 2P_n \cos n\gamma, \quad (1)$$

где P_i — силы, действующие на кольцо от i -го тела качения; i — номер тела качения ($i = 0, 1, 2, \dots, n$, отсчет ведется от центрального тела качения, расположенного на оси симметрии нагруженной зоны); γ — угловой шаг тел качения (рис. 3).

Под действием радиальной нагрузки F_r в местах контакта тел качения с кольцами возникнут упругие деформации, в результате которых внутреннее кольцо подшипника переместится по направлению действия нагрузки F_r на величину δ_0 (рис. 3). Упругие деформации дорожек качения колец и тел качения в местах их взаимного контакта можно определить по уравнению Герца:

для шарикоподшипников

$$\delta_i = c P_i^{\frac{2}{3}}; \quad (2)$$

для роликоподшипников

$$\delta_i = c' P_i. \quad (2')$$

где c и c' — коэффициенты пропорциональности, зависящие от модуля упругости и коэффициента Пуассона материала контактирующих деталей и кривизны их поверхностей в начальной точке контакта.

Перемещение i -го тела качения (рис. 3) связано с перемещением центрального тела ($i = 0$) соотношением

$$\delta_i = \delta_0 \cos i\gamma. \quad (3)$$

Подставив соотношения (2) и (3) в уравнение (1), получим для шарикоподшипников

$$F_r = P_0 \left(1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos^{\frac{5}{2}} i\gamma \right), \quad (4)$$

откуда

$$P_0 = \frac{k F_r}{Z}; \quad (5)$$

$$P_i = \frac{k F_r}{Z} \cos^{\frac{3}{2}} i\gamma, \quad (6)$$

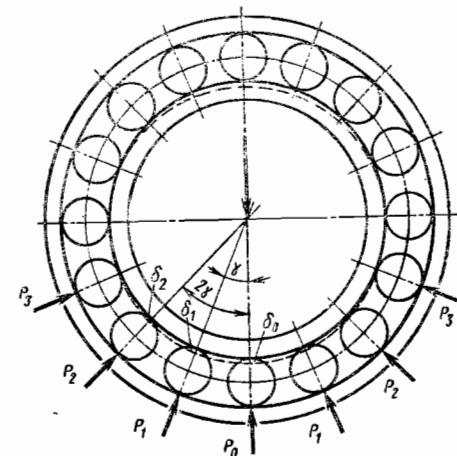


Рис. 3. К расчету распределения нагрузки в подшипнике

где Z — общее число тел качения; k — коэффициент,

$$k = \frac{Z}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos^2 i\gamma} \quad (7)$$

Для шарикоподшипников с $Z = 10 \div 20$ $k = 4,37$. Обычно подшипники имеют некоторый радиальный зазор, а нагрузку воспринимают тела качения на дуге, меньшей 180° . Поэтому принимают для шарикоподшипников $k = 5$.

Для роликоподшипников задачу решают аналогично, используя формулу (2'), и учитывая радиальный зазор в подшипниках, принимают $k = 4,6$ для $Z = 10 \div 20$.

Некоторое выравнивание в распределении нагрузки между телами качения можно достигнуть выполнением корпуса или вала в месте посадки подшипника с повышенной податливостью. Последнее позволяет повысить работоспособность подшипника.

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ПОДШИПНИКОВ

Частота вращения сепаратора при вращении внутреннего кольца с частотой n_B (рис. 4)

$$n_c = \frac{n_B}{2} \left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right), \quad (8)$$

при вращении наружного кольца с частотой n_H :

$$n_c = \frac{n_H}{2} \left(1 + \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right). \quad (9)$$

Частота вращения шарика вокруг своей оси

$$n = \frac{1}{2} (n_H - n_B) \left(\frac{d_m}{D} - \frac{D}{d_m} \cos^2 \alpha \right). \quad (10)$$

При вращении тел качения вокруг оси подшипника на каждый из них действует центробежная сила, нагружающая дополнительно дорожку качения наружного кольца

$$P_{ц} = \frac{G_r d_m \omega_c^2}{2g}, \quad (11)$$

где G_r — вес тела качения, кгс; ω_c — угловая скорость сепаратора.

В расчетах подшипников, вращающихся с высокой частотой, необходимо учитывать центробежные силы тел качения.

Во вращающемся радиально-упорном шарикоподшипнике при действии осевой нагрузки (рис. 5) возникает гироскопический момент на шариках, связанный с изменением направления оси вращения шариков в пространстве:

$$M_r = J_{\omega_{ш}} \omega_c \sin \alpha, \quad (12)$$

где J — полярный момент инерции массы шарика, $J = \frac{\pi D^5}{60} \rho$ (ρ — плотность материала шарика); $\omega_{ш}$ и ω_c — соответственно угловая скорость вращения шарика вокруг своей оси и вокруг оси вала (угловая скорость сепаратора), $\omega = \frac{\pi n}{30}$.

Под действием гироскопического момента возникает верчение шариков, сопровождаемое износом поверхностей качения. Для предотвращения верчения подшипник следует нагружать такой осевой силой, чтобы

$$M_r \geq M_{\tau},$$

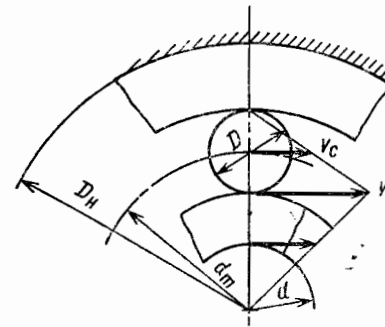


Рис. 4. План скоростей в подшипнике

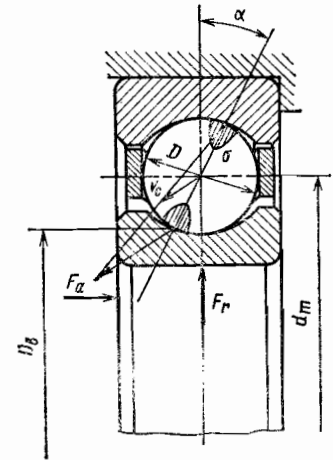


Рис. 5. Контактные напряжения в подшипнике

где M_{τ} — момент сил трения от осевой нагрузки на площадках контакта шариков с кольцами (см. рис. 5),

$$M_{\tau} = \frac{F_a f D}{z \sin \alpha}, \quad (13)$$

здесь F_a — осевая сила; f — коэффициент трения, $f \approx 0,02$ при высокой частоте вращения; z — число шариков в подшипнике.

С учетом этих соотношений потребная осевая сила на подшипник для предотвращения верчения

$$F_a \geq \frac{\rho_{ц} z D^4 \omega_{ш} \omega_c \sin^2 \alpha}{60 f}. \quad (14)$$

Таким образом, осевая сила, предотвращающая верчение, зависит от размера шариков, их числа, частоты вращения подшипника и угла контакта. При высокой частоте вращения целесообразно использовать подшипники более легких серий (сверхлегкой, особо легкой и легкой серии) и с малыми углами контакта.

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ПОДШИПНИКОВ

Статическая грузоподъемность подшипников. Подшипники ряда грузоподъемных, транспортных и других машин периодически подвержены действию нагрузок при отсутствии вращения.

Статическая грузоподъемность (допустимая нагрузка) невращающегося подшипника назначается из условия, что остаточная деформация тел качения и колец под этой нагрузкой не превысит допустимую $[\delta] = 10^{-4} D$ (здесь D — диаметр тела качения).

Статическая грузоподъемность (в кгс) шариковых радиальных и радиально-упорных подшипников

$$C_0 = f_0 i z D^2 \cos \alpha; \quad (15)$$

роликподшипников с короткими цилиндрическими роликами, конических и сферических роликподшипников:

$$C_0 = 2,2 i z l_{eff} D \cos \alpha. \quad (16)$$

Статическая грузоподъемность упорных и упорно-радиальных шарикоподшипников

$$C_0 = 5 z D^2 \sin \alpha; \quad (17)$$

упорных и упорно-радиальных роликоподшипников

$$C_0 = 10z l_{eff} D \sin \alpha. \quad (18)$$

В соотношениях (15)–(18) f_0 — коэффициент, равный для самоустанавливающихся шарикоподшипников 0,34, а для радиальных и радиально-упорных шарикоподшипников 1,25; i и z — соответственно число рядов и число тел качения в ряду; D — диаметр тела качения, мм; l_{eff} — эффективная длина (без фасок) роликов, мм; α — номинальный (начальный) угол контакта.

Из формул следует, что статическая грузоподъемность роликоподшипников значительно выше, чем у шарикоподшипников.

Значения C_0 для подшипников различных типов и серий даны в каталогах [1].

Если подшипник нагружен одновременно радиальной и осевой силами, то приведенная статическая нагрузка для радиальных и радиально-упорных шариковых и роликовых подшипников принимается большей из расчета по следующим формулам:

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a; \quad P_0 = F_r, \quad (19)$$

где X_0 и Y_0 — коэффициенты радиальной и осевой статических нагрузок (табл. 2).

2. Значения коэффициентов X_0 и Y_0

Подшипники	Однорядные подшипники		Двухрядные подшипники	
	X_0	Y_0	X_0	Y_0
Шариковые радиальные	0,6	0,5	0,6	0,5
Шариковые радиально-упорные при α° :	0,5	0,43	1	0,86
18		0,42		0,84
20		0,38		0,76
25		0,37		0,74
26		0,33		0,66
30		0,29		0,58
35		0,28		0,56
36		0,26		0,52
Шариковые самоустанавливающиеся	0,5	0,22 tg α	1	0,44 ctg α
Роликовые самоустанавливающиеся и конические				

Динамическая грузоподъемность подшипников. Усталостное выкрашивание поверхностей качения является типичным отказом подшипников в работе.

Расчет подшипников основан на известном уравнении кривой усталости

$$\sigma^m N = G, \quad (20)$$

где σ — переменное напряжение цикла; N — число циклов изменения этих напряжений до разрушения детали (образца); m и G — постоянные величины, зависящие от свойств материала и состояния поверхности детали.

Так как контактные напряжения в подшипниках нелинейно связаны с действующей нагрузкой:

$$\sigma_{\max} = AP^{\frac{1}{b}},$$

то расчет удобнее вести по действующей на подшипник нагрузке.

В этом соотношении A — коэффициент, зависящий от радиусов кривизны соприкасающихся тел, распределения нагрузки между телами качения, коэффициента Пуассона и модуля упругости материала деталей подшипника; b — знаменатель показателя степени ($b = 3$ — для шарикоподшипников, $b = 2$ — для роликоподшипников).

Так как число циклов нагружения (неодинаковое для точек тел качения и дорожек качения) зависит от числа оборотов за время работы подшипника L :

$$N = BL,$$

то, подставляя последние соотношения в уравнение (20), получим

$$ABP^{\frac{m}{b}} L = G,$$

где B — коэффициент, зависящий от числа тел качения, среднего диаметра подшипника, диаметра тел качения и угла контакта; L — долговечность, млн. оборотов.

Обозначая $\frac{m}{b} = p$; $\frac{G}{AB} = G^* = C^p$, найдем

$$\left(\frac{C}{P}\right)^p = L = 6 \cdot 10^{-5} n L_h, \quad (21)$$

где C — динамическая грузоподъемность, кгс; p — показатель степени, на основании экспериментальных данных: $p = 3$ ($m = 9$) при начальном точечном контакте (для шарикоподшипников), $p = 3,33$ ($m = 6,66$) при начальном линейном контакте (для роликоподшипников), L_h — долговечность, ч.

По физическому смыслу грузоподъемность C эквивалентна радиальной нагрузке, которую подшипник может выдержать в течение базового числа оборотов 10^6 .

На основании экспериментальных исследований установлены зависимости для динамической грузоподъемности подшипников, аналогичные по структуре соотношениям для статической грузоподъемности.

Значения динамических грузоподъемностей для подшипников различных типов и серий приведены в каталогах и справочниках по подшипникам.

Для расчета требуемой динамической грузоподъемности необходимо знать нагрузку на подшипник.

Приведенная нагрузка. В большинстве случаев подшипники качения подвергаются совместному действию осевой и радиальной нагрузки. Условия работы (по характеру нагрузок, температуре и т. д.) подшипников также разнообразны.

Влияние основных эксплуатационных факторов на работоспособность подшипников учитывают путем введения в расчет приведенной нагрузки — критерия подобия, который обобщает накопленный опыт по эксплуатации подшипников в различных конструкциях.

По физическому смыслу приведенная нагрузка — механический эквивалент реальных условий нагружения подшипника, равноопасный по степени его повреждаемости с простым нагружением радиальной силой в типичных (лабораторных) условиях.

Приведенную нагрузку для радиальных шарикоподшипников и радиально-упорных шариковых и роликовых подшипников находят из соотношения

$$P = (XV F_r + Y F_a) K_6 K_T, \quad (22)$$

где X и Y — коэффициенты соответственно радиальной и осевой нагрузок (табл. 3); V — коэффициент вращения, $V = 1$ при вращении внутреннего кольца; $V = 1,2$ при вращении наружного кольца; F_r и F_a — соответственно радиальная и осевая силы, воспринимаемые подшипником; K_6 — коэффициент безопасности, учитывающий влияние на долговечность подшипников характера внешних нагрузок (табл. 4); K_T — температурный коэффициент (табл. 5).

Значения коэффициентов X и Y в табл. 3 даны в зависимости от отношения $\frac{F_a}{V F_r}$, которое влияет на распределение нагрузки между телами качения. При малых зна-

3. Значения коэффициентов радиальной X и осевой Y нагрузок

Тип подшипника	Угол контакта α°	Fa/C0	Однорядные подшипники				Двухрядные подшипники				e	
			Fa/VFr ≤ e		Fa/VFr > e		Fa/VFr ≤ e		Fa/VFr > e			
			X	Y	X	Y	X	Y	X	Y		
Шариковые радиальные	0	0,014	1	0	0,56	2,30	1	0	0,56	2,30	0,19	
		0,028				1,99				1,99	0,22	
		0,056				1,71				1,71	0,26	
		0,084				1,55				1,55	0,28	
		0,11				1,45				1,45	0,30	
		0,17				1,31				1,31	0,34	
		0,28				1,15				1,15	0,38	
		0,42				1,04				1,04	0,42	
		0,56				1,00				1,00	0,44	
		Шариковые радиально-упорные				12				0,014	1	0
0,029	1,62		1,62	0,34								
0,057	1,46		1,46	0,37								
0,086	1,34		1,34	0,41								
0,11	1,22		1,22	0,45								
0,17	1,13		1,13	0,48								
0,29	1,04		1,04	0,52								
0,43	1,01		1,01	0,54								
0,57	1,00		1,00	0,54								
18-20	-		0,43	1,00	1,09	0,70	1,63	0,57				
24-26			0,41	0,87	0,92	0,67	1,44	0,68				
30			0,39	0,76	0,78	0,63	1,24	0,80				
35-36			0,37	0,66	0,66	0,60	1,07	0,95				
40			0,35	0,57	0,57	0,57	0,93	1,14				
Роликовые конические	-		-	1	0	0,4	0,4 ctg α	1	0,45 ctg α	0,67	0,67 ctg α	1,5 tg α
Шариковые упорно-радиальные	45		-	-	-	0,66	1	1,18	0,59	0,66	1	1,25
	60		-	-	-	0,92	1	1,90	0,54	0,92	1	2,17
	75	-	-	-	1,66	1	3,89	0,52	1,66	1	4,67	
Роликовые упорно-радиальные	-	-	-	-	tg α	1	1,5 tg α	0,67	tg α	1	1,5 tg α	

4. Значения коэффициента K6

Характер нагрузки на подшипник	Вибрационные перегрузки	K6, рекомендуемые	
		в авиационном	в общем машиностроении
Спокойная нагрузка без толчков	Jg ≤ 1	1	1
Легкие толчки, небольшие виброперегрузки	1 < Jg ≤ 3,5	1,05-1,10	-
Умеренные толчки и вибрации	3,5 < Jg ≤ 6	1,15-1,20	1,3-1,8
Значительные толчки и вибрации	6 ≤ Jg < 10	1,25-1,35	-
Сильные удары и высокие виброперегрузки	Jg ≥ 10	1,35-1,60	2-3

чениях осевой силы Fa (или до некоторого отношения Fa/VFr ≤ e) из-за радиального зазора в подшипнике возникает повышенная неравномерность распределения нагрузки между телами качения. С увеличением осевой нагрузки (или при Fa/VFr > e) происходит выборка зазора, рабочая зона в подшипнике возрастает и улучшается распределение нагрузки.

Поэтому при отношении Fa/VFr ≤ e осевую силу не учитывают (принимают X = 1 и Y = 0) и расчет ведут лишь по радиальной нагрузке.

Значения e даны в табл. 3 в зависимости от отношения Fa/C0 (здесь C0 — статическая грузоподъемность подшипника, приведена в каталогах на подшипники).

В ряде отраслей машиностроения (авиа-, вагоностроения и т. д.) при точном определении нагрузок используют более низкие значения K6, подтвержденные опытом эксплуатации (см. табл. 4).

В радиально-упорном шарикоподшипнике от действия радиальной силы возникает дополнительная осевая нагрузка

$$S = eF_r \quad (23)$$

а в коническом роликоподшипнике

$$S = 0,83eF_r \quad (24)$$

Таким образом, если вал установлен на двух радиально-упорных подшипниках, то осевая нагрузка на одном из них будет состоять из внешней осевой нагрузки и дополнительной осевой силы от другого подшипника.

Приведенная нагрузка для подшипников с короткими цилиндрическими роликами

$$P = F_r V K_6 K_T \quad (25)$$

а для упорных подшипников

$$P = F_a K_6 K_T \quad (26)$$

Для упорно-радиальных подшипников приведенная нагрузка определяется по формуле (22) при V = 1.

Если подшипники работают при изменяющихся со временем нагрузке и частоте вращения, то расчет ведут по эквивалентной нагрузке, равноопасной по усталостной прочности переменному режиму нагружения (см. гл. 3):

$$P_{\text{экв}} = \sqrt[3]{\frac{P_1^3 L_1 + P_2^3 L_2 + \dots + P_n^3 L_n}{L}} \quad (27)$$

где P1, P2, ..., Pn — постоянные нагрузки, действующие соответственно в течение L1, L2, ..., Ln оборотов; L — суммарное число миллионов оборотов за ресурс изделия: L = L1 + L2 + ... + Ln.

Число оборотов подшипника (в миллионах оборотов) на i-м режиме (i = 1, 2, 3, ... n)

$$L_i = 6 \cdot 10^{-5} n_i L_{hi} \quad (28)$$

где ni — частота вращения, об/мин; Lhi — время работы подшипника, ч. Если нагрузка изменяется от Pmin до Pmax по линейному закону, то

$$P_{\text{экв}} = \frac{P_{\text{min}} + 2P_{\text{max}}}{3} \quad (29)$$

5. Значение коэффициента KT

Твердость HRC поверхностей колец и тел качения	Температура отпуска колец и тел качения, °C	KT
Не менее 59	225 и ниже	1
58-59	250	1,05
57-58	275	1,1
55-57	300	1,25

ВЫБОР ПОДШИПНИКОВ

Выбор подшипников качения производят по приведенной нагрузке P и расчетному ресурсу L в млн. оборотов по формуле

$$C_{расч}^p = P \sqrt[p]{L}, \quad (30)$$

где $p = 3$ для шарикоподшипников, $p = 3,33$ для роликоподшипников.

Используя полученное расчетное значение динамической грузоподъемности, по справочнику или каталогу выбирают подшипник, при этом должно быть удовлетворено условие $C \geq C_{расч}$ (C — динамическая грузоподъемность подшипника по каталогу).

Если подшипник принят по конструктивным соображениям, то расчетом проверяют его ресурс, ч

$$L_h = \frac{10^6}{6n} \left(\frac{C}{P} \right)^p. \quad (31)$$

В этих соотношениях под P понимают приведенную нагрузку при постоянном режиме работы и эквивалентную нагрузку (см. стр. 151) при переменном режиме работы, n — частота вращения, об/мин.

Пример. Подобрать подшипники для вала зубчатой передачи, работающей при постоянном режиме и нагрузке со значительными толчками: $F_{r1} = 400$ кгс; $F_{a1} = 100$ кгс; $F_{r2} = 150$ кгс; $n = 2000$ об/мин; $L_h = 10\,000$ ч; желательный диаметр отверстия 45 мм; температура в подшипнике $t < 100^\circ\text{C}$.

Расчет ведем по наиболее нагруженному первому подшипнику. Так как осевая нагрузка невелика, а частота вращения значительная, то выбираем шарикоподшипник радиальный.

1. Вычисляем отношение при $V = 1$:

$$e_{расч} = \frac{F_a}{V F_r} = \frac{100}{1 \cdot 400} = 0,25.$$

Полученное значение находится в пределах табличных значений e (см. табл. 3). Однако определить коэффициенты X и Y для расчета динамической грузоподъемности по формуле (22) мы не можем, так как неизвестно значение e , соответствующее отношению $\frac{F_a}{C_0}$ для искомого подшипника (подшипник пока не подобран и неизвестно значение C_0). Задачу решаем подбором.

2. В первом приближении полагаем, что $e_{расч} < e_{табл}$ и принимаем из табл. 3 $X = 1$ и $Y = 0$.

3. Определяем приведенную нагрузку при $K_T = 1$ и $K_6 = 1,3$:

$$P = (X V F_r + Y F_a) K_6 K_T = (1 \cdot 1 \cdot 400 + 0) 1,3 \cdot 1 = 520 \text{ кгс.}$$

4. Вычисляем долговечность

$$L = \frac{6nL_h}{10^6} = \frac{6 \cdot 2000 \cdot 10^4}{10^6} = 1200 \text{ млн. об.}$$

5. По формуле (30) находим динамическую грузоподъемность

$$C_{расч} = P \sqrt[p]{L} = 520 \sqrt[3]{1200} = 5460 \text{ кгс.}$$

6. По каталогу для подшипников тяжелой серии при $d = 45$ мм находим $C = 6040$ кгс, что выше расчетного значения, т. е. $C > C_{расч}$.

7. Полагаем, что мы занизили значение Y , приняв $Y = 0$, и проверяем подшипник с $d = 45$ мм. По табл. $C_0 = 4640$ кгс, при этом отношение $\frac{F_a}{C_0} = \frac{100}{4640} \approx 0,021$.

Однако по таблице 3 этому значению отношения $\frac{F_a}{C_0}$ соответствует $e_{табл} = 0,205 > e_{расч}$ ($e_{расч} = 0,021$). Следовательно, значения коэффициентов X и Y приняты правильно, и подшипник 409 с $d = 45$ мм удовлетворяет режиму работы.

СМАЗКА ПОДШИПНИКОВ

Для смазывания подшипников используют пластичные (консистентные) смазки, жидкие минеральные или синтетические масла и твердые смазки. Ниже приведены наиболее часто применяемые смазки.

Кальциевые смазки (солидолы) применяют при длительной работе до температуры подшипника не выше 60°C , кратковременно до 70°C ; допустимая окружная скорость вала не выше 10 м/с.

Натриевые смазки (консталины) применяют при окружной скорости вала не выше 10 м/с. Эти смазки более тугоплавки, благодаря чему их допустимо использовать при температурах подшипника до $100-120^\circ\text{C}$.

Комбинированные натриево-кальциевые смазки (1-13, ЛЗ-ЦНИИ ЯНЗ-2) используют при окружных скоростях вала до 15 м/с. Смазка 1-13 является смазкой общего назначения для подшипников, работающих при температурах от -20 до $+100^\circ\text{C}$. Смазку ЛЗ-ЦНИИ используют для подшипников букс железнодорожных вагонов.

Литиевые смазки (ЦИАТИМ-201, ОКБ 122-7) широко используют в подшипниках закрытого типа. Они могут работать при температурах от -60°C до $+100^\circ\text{C}$. Для работы при высоких температурах и повышенных окружных скоростях применяют смазки ЦИАТИМ-221 для температур от -60°C до $+150^\circ\text{C}$ и ЦИАТИМ-221с для температур от -60°C до $+200^\circ\text{C}$. Для работы при повышенных температурах (до 150°C) можно использовать смазки НК-50.

Корпуса подшипников заполняют консистентной смазкой в объеме $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ свободного пространства.

В качестве жидких масел используют минеральные или синтетические масла. Минеральные масла сохраняют свои свойства до температуры 120°C при длительной работе и до 150°C при кратковременной работе. Для более высоких температур используют синтетические масла, некоторые сорта которых стабильны до температуры $250-300^\circ\text{C}$.

Твердые смазки используют в подшипниковых узлах, работающих в вакууме, в условиях очень низких температур (ниже -100°C) или весьма высоких ($t > 300^\circ\text{C}$), при работе в агрессивных средах, не допускающих присутствия какого-либо количества масел и даже их паров.

В качестве твердых смазок для указанных условий работы наиболее часто используют коллоидальный графит, дисульфид молибдена (MoS_2), нитрид бора (BN), и некоторые другие вещества, обладающие слоистой структурой. Кроме того, в качестве твердых смазок используют фтористые соединения и некоторые окислы.

Для повышения работоспособности и надежности подшипников, работающих в условиях вакуума или в атмосфере, но без подачи смазки, сепараторы подшипников изготавливают из так называемых самосмазывающихся материалов, которые и используют при работе в качестве смазки рабочих поверхностей подшипника. При этом тела качения, соприкасаясь со стенками гнезд сепаратора, снимают с них тонкую пленку твердой смазки и переносят ее на поверхности качения колец подшипника.

В зависимости от условий работы применяют различные способы подачи жидкой смазки в подшипники. Смазку посредством окунания тел качения в масляную ванну применяют до значений параметра $d_m n \leq 0,6 \cdot 10^6$ мм · об/мин. При горизонтальном расположении оси подшипников заливку минерального масла в корпус производят до уровня, соответствующего положению центра тела качения, занимающего в подшипнике нижнее положение.

Подачу смазки в подшипники фитилями или дозирующей масленкой, отрегулированной на подачу нескольких капель масла в час, применяют для высокоскоростных малогабаритных подшипников при значениях параметра $d_m n \leq 0,75 \cdot 10^6$ мм · об/мин при произвольном расположении вала. Фитили обычно изготавливают из фетра, который при работе выполняет и роль фильтра.

Для подшипников опор валов редуктора, коробок передач металлорежущих станков, автомобилей часто применяют подачу смазки в подшипники разбрызгиванием из общей масляной ванны погруженным в нее на 10—15 мм зубчатым колесом.

При этом в корпусе образуется масляный туман, проникающий в подшипники и обес-
печивающий их смазку.

Для лучшего охлаждения и смазки высокоскоростных легконагруженных
подшипников (быстроходных электрошлифовальных головок, высокочастотных
электроприводов небольшой мощности, ультрацентрифуг) весьма эффективна смазка
масляным туманом.

Смазку масляным туманом применяют при значениях параметра $d_m n$ до
 $1,7 \cdot 10^6$ мм · об/мин и более.

Для охлаждения и смазки высокоскоростных тяжелонагруженных подшипников
(опор валов мощных высокоскоростных редукторов, опор роторов газотурбинных
двигателей, мощных электродвигателей) применяют циркуляционную подачу масла
сплошными интенсивными струями из форсунок. Струи масла обычно направляют
в зазор между сепаратором и внутренним кольцом подшипника с наклоном к оси
подшипника $15-20^\circ$.

Общее число струй масла в зависимости от диаметра отверстия подшипника
указано ниже:

Диаметр отверстия подшипника, мм	До 40	Св. 40 до 70	Св. 70 до 100	Св. 100 до 150	Св. 150
Число струй, выравнивающих температуру колец подшипника	1-2	2-3	3-4	4-6	6-10 и более

Величина оптимальной прокачки масла (в л/мин) в зависимости от значения
параметра $d_m n$ и приведенной нагрузки может быть определена по формуле

$$V_0 = V_p + 1,2 \cdot 10^{-6} d_m n,$$

где d_m в мм; n , об/мин; V_p — приращение величины прокачки, зависящее от
приведенной динамической нагрузки P , определяемой при условии $K_0 = K_T = V = 1$.
Величина V_p для различных пределов приведенной динамической нагрузки приве-
дена ниже:

Величина динамической приведенной нагрузки, кгс	До 100	Св. 100 до 500	Св. 500 до 1500	Св. 1500 до 2500	Св. 2500
Приращение прокачки, л/мин	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5

Если к подшипнику дополнительно к теплу, развиваемому от работы тре-
ния, подводится тепло от нагретых сопряженных деталей (по валу или корпусу),
то для отвода этого тепла необходимо увеличить прокачку на величину, определяе-
мую из уравнения теплового баланса:

$$V_d = \frac{Q_d}{c(t_{\text{вых}} - t_{\text{вх}})},$$

где V_d — дополнительная прокачка масла для отвода тепла, поступающего к под-
шипнику от нагретых деталей, л/мин; Q_d — количество тепла, поступающего к под-
шипнику от нагретых деталей, ккал/мин; c — теплоемкость масла, ккал/(л · °С);
 $t_{\text{вых}}$ и $t_{\text{вх}}$ — температуры масла, соответственно выходящего из подшипника и вхо-
дящего в подшипник, °С.

Общая прокачка масла (в л/мин) для случаев подвода тепла к подшипнику
от нагретых деталей

$$V = V_0 + V_d.$$

Тепловыделение радиальных роликоподшипников при интенсивной струйной
смазке определяют по следующей эмпирической формуле (в ккал/с):

$$Q_p = K_\eta \left(0,03V^{0,58} e^{\lambda_p d n} + 10^{-3} F_r^\psi p - 10^{-7} d n - 0,04 \right),$$

где V — прокачка масла, л/мин; e — основание натуральных логарифмов; λ_p —
параметр, зависящий от прокачки масла,

$$\lambda_p = (1,96 - 0,043V) \cdot 10^{-6};$$

d — диаметр отверстия подшипника, мм; n — частота вращения подшипника, об/мин;
 F_r — радиальная нагрузка, кгс; ψ_p — показатель степени, зависящий от параметра
 $d n$,

$$\psi_p = 0,61 + 10^{-7} d n;$$

K_η — коэффициент, учитывающий влияние вязкости масла на трение подшипников.
Значение коэффициента K_η определяется по следующим уравнениям, аппрокси-
мирующим изменение тепловыделения в подшипниках в зависимости от вязкости
смазки:

при смазывании маслом с вязкостью, большей или равной вязкости трансформа-
торного масла при температуре 50°C , т. е. при $\eta \geq \eta_{\text{тр}}$,

$$K_\eta = V^{0,011} \left(\frac{\eta}{\eta_{\text{тр}}} - 1 \right) + \frac{0,011}{V} \left(\frac{\eta}{\eta_{\text{тр}}} - 1 \right);$$

при смазывании маслом с вязкостью, меньшей вязкости трансформаторного
масла при температуре 50°C , т. е. при $\eta < \eta_{\text{тр}}$,

$$K_\eta = \frac{1}{V^{0,015} \left(\frac{\eta_{\text{тр}}}{\eta} - 1 \right) + \frac{0,015}{V} \left(\frac{\eta_{\text{тр}}}{\eta} - 1 \right)},$$

где $\eta_{\text{тр}}$ и η — вязкости соответственно трансформаторного масла при температуре
 50°C и масла, используемого в действительных условиях работы.

Тепловыделение радиальных и радиально-упорных шарикоподшипников при
интенсивной струйной смазке определяют по следующей эмпирической формуле
(в ккал/с):

$$Q_{\text{ш}} = K_\eta \left[(2,2 + 1,5V) \cdot 10^{-2} e^{\lambda_{\text{ш}} d n} + \Delta Q_{\text{шр}} + \Delta Q_{\text{ша}} \right],$$

где $\lambda_{\text{ш}}$ — параметр для шариковых подшипников, зависящий от прокачки масла.

$$\lambda_{\text{ш}} = 10^{-6} (1,93 - 0,058V);$$

$\Delta Q_{\text{шр}}$ — слагаемое, учитывающее влияние на тепловыделение подшипников вели-
чины радиальной нагрузки,

$$\Delta Q_{\text{шр}} = 10^{-3} F_r^\psi - C_{\text{ш}};$$

$\psi_{\text{ш}}$ — показатель степени, зависящий от параметра $d n$,

$$\psi_{\text{ш}} = 0,61 + 1,2 \cdot 10^{-7} d n;$$

$C_{\text{ш}}$ — тепловыделение подшипника (в ккал/с) при радиальной нагрузке $F_r = 1000$ кгс,

$$C_{\text{ш}} = 0,03 + 1,2 \cdot 10^{-7} d n;$$

$\Delta Q_{\text{ша}}$ — приращение тепловыделения в шарикоподшипниках при действии осевой
нагрузки,

$$\Delta Q_{\text{ша}} = h F_a^\psi;$$

F_a — действующая на шарикоподшипник осевая нагрузка; h и ψ — параметры,
зависящие от значения $d n$ и прокачки V :

$$h = 3,2 \cdot 10^{-12} e^{0,45V} (d n)^{1,4};$$

$$\psi = 0,763 - 0,5 \cdot 10^{-7} d n - 0,27 \cdot 10^{-3} V^{3,3}.$$

При установившемся тепловом режиме подшипника можно принять, что все тепло,
выделяющееся в подшипнике при струйной форсуночной подаче масла, отводится
от него маслом, т. е. $Q_{\text{п}} = Q_{\text{м}}$.

Количество тепла в (ккал/с), отводимое маслом, определяют по уравнению

$$Q_m = \frac{cV\rho}{60} (t_{\text{вых}} - t_{\text{вх}}),$$

где c — теплоемкость масла, ккал/кг·°С (для трансформаторного масла $c = 0,45$ ккал/кг·°С; V — прокачка масла, л/мин; ρ — плотность масла при температуре, равной средней арифметической температуре входящего ($t_{\text{вх}}$) в подшипник масла и вытекающего ($t_{\text{вых}}$) из подшипника масла, кг/л; $t_{\text{вых}}$ — средняя температура вытекающего из подшипника масла, °С; $t_{\text{вх}}$ — температура масла перед входом в подшипник, °С.

Подставив в уравнение теплового баланса выражение для Q_m , можно определить среднюю температуру вытекающего из подшипника масла:

$$t_{\text{вых}} = t_{\text{вх}} + \frac{60Q_n}{cV\rho}.$$

НЕКОТОРЫЕ ПРИЧИНЫ ПРЕЖДЕВРЕМЕННОГО ВЫХОДА ИЗ СТРОЯ ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

Наиболее распространенные причины выхода из строя подшипников связаны с ошибками расчетного характера, отступлениями от технических условий на эксплуатацию машин, некачественным материалом деталей подшипника и его изготовлением, несовершенствами конструкции подшипника и его узла и пр.

Ниже указаны дополнительные причины преждевременного выхода из строя подшипников и меры по их устранению.

1. Существенное снижение долговечности подшипников происходит при наличии даже небольших коррозионных пятен или раковин на поверхностях качения. Во избежание этого при входном контроле необходимо тщательно проверять их состояние и не допускать на сборку подшипники даже с небольшими коррозионными пятнами на поверхностях качения.

2. Усталостные выкрашивания на телах качения и на дорожке качения наружного кольца могут возникать в условиях вращения с высокой частотой ($d_m n > 2 \cdot 10^6$ мм·об/мин) из-за значительных центробежных сил от тел качения.

3. В подшипниках с повышенным радиальным зазором при действии небольших (легких) нагрузок может происходить относительное проскальзывание поверхностей качения и, как следствие, изнашивание тел качения и дорожки качения вращающегося кольца подшипника. Меньше изнашивается дорожка качения неподвижного кольца. Износ от проскальзывания повышается с уменьшением воспринимаемой подшипником нагрузки, при увеличении частоты вращения подшипника и радиального зазора, а также при повышении сопротивления вращению комплекта тел качения с сепаратором. Проскальзывание чаще бывает в роликоподшипниках, чем в шарикоподшипниках.

Большое влияние на проскальзывание оказывает величина осевого зазора роликов относительно направляющих буртов неподвижного наружного кольца роликоподшипника. При малом или увеличенном осевом зазоре вращение роликов сопровождается повышенным трением их о направляющие бурты и тормозится ими, что увеличивает проскальзывание.

При монтаже роликоподшипников с тремя или четырьмя направляющими буртами (типа 1200, 4200 и 92 000) необходимо обеспечить расположение буртов одного кольца строго в одной плоскости с направляющими буртами другого кольца.

Повышенное сопротивление вращению комплекта роликов, сопровождаемое проскальзыванием, имеет место при повышенной шахматности расположения гнезд сепаратора, трении роликов в гнездах о чеканку сепаратора, при подаче в подшипник масла через наружное кольцо, затрудненном выходе масла из подшипника и наличии в подшипнике густой смазки.

В роликоподшипниках с бомбированными роликами проскальзывание роликов и их износ уменьшаются из-за повышенного сцепления с дорожками качения. Однако

при несимметричной бомбине возникает повышенное трение о направляющие бурты, приводящее иногда к повышенному скольжению и даже развороту роликов.

Для уменьшения или предотвращения скольжения и изнашивания необходимо:

а) повышать нагрузку на опоры;

б) уменьшать радиальный зазор в подшипнике;

в) использовать подшипники с осевым зазором между направляющими буртами наружного кольца и роликами не выше 0,04—0,07 мм;

г) уменьшать допуск на шахматное расположение гнезд сепаратора до 0,05 мм;

д) не допускать подачу смазки в подшипник через отверстия в его наружном кольце;

е) не применять смазки с повышенной вязкостью;

ж) использовать подшипники с полыми роликами и облегченным сепаратором;

з) применять в подшипниковом узле корпусы и цапфы с повышенной податливостью.

Для снижения проскальзывания роликов и их износа целесообразно использовать подшипники с направляющими буртами на внутреннем кольце и с направлением сепаратора по безбортовому наружному кольцу.

4. Из-за ударов и колебаний при транспортировке машин на дальние расстояния на поверхностях качения деталей подшипников возникают надины и контактная коррозия.

Последующая работа подшипника сопровождается усиленным износом перемычек сепаратора, тел качения и преждевременным выходом его из строя.

5. Повышенный перекося колец (осей валов) — одна из распространенных причин преждевременного разрушения подшипников.

Особенно чувствительны к перекося роликовые подшипники.

Повышенный перекося колец шарикоподшипников вызывает появление дополнительных динамических нагрузок на поверхностях качения, приводящих к усталостному выкрашиванию. В результате перекося колец шарики по окружности кольца также получают различные углы контакта из-за кривизны желоба и, находясь на неодинаковых радиусах от оси подшипника, вращаются с отличающимися (от средней скорости комплекта) скоростями. В результате отставания или опережения скорости сепаратора они совершают в его гнездах автоколебания, вызывая износ и усталостное разрушение продольных перемычек сепаратора.

Чувствительными к перекося оказываются радиально-упорные шарикоподшипники с углом контакта свыше 26°.

На возникновение и интенсивность автоколебаний шариков в гнездах сепаратора влияют также разноразмерность шариков, боковые и радиальные биения дорожек качения и другие факторы.

Склонность сепаратора к разрыву увеличивается также с повышением осевой нагрузки, что связано с увеличением при этом угла контакта.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В машиностроении распространены витые цилиндрические и специальные пружины.

Основными материалами для пружин являются высокоуглеродистые стали 65, 70, марганцовистая сталь 65Г, кремнистая сталь 60С2А (рабочие температуры для этих сталей от -60 до 120°C), хромованадиевая сталь 50ХФА (рабочая температура от -180 до 250°C) и др. (табл. 1).

Пружины, работающие в химически активной среде, изготавливают из цветных сплавов.

Для изготовления пружин в основном применяют стальную углеродистую проволоку диаметром от 0,2 до 5 мм. Эта проволока в соответствии с ГОСТ 9389-75 выпускается четырех классов:

Класс проволоки	I	II	IIA	III
Предел прочности σ_B , кгс/мм ²	145—315	125—280	125—270	105—235
Диаметр проволоки d , мм	0,14—6	0,14—8	0,14—6	0,14—8

Бóльшие значения σ_B имеет проволока меньшего диаметра.

Контроль готовых пружин включает внешний осмотр для выявления видимых невооруженным глазом поверхностных дефектов (трещины, заусенцы, риски и т. п.), измерение размеров (наружного и внутреннего диаметров, длины в свободном состоянии и отклонение оси от перпендикуляра к торцовой плоскости) и твердости (обычно HRC 40—48). Контроль пружин производят, как правило, выборочно.

Пружины особо ответственного назначения, помимо 100%-ного контроля подвергают технологическим испытаниям пробным грузом для оценки их упругих свойств и др. Клапанные пружины выборочно испытывают на усталостную прочность. Для защиты поверхности витков от окисления пружины ответственного назначения покрывают лаком или промасливают, а пружины особо ответственного назначения оксидируют, наносят цинковое или кадмиевое покрытие.

ВИТЫЕ ПРУЖИНЫ

Основное применение имеют пружины из проволоки круглого сечения. При больших внешних нагрузках применяют пружины с витками квадратного и прямоугольного сечения (пружины, вырезаемые из трубчатых заготовок).

Пружины *растяжения* (рис. 1, а) обычно навивают без просветов между витками, а в большинстве случаев — с начальным натяжением (давлением) между витками, компенсирующим частично внешнюю нагрузку. Натяжение обычно составляет $(0,25-0,3)P_3$, где P_3 — предельное усилие для пружины, при котором полностью исчерпываются упругие свойства материала. Внешнюю нагрузку такие пружины воспринимают обычно через зацепы в виде отогнутых последних витков (рис. 1, б, г) — для пружин диаметром до 3—4 мм. Такие зацепы имеют высокую концентрацию напряжений в местах отгиба и пониженную усталостную прочность. Для ответственных пружин диаметром более 4 мм часто применяют закладные зацепы (рис. 1, д—ж).

Пружины *сжатия* (рис. 2) навивают с просветом между витками, который должен на 10—20% превышать осевые упругие перемещения каждого витка при наибольшей внешней нагрузке. Для создания опорных плоскостей последние витки пружин сжатия поджимают к соседним и шлифуют перпендикулярно оси.

Соосность пружин с сопрягаемыми деталями достигается установкой опорных витков в специальные тарелки, в расточки корпуса, канавки. Аналогично центрируют и концентрические пружины (рис. 3).

Длинные пружины под нагрузкой теряют устойчивость (выпучиваются). Такие пружины обычно ставят на специальные оправки (рис. 4, а) или в стаканы (рис. 4, б). Концентрические пружины в ряде конструкций также разделяют стаканами (рис. 4, в).

1. Механические свойства наиболее распространенных пружинных сталей и сплавов

Сталь (сплав)	Температура закали, °С	Температура отпуска, °С	Не менее										Применение
			σ_B	σ_T	τ_B	τ_T	τ_{-1}	τ_0	G	δ_5		ψ	
										%			
65	840	480	100	80	70	50	30—35	50—60	0,83 · 10 ⁴	9	35	35	Пружины общего назначения
70	830	480	105	85	75	55	30—38	50—65	0,83 · 10 ⁴	8	30	30	
55Г	820	480	115	100	90	60	30—38	50—65	0,83 · 10 ⁴	8	30	30	
65Г	830	480	100	80	70	50	30—38	50—65	0,83 · 10 ⁴	8	30	30	
55С2	820	460	130	120	90—105	65—80	—	—	—	6	30	30	Пружины подвижного состава ж.-д. транспорта, клапанов, регуляторов, рабочая температура от -40 до 250°C
60С2А	860	460	160	140	105—115	80—90	40—45	70—75	0,8 · 10 ⁴	5	20	20	
60С2ХА	870	420	180	160	120—130	95—105	45—50*	80—85*	0,8 · 10 ⁴	5	20	20	Крупные пружины и пружины особо ответственного назначения, работающие при температуре от -40 до $+400^{\circ}\text{C}$ и в условиях переменных нагрузок
60С2ХФА	850	410	190	170	130—140	110—120	50—55*	85—90*	0,8 · 10 ⁴	6	35	45	
50ХГФА	840	520	130	120	90—100	70—80	30—38	50—65	0,8 · 10 ⁴	10	45	45	
50ХФА	850	520	130	120	90—100	70—80	30—40	55—65	0,8 · 10 ⁴	10	45	45	
50ХВА	850	520	130	120	90—100	70—80	35—45	55—65	0,8 · 10 ⁴	10	45	45	Пружины клапанов и приборов, работающие в магнитном поле, влажной атмосфере, воде и паре при температуре от -40 до $+200^{\circ}\text{C}$
БрОЦ4-3	100—150	—	80—90	—	—	—	—	—	—	0,5—2	—	—	
БрКМц3-1	воздух	—	65—75	—	—	—	—	—	—	6—8	—	—	

* Данные получены на базе $2 \cdot 10^6$ циклов.

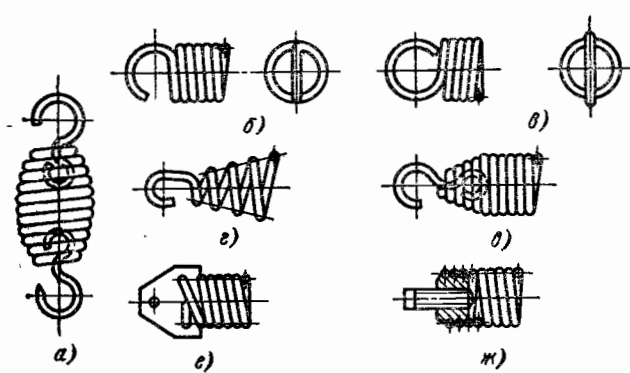


Рис. 1. Пружина растяжения и зацепы

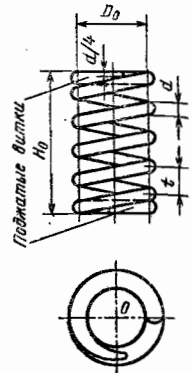


Рис. 2. Пружина сжатия

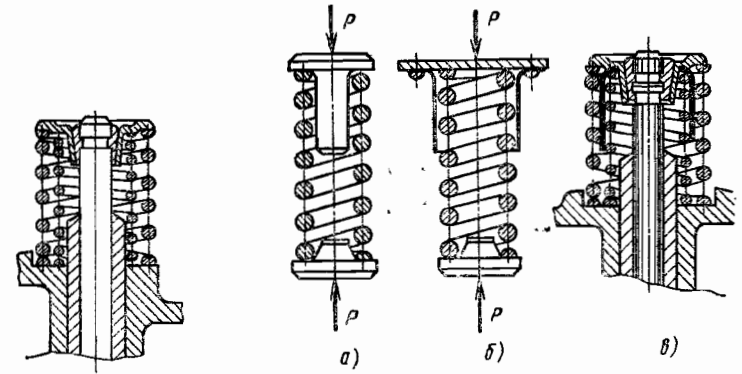


Рис. 3. Концентрические пружины

Рис. 4. Способы предотвращения выпучивания пружин

Для повышения несущей способности пружин сжатия в упругой области их подвергают заневоливанию. С этой целью пружины сжимают до соприкосновения витков и выдерживают (от 6 до 48 ч) до получения остаточной осадки.

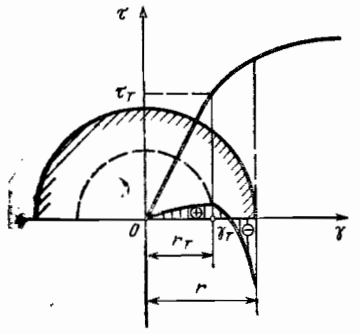


Рис. 5. Диаграмма сдвига

В результате осадки под нагрузкой в периферийных областях появятся пластические деформации, а в поперечных сечениях проволоки пружины возникнут напряжения, эпюра которых будет совпадать с диаграммой сдвига при первичном нагружении (рис. 5). При разгрузке пружины в ее сечениях возникнут остаточные напряжения, которые далее будут компенсировать (в периферийной наиболее нагруженной области) напряжения от внешней нагрузки, повышая таким образом нагрузочную способность пружины при работе в упругой области.

Пружины, работающие в условиях длительного воздействия переменных нагрузок, повышенных температур (150—450°С) и коррозион-

ных сред не заневоливают, так как сопротивление усталости заневоленных пружин не повышается.

Основные геометрические параметры пружин (см. рис. 2): диаметр проволоки d или размеры сечения; средний диаметр D_0 ;

$$\text{индекс } c = \frac{D_0}{d};$$

число рабочих витков n ;
длина рабочей части H_0 ;

$$\text{шаг витков } t = \frac{H_0}{n};$$

$$\text{угол подъема витков } \alpha = \arctg \frac{t}{\pi D_0}.$$

Последние три параметра рассматривают в ненагруженном и нагруженном состояниях.

Индекс пружины характеризует кривизну витка. Пружины с индексом $c \leq 3$ применять не рекомендуется из-за высокой концентрации напряжений в витках.

Обычно индекс пружины выбирают в зависимости от диаметра проволоки в следующих пределах:

d , мм	До 2,5	3—5	6—12
c	5—12	4—10	4—9

РАСЧЕТ ВИТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН

При центральном приложении силы P в любом поперечном сечении витка пружины возникают результирующая внутренняя сила P , параллельная оси пружины, и момент $M = P \frac{D_0}{2}$, плоскость которого совпадает с плоскостью пары сил P (рис. 6).

Нормальное поперечное сечение витка наклонено к плоскости момента под углом α . В этом сечении будут действовать силы и моменты (см. рис. 6):

$$\left. \begin{aligned} Q &= P \cos \alpha; & N &= P \sin \alpha; \\ M &= P \frac{D_0}{2} \cos \alpha; & M_n &= P \frac{D_0}{2} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1)$$

Ввиду малости угла подъема витков (обычно $\alpha < 10 \div 12^\circ$) можно считать, что сечение пружины работает на кручение.

Максимальное касательное напряжение в сечении пружины

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad (2)$$

где W_k — момент сопротивления сечения вала кручению.

С учетом кривизны витков и равенства (1) соотношение (2) примет вид

$$\tau_{\max} = \frac{kPD_0}{2W_k} \leq [\tau]_k, \quad (3)$$

где k — коэффициент, учитывающий кривизну витков и форму сечения (поправка к формуле для кручения прямого бруса); P — внешняя нагрузка (растягивающая или сжимающая); D_0 — средний диаметр пружины; $[\tau]_k$ — допусаемое касательное напряжение при кручении (табл. 2).

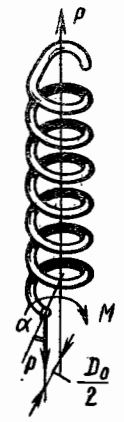


Рис. 6. Силовые факторы в сечении нагруженной пружины

2. Допускаемые напряжения для цилиндрических витых пружин растяжения-сжатия

Марка материала	Диаметр проволоки, мм	Твердость после термообработки	[τ] _к , кгс/мм ² , для класса пружин		
			I	II	III
60С2А, 65С2ВА, 70С3А, 50ХФА, 60С2ВА*, 65*	3-12 14-50	46-52	56 48	96 80	135 105
Проволока класса I	0,2-5	-	0,3σ _в	0,5σ _в	0,6σ _в
Проволока классов II, IIa и III					-
Бр.ОЦ 4-3 Бр.КМц 3-1	0,3-10	-	0,2σ _в 0,3σ _в	0,5σ _в 0,5σ _в	0,6σ _в 0,6σ _в

* Применяют для изготовления пружин классов II и III.

Примечания: 1. Долговечность пружин класса I при начальной затяжке P₁ ≥ 0,2P₃ (P₃ — сила пружины при максимальной осадке) не менее 5 · 10⁶ циклов; пружины класса II при тех же условиях имеют N ≥ 10⁶ циклов, сюда же относятся все статические пружины, длительно пребывающие под нагрузкой; пружины класса III — N ≥ 2 · 10⁶ циклов.

2. Значения [τ]_к даны с учетом кривизны витков.

3. Для сталей, не указанных в таблице, значения [τ]_к можно ориентировочно принимать для классов пружин: I — (0,25 ÷ 0,3) σ_в; II — (0,45 ÷ 0,5) σ_в; III — 0,6σ_в.

Значение коэффициента k для пружин из круглой проволоки при индексе c ≥ 4 можно вычислять по формуле

$$k = \frac{4c - 1}{4c + 1} + \frac{0,615}{c} \quad (4)$$

a для пружин прямоугольного сечения — принимать по рис. 7.

Для пружин прямоугольного поперечного сечения

$$W_k = \beta_1 b a^2 \quad (5)$$

и осевая податливость пружины

$$\lambda_{п} = \beta_2 \frac{D_0^3}{G a^4} \quad (6)$$

где b — высота, a — ширина прямоугольника; β₁ и β₂ — коэффициенты, зависящие от отношения сторон e = $\frac{b}{a}$ (табл. 3).

3. Значения коэффициентов β₁ и β₂

Коэффициенты	e						
	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0
β ₁	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281
β ₂	5,57	2,67	2,10	1,72	1,26	1,00	0,70

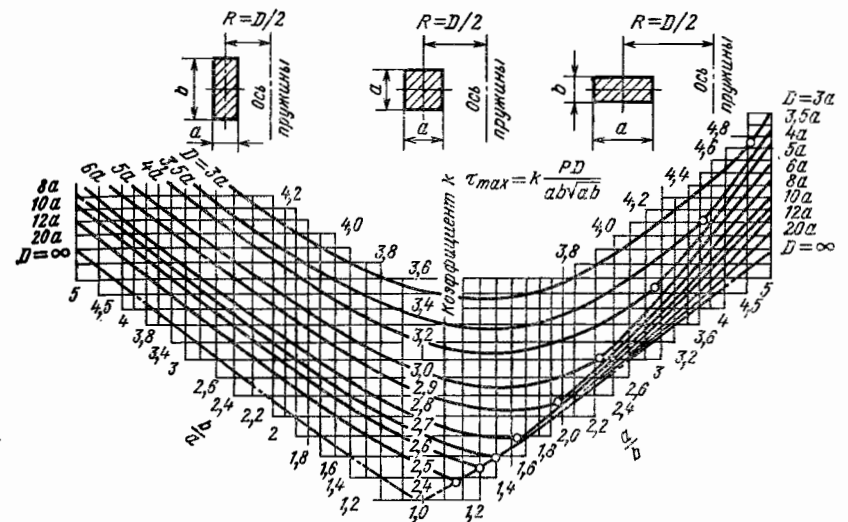


Рис. 7. К определению коэффициента k для пружин растяжения-сжатия прямоугольного сечения

Если пружина намотана из круглой проволоки, то W_к совпадает с полярным моментом сопротивления, и тогда

$$\tau_{max} = \frac{8kPD_0}{\pi d^3} = \frac{8kPc}{\pi d^2} \leq [\tau]_k \quad (7)$$

Осевое перемещение торцов пружины с углом подъема α ≤ 12°

$$\delta = \lambda_{п} P \quad (8)$$

Податливость пружины наиболее просто определить из энергетических соотношений.

Потенциальная энергия пружины

$$U_{пр} = \frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_k M_{кi}}{G J_k} dz \quad (9)$$

где M_{кi} = $\frac{D_0}{2}$ — крутящий момент в сечении пружины от силы P = 1 кгс; GJ_к — жесткость сечения витка на кручение; l ≈ πD₀n — полная длина рабочей части витков; n — число витков пружины.

Из соотношения (9) следует

$$\delta = P n \frac{\pi D_0^3}{4G J_k} \quad (10)$$

$$\lambda_{п} = \frac{D_0^3}{4G J_k} n = \lambda n \quad (11)$$

где λ — осевая податливость одного витка (осадка в мм при действии P = 1 кгс),

$$\lambda = \frac{D_0^3}{4G J_k} \quad (12)$$

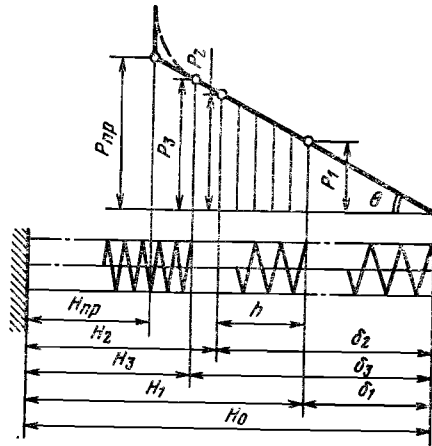


Рис. 8. Характеристика пружины сжатия

Для пружины из круглой проволоки полярный момент инерции сечения

$$J_k = J_p = \frac{\pi d^4}{32}, \dots (13)$$

и тогда формула (12) примет вид

$$\lambda = \frac{8D_0^3}{Gd^4} = \frac{8c^3}{Gd}, (14)$$

где G — модуль сдвига, $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \approx 0,384 E$; E — модуль упругости материала пружины.

Из формул (10) и (11) следует, что осевое перемещение (осадка) и податливость пружины возрастают при увеличении числа витков, индекса пружины (наружного диаметра) и уменьшении модуля сдвига материала.

На рис. 8 показана зависимость между нагрузкой и осадкой пружины сжатия. Если пружина установлена с предварительной затяжкой (осадкой) с усилием P_1 , то ее установочная длина

$$H_1 = H_0 - \delta_1 = H_0 - n\lambda P_1. (15)$$

Длина пружины при действии наибольшей внешней нагрузки P_2

$$H_2 = H_0 - \delta_2 = H_0 - n\lambda P_2. (16)$$

При действии нагрузки P_3 , соответствующей $[\tau]_k$, длина пружины будет наименьшей:

$$H_3 = H_0 - \delta_3 = H_0 - n\lambda P_3 = H_0 - [\tau]_k \frac{\pi D_0^3 n}{Gkd}. (17)$$

В соотношениях (15)–(17) H_0 — длина пружины в свободном (ненагруженном) состоянии.

Угол наклона прямой $P = f(\delta)$ (см. рис. 11) к оси абсцисс

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P_3}{\delta_3} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{1}{n\lambda}. (18)$$

В зависимости от назначения пружины усилие предварительной затяжки $P_1 = (0,1 \div 0,5) P_2$.

Наибольшая допустимая внешняя нагрузка для пружин растяжения и сжатия

$$P_3 = (1,1 \div 1,3) P_2. (19)$$

Конечный участок диаграммы пружины от силы P_3 до усилия P_{pp} , сжимающего пружину до соприкосновения витков, может оказаться нелинейным из-за неравномерности шага.

Рабочий ход (осадка) пружины *

$$h = H_1 - H_2 = n\lambda (P_2 - P_1). (20)$$

Если ход пружины задан, то необходимое число рабочих витков для обеспечения этого перемещения

$$n = \frac{h}{\lambda (P_2 - P_1)}. (21)$$

* Изменением величины предварительной затяжки можно регулировать осадку пружины.

Число витков округляют до полувитка при $n \leq 20$ и до одного витка при $n > 20$.
Полное число витков

$$n_1 = n + (1,5 \div 2,0). (22)$$

Дополнительные 1,5–2,0 витка идут на поджатие для создания опорных поверхностей у пружины.

Полная длина ненагруженной пружины

$$H_0 = H_3 + n(t - d), (23)$$

где H_3 — длина пружины, сжатой до соприкосновения соседних рабочих витков,*

$$H_3 = (n_1 - 0,5) d; (24)$$

t — шаг пружины, находится в зависимости от наибольшей осадки пружины

$$t = d + \frac{(1,1 \div 1,2) \delta_3}{n}, (25)$$

где наибольшая осадка пружины

$$\delta_3 = n\lambda P_3 = [\tau]_k \frac{\pi D_0^3 n}{Gkd}. (26)$$

В табл. 4 приведены значения наибольших допускаемых внешних нагрузок P_3 и податливостей витка пружины λ в зависимости от индекса c и диаметра проволоки d .

Длина проволоки, необходимая для изготовления пружины,

$$L = \frac{\pi D_0 n_1}{\cos \alpha} \approx 3,2 D_0 n_1, (27)$$

где α — угол подъема витков ненагруженной пружины, $\alpha = 6 \div 9^\circ$.

Для предотвращения выпучивания пружины от потери устойчивости ее гибкость $\frac{H_0}{D_0}$ должна быть менее 2,5.

Если по конструктивным соображениям это ограничение не выполняется, то пружину, как указано выше, следует ставить на оправках или монтировать в гильзах.

Длина пружины *растяжения* в ненагруженном состоянии

$$H_0 = nd + 2h_3, (28)$$

где h_3 — высота одного зацепа, $h_3 = (0,5 \div 1) D_0$.

Длина пружины при максимальной внешней нагрузке P_3

$$H_2 = H_0 + n\lambda (P_2 - P_1), (29)$$

где P_1 — усилие первоначального сжатия витков при навивке.

Длина проволоки для изготовления пружины

$$L = \frac{\pi n D_0}{\cos \alpha} + 2l_3 \approx 3,3 D_0 n + 2l_3, (30)$$

здесь l_3 — длина проволоки для одного зацепа.

Расчет пружин обычно начинают с определения диаметра проволоки (или размера сечения для некруглой проволоки), задаваясь величиной $[\tau]_k$ и индексом пружины c .

Диаметр проволоки находят из условия прочности (7)

$$d = 1,6 \sqrt{\frac{k P_3 c}{[\tau]_k}}. (31)$$

* Полное число витков уменьшено на 0,5 из-за того, что каждый конец пружины сошлифован на $0,25 d$ для образования плоского опорного торца.

4. Значения максимальной нагрузки при $[\sigma]_k = 40 \text{ кгс/мм}^2$ и податливости одного витка пружины

Индекс пружины c	Диаметр проволоки d , мм											
	1.6		2.0		2.2		2.5		2.8		3.0	
	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ
3	8,95	0,0169	13,98	0,0135	16,92	0,0123	21,84	0,0108	27,40	0,0096	31,46	0,0090
3,5	8,05	0,0268	12,58	0,0214	15,22	0,0195	19,66	0,0171	24,66	0,0153	28,31	0,0143
4	7,32	0,0400	11,44	0,0320	13,84	0,0291	17,87	0,0256	22,42	0,0229	25,74	0,0213
4,5	6,71	0,0570	10,45	0,0456	12,69	0,0414	16,38	0,0364	20,55	0,0325	23,59	0,0304
5	6,19	0,0781	9,678	0,0624	11,71	0,0568	15,12	0,0500	18,97	0,0446	21,78	0,0417
5,5	5,75	0,1040	8,981	0,0831	10,87	0,0756	14,04	0,0665	17,61	0,0584	20,22	0,0555
6	5,37	0,1350	8,39	0,1080	10,15	0,0982	13,11	0,0864	16,44	0,0771	18,87	0,0720
6,5	5,03	0,1716	7,86	0,1373	9,515	0,1248	12,29	0,1098	15,41	0,0981	17,69	0,0915
7	4,74	0,2144	7,40	0,1715	8,96	0,1559	11,56	0,1372	14,51	0,1225	16,65	0,1143
7,5	4,47	0,2637	6,99	0,2110	8,46	0,1918	10,92	0,1687	13,70	0,1507	15,73	0,1406
8	4,24	0,3196	6,62	0,2560	8,01	0,2327	10,35	0,2048	12,98	0,1829	14,90	0,1707
8,5	4,03	0,3838	6,29	0,3070	7,61	0,2791	9,83	0,2456	12,33	0,2193	14,15	0,2047
9	3,83	0,4556	5,99	0,3645	7,25	0,3314	9,36	0,2916	11,74	0,2604	13,48	0,2430
9,5	3,66	0,5359	5,72	0,4287	6,92	0,3897	8,94	0,3429	11,21	0,3062	12,86	0,2858
10	3,50	0,6250	5,47	0,5000	6,62	0,4645	8,55	0,4000	10,72	0,3571	12,31	0,3333

Индекс пружины c	Диаметр проволоки d , мм											
	3.2		3.5		3.8		4.0		4.5		5.0	
	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ
3	35,79	0,0084	42,81	0,0077	50,47	0,0071	55,92	0,0068	70,77	0,0060	87,37	0,0054
3,5	32,21	0,0134	38,53	0,0122	45,42	0,0113	50,33	0,0107	63,70	0,0095	78,64	0,0086
4	29,28	0,0200	35,03	0,0183	41,29	0,0168	45,75	0,0160	57,91	0,0142	71,49	0,0128
4,5	26,84	0,0285	32,11	0,0260	37,85	0,0240	41,94	0,0232	53,08	0,0202	65,53	0,0182
5	24,78	0,0391	29,64	0,0357	34,94	0,0329	38,71	0,0312	48,00	0,0278	60,49	0,0250
5,5	23,01	0,0520	27,52	0,0475	32,44	0,0438	35,95	0,0416	45,50	0,0370	56,17	0,0333
6	21,47	0,0675	25,69	0,0617	30,28	0,0568	33,55	0,0540	42,46	0,0480	52,43	0,0432

Продолжение табл. 4

Индекс пружины c	Диаметр проволоки d , мм											
	3.2		3.5		3.8		4.0		4.5		5.0	
	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ
6,5	20,13	0,0858	24,08	0,0785	28,39	0,0723	31,45	0,0687	39,81	0,0610	49,15	0,0549
7	18,95	0,1072	22,67	0,0980	26,71	0,0963	29,60	0,0857	37,47	0,0762	46,26	0,0686
7,5	17,89	0,1318	21,40	0,1205	25,23	0,1110	27,96	0,1055	35,39	0,0957	43,69	0,0844
8	16,96	0,1600	20,28	0,1463	23,91	0,1347	26,49	0,1280	33,52	0,1138	41,39	0,1024
8,5	16,10	0,1919	19,27	0,1755	22,71	0,1616	25,16	0,1535	31,85	0,1365	39,32	0,1228
9	15,34	0,2278	18,34	0,2081	21,63	0,1918	23,97	0,1822	30,33	0,1620	37,45	0,1458
9,5	14,64	0,2679	17,51	0,2450	20,65	0,2256	22,88	0,2143	28,95	0,1905	35,74	0,1715
10	14,00	0,3125	16,75	0,2857	19,75	0,2632	21,88	0,2500	27,09	0,2222	34,19	0,2000

Индекс пружины c	Диаметр проволоки d , мм											
	5.5		6.0		6.5		7.0		7.5			
	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ	P_s	λ		
3	105,72	0,0049	125,82	0,0045	147,66	0,0042	171,25	0,0033	196,59	0,0036	223,33	0,0036
3,5	95,15	0,0078	113,24	0,0071	132,90	0,0066	154,13	0,0061	176,93	0,0057	203,57	0,0057
4	86,50	0,0116	102,94	0,0107	120,82	0,0098	140,12	0,0091	160,85	0,0085	183,33	0,0085
4,5	79,29	0,0166	94,37	0,0152	110,75	0,0140	128,44	0,0130	147,45	0,0121	167,67	0,0121
5	73,19	0,0227	87,11	0,0208	102,22	0,0192	118,56	0,0179	136,10	0,0167	155,67	0,0167
5,5	67,97	0,0303	80,88	0,0277	94,93	0,0256	110,09	0,0238	126,38	0,0222	144,33	0,0222
6	63,43	0,0393	75,49	0,0360	88,60	0,0332	102,75	0,0308	117,96	0,0288	136,33	0,0288
6,5	59,47	0,0499	70,77	0,0458	83,06	0,0422	96,33	0,0392	110,58	0,0366	128,33	0,0366
7	55,97	0,0624	66,61	0,0572	78,17	0,0528	90,66	0,0490	104,08	0,0457	122,33	0,0457
7,5	52,86	0,0767	62,91	0,0703	73,83	0,0649	85,63	0,0603	98,30	0,0562	112,33	0,0562
8	50,08	0,0931	59,60	0,0853	69,95	0,0788	81,12	0,0731	93,12	0,0683	106,33	0,0683
8,5	47,58	0,1117	56,62	0,1024	66,45	0,0945	77,06	0,0877	88,47	0,0819	100,33	0,0819
9	45,31	0,1325	53,92	0,1215	63,28	0,1122	73,39	0,1041	84,25	0,0972	96,33	0,0972
9,5	43,25	0,1559	51,47	0,1429	60,41	0,1319	70,06	0,1225	80,42	0,1143	92,33	0,1143
10	41,37	0,1818	49,33	0,1667	57,78	0,1538	67,01	0,1429	76,33	0,1333	88,33	0,1333

Если пружина имеет прямоугольное сечение, то ширина прямоугольника

$$a = 0,795 \sqrt[3]{\frac{kP_2 D}{\beta_1 \epsilon [\tau]_k}}$$

Далее по формулам (13), (21)—(27) определяют размеры пружины.

Расчет цилиндрических пружин растяжения-сжатия из проволоки круглого сечения при $d = 1,6 \div 7,5$ мм; $c = 3 \div 10$ и $[\tau]_k = 40$ кгс/мм² можно производить, используя табл. 4.

Пример 1. Заданы: ход пружины h , усилие предварительной затяжки P_1 и наибольшая внешняя нагрузка P_2 .

Из соотношения (19) находим P_3 и далее по табл. 4 подбираем d , D_0 ($D_0 = cd$) и λ . Потребное число витков пружины находим из соотношения (21), а размеры пружины — по формулам (22)—(27).

Пример 2. Заданы: наибольшая нагрузка P_2 , установочная длина H_1 и ход пружины h . По табл. 4 для заданного значения P_2 после вычисления P_3 находим d , D и λ . Потребное число витков пружины и ее размеры находим, задаваясь значением P_1 [$P_1 = (0,1 \div 0,5)P_2$] или h_1 .

Решение задач такого типа не однозначно, на выбор того или иного варианта могут влиять дополнительные конструктивные соображения, связанные, например, с выбором P_3 и P_1 . Выбор пружин из проволоки диаметром от 0,2 до 50 мм для сталей, приведенных в табл. 2, производят по ГОСТ 13764—68—ГОСТ 13776—68.

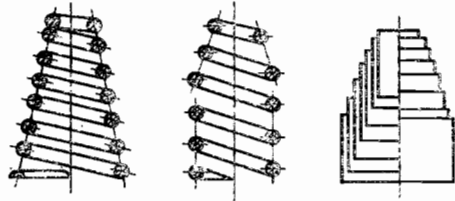


Рис. 9. Фасонные пружины

Эти стандарты распространяются на винтовые цилиндрические пружины растяжения и сжатия для нагрузок от 0,1 кгс до 10 000 кгс, с индексами $c = 4 \div 12$ и наружными диаметрами 1—700 мм. В зависимости от долговечности стандартные пружины делятся на классы (см. табл. 2).

При больших нагрузках и ограниченных габаритах используют составные пружины сжатия (см. рис. 3) — набор из нескольких (чаще двух) концентрически расположенных пружин, одновременно воспринимающих внешнюю нагрузку. Для предотвращения сильного закручивания торцовых опор и перекосов навивку соседних пружин выполняют в противоположных направлениях (левом и правом). Опоры выполняют так, чтобы обеспечивалась взаимная центровка пружин (см. рис. 3, 4).

Обычно составные пружины имеют одинаковые осадки. При их проектировании стремятся к тому, чтобы длины пружин, сжатых до соприкосновения витков, были приблизительно одинаковы, а наибольшие касательные напряжения у всех пружин были равны допусковому.

Первые два условия для пружин, навитых из круглой проволоки, эквивалентны равенству их индексов. При расчете двух концентрических клапанных пружин автотракторных двигателей часто средние диаметры пружин выбирают по конструктивным соображениям (в зависимости от диаметра горловины клапана). Радиальный зазор в таких пружинах составляет 1—2 мм.

Далее, принимая, что наружная пружина воспринимает 50—70% внешней нагрузки, находят диаметр проволоки (j — номер пружины)

$$d_{(j)} = \sqrt{\frac{8kP_{(j)2} D_{(j)}}{\pi [\tau]_k}}$$

и определяют длину пружин.

В последние годы получили распространение многожильные пружины, при изготовлении которых вместо одной проволоки используется трос, свитый из двух—

шести проволок малого диаметра ($d = 0,8 \div 2$ мм). По конструктивному решению такие пружины эквивалентны концентрическим пружинам. Благодаря высокой демпфирующей способности (за счет трения между жилами) и податливости многожильные пружины хорошо работают в амортизаторах и других подобных устройствах. При действии переменных нагрузок многожильные пружины довольно быстро выходят из строя от износа жил.

В конструкциях, работающих в условиях вибраций и ударных нагрузок, иногда применяют фасонные пружины (рис. 9) с нелинейной зависимостью между внешней силой и упругим перемещением пружины.

Расчет фасонных и многожильных пружин дан в работе [6], гл. 27.

РАСЧЕТ НА СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ

При действии статических нагрузок пружины могут выходить из строя вследствие появления пластических деформаций в витках.

Запас прочности по пластическим деформациям

$$n_\tau = \frac{\tau_\tau}{\tau_{\max}} > 1,3, \quad (32)$$

где τ_{\max} — наибольшие касательные напряжения в витке пружины, их вычисляют по формуле (7) при $P = P_{\max}$.

РАСЧЕТ НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Пружины, работающие длительно при переменных нагрузках (например, клапанные и др.), необходимо рассчитывать на усталостную прочность.

На рис. 10 показана диаграмма предельных напряжений для пружин, построенная в координатах τ_{\max} и τ_{\min} , где

$$\tau_{\max} = \frac{8kD}{\pi d^3} P_{\max}; \quad \tau_{\min} = \frac{8kD}{\pi d^3} P_{\min};$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2}; \quad \tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2}.$$

Витые пружины крайне редко работают одновременно на растяжение и сжатие, т. е. симметричный цикл нагружения (предел выносливости τ_{-1}) не характерен для пружин. Пульсирующее нагружение, характеризуемое пределом выносливости τ_0 , также встречается редко в динамически нагруженных пружинах. Большинство пружин работает в условиях асимметричного нагружения при $\tau_m > \tau_0$.

Запас прочности таких пружин находят из соотношения

$$n = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\tau_a}{\epsilon_\tau} + \psi_\tau \tau_m}, \quad (33)$$

где ϵ_τ — коэффициент, учитывающий влияние масштабного эффекта

$$\psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}.$$

Значения τ_{-1} и τ_0 даны в табл. 1. Обычно принимают $n = 1,2 \div 2,2$.

При определении запаса прочности значение эффективного коэффициента концен-

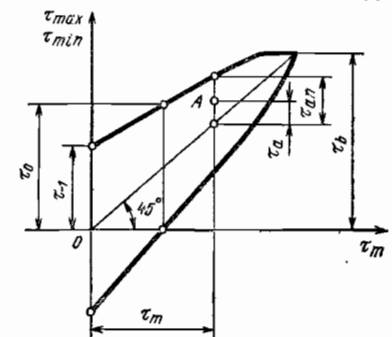


Рис. 10. Диаграмма предельных напряжений для пружин

трации напряжений $k_{\sigma} = 1$. Концентрацию напряжений учитывают при расчете напряжений [коэффициент k в формулах 31]. Для пружин с диаметром проволоки $d < 10$ мм принимают $\epsilon_{\tau} = 1$.

Для большинства пружинных сталей $\psi_{\tau} = 0,1 \div 0,2$.

Для клапанных пружин рекомендуется также проверять запас прочности по переменным напряжениям

$$n_a = \frac{\tau_{-1} - \psi_{\tau} \tau_m}{\tau_a} \quad (34)$$

Должно быть $n_a = 2 \div 3$.

Для повышения усталостной прочности (на 20—50%) пружины упрочняют дробеструйной обработкой, создающей в поверхностных слоях витков снижающие остаточные напряжения. Для обработки пружин используют шарики диаметром 0,5—1 мм. Более эффективной оказывается обработка пружин шариками малых диаметров при высокой скорости полета.

РАСЧЕТ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ

В ряде конструкций (амортизаторы и т. п.) пружины работают при ударных нагрузках — нагрузках, прикладываемых почти мгновенно с известной энергией удара. Отдельные витки пружины получают при этом значительную скорость и могут опасно соударяться.

Расчет реальных систем на ударную нагрузку связан со значительными трудностями (учет контактных, упругих и пластических деформаций, волновых процессов и т. д.), поэтому для инженерного приложения ограничимся энергетическим методом расчета.

Основной задачей расчета на ударную нагрузку является определение динамической осадки (осевого перемещения) и статической нагрузки, эквивалентной ударному воздействию на пружину с известными размерами.

Рассмотрим удар поршня весом Q по пружинному амортизатору (рис. 11).

Если пренебречь деформацией поршня и принять, что после удара упругие деформации мгновенно охватывают всю пружину, можно записать уравнение баланса энергии

$$K + Q \delta_d = \frac{\delta_d^2}{2\lambda_n} \quad (35)$$

Первое слагаемое левой части уравнения (35) выражает кинетическую энергию системы после соударения,

$$K = \frac{v_0^2}{2g} \frac{Q}{1 + \kappa} \frac{Q_1}{Q} \quad (36)$$

где v_0 — скорость движения поршня; κ — коэффициент приведения массы пружины с весом Q_1 к месту соударения.

Если принять, что скорость перемещения витков пружины изменяется линейно по ее длине, то $-\kappa = \frac{1}{3}$.

Второе слагаемое левой части уравнения выражает работу поршня после соударения при динамической осадке пружины на величину δ_d .

Правая часть уравнения (35) — потенциальная энергия деформации пружины (с податливостью λ_n), которая может быть возвращена при постепенной разгрузке деформированной пружины.

Из уравнения (35) с учетом соотношений (8) и (36) получим

$$\delta_d = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + \delta_{ст} \frac{v_0^2}{g(1 + \kappa) \frac{Q_1}{Q}}} \quad (37)$$

откуда коэффициент динамического усиления

$$k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{ст}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\lambda_n(Q + \kappa Q_1)}} \quad (38)$$

где $\delta_{ст}$ — осадка пружины при статическом нагружении ее поршнем с весом Q .

Из формул (37) и (38) следует, что динамическая осадка пружины существенно зависит от скорости движения поршня, а также жесткости пружины и соотношения масс (весов) поршня и пружины.

Если массой пружины можно пренебречь (в сравнении с массой поршня), то вся кинетическая энергия поршня перейдет в потенциальную энергию деформации. Динамическая осадка пружины при этом возрастет и будет

$$\delta_d^* = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + \delta_{ст} \frac{v_0^2}{g}} \quad (39)$$

В случае мгновенного приложения нагрузки ($v_0 = 0$)

$$\delta_d = 2\delta_{ст} \quad (40)$$

Статическая нагрузка, эквивалентная по эффекту ударному воздействию, может быть вычислена из соотношения

$$P_{эkv} = \frac{\delta_d}{\lambda_n} \quad (41)$$

Уточненный расчет пружин можно производить по схеме волнового метода расчета стержня (с эквивалентной податливостью), подверженному удару жестким грузом (см. [6] в гл. 27).

ТАРЕЛЬЧАТЫЕ ПРУЖИНЫ

Тарельчатые пружины (рис. 12, а) относят к классу жестких пружин, их применяют в мощных амортизационных устройствах.

Пружины изготавливают штамповкой из листовой стали (60С2А и др.) толщиной от 1 до 20 мм с наружным диаметром от 28 до 300 мм при отношении диаметров тарелок $c = \frac{D}{d} = 2 \div 3$. Для стандартных пружин угол наклона образующей конуса $\theta = 2 \div 6^\circ$. Наибольшая воспринимаемая нагрузка до $52 \cdot 10^3$ кгс.

Тарельчатые пружины имеют нелинейную зависимость осадки от действующей нагрузки P . Для пружин с $c \leq 2,5$

$$P \approx \frac{4Et\delta}{(1 - \nu^2)D^2A} \left[(h - \delta) \left(h - \frac{\delta}{2} \right) + t^2 \right], \quad (42)$$

где E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала тарелки; t — толщина листа; δ — осадка пружины; A — коэффициент, принимают по рис. 13; h — высота внутреннего усеченного конуса.

Во избежание полного распрямления тарелки расчетная осадка пружины не должна превышать $0,8h$.

Наибольшие окружные напряжения на внутренней кромке тарелки (в меридиональном сечении)

$$\sigma_{max} = \frac{4E\delta}{KD^2} (hK_0 - \delta K_1 + t), \quad (43)$$

где K , K_0 , K_1 — коэффициенты, принимают по рис. 13.

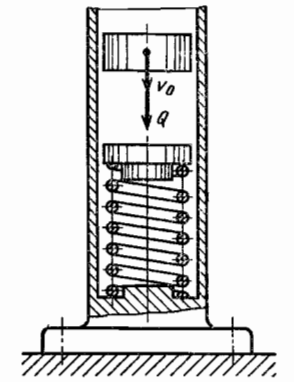


Рис. 11. Схема нагружения пружинного амортизатора

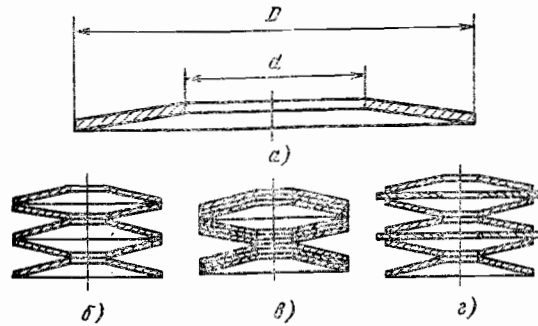


Рис. 12. Тарельчатые пружины

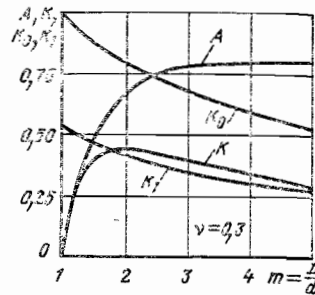


Рис. 13. К расчету тарельчатых пружин

Для повышения несущей способности тарельчатые пружины заневоливают обжатием до полного спрямления. В этом случае можно допускать $\sigma_{max} = \sigma_r$.

Тарельчатые пружины обычно подбирают по стандартным таблицам.

Для повышения податливости тарелки устанавливают последовательно в виде секций из двух пластин (рис. 12, б). Иногда между тарелками устанавливают шайбы (рис. 12, в) для лучшего гашения колебаний (за счет трения). При больших нагрузках пружины собирают пакетами (рис. 12, а), их несущая способность при этом оказывается пропорциональной числу тарелок.

ПРОРЕЗНЫЕ ПРУЖИНЫ

Прорезные пружины (рис. 14) также являются жесткими. Их применяют в тех случаях, когда радиальные габариты должны быть малыми, а несущая способность — большой. Пружины изготовляют путем фрезерования пазов в трубчатых заготовках.

Осадка пружины *

$$\delta = \kappa \frac{PR^3}{2nB} i, \tag{44}$$

где R — средний радиус кольца шириной b и толщиной h ; n — число прорезей или перемычек на торце кольца; B — жесткость сечения кольца на изгиб, $B = \frac{bh^3}{12} E$; i — число рабочих колец; κ — безразмерный коэффициент,

$$\kappa = \nu (\beta - \chi \sin \beta). \tag{45}$$

В соотношении (45): ν — коэффициент, $\nu = \frac{B}{K}$; K — жесткость сечения кольца на кручение, $K = \beta_1 hb^3 G$ (значения β_1 даны в табл. 3); β — половина угла между перемычками, $\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{S}{R} \right)$, где S — длина перемычки по окружности пружины; χ — коэффициент,

$$\chi = \frac{2\nu \sin \beta}{\beta (1 + \nu) - \frac{1}{2} (1 - \nu) \sin 2\beta}. \tag{46}$$

* При частом расположении перемычек необходимо учитывать деформации сдвига.

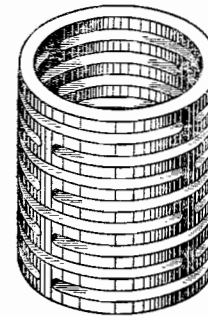


Рис. 14. Прорезные пружины

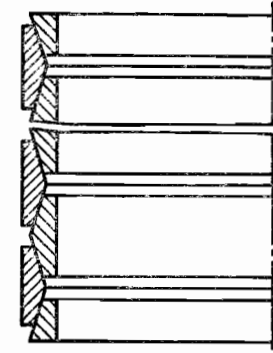


Рис. 15. Кольцевые пружины

В частном случае при числе прорезей $n = 2$ для кольца квадратного сечения со стороной a ($\nu = 1,54$) и при коэффициенте Пуассона $\mu = 0,3$

$$\delta = 0,972 \frac{PR^3}{Ea^4} i. \tag{47}$$

Приведенные максимальные напряжения у перемычек

$$\sigma_{max} = \xi \frac{PR}{bh^2} \leq [\sigma]. \tag{48}$$

В расчетах можно принимать

$\frac{b}{h}$	0,25;	0,5;	0,66;	1,0;	1,5;	2	3
ν	0,77;	0,95;	1,10;	1,54;	2,49;	3,8;	7,42
ξ	0,91;	1,0;	1,07;	1,22;	1,33;	1,35;	1,4

КОЛЬЦЕВЫЕ ПРУЖИНЫ

Кольцевые пружины (рис. 15) состоят из внутренних и внешних колец одинаковой толщины, опирающихся друг на друга. С нерабочей стороны кольца несколько вогнуты.

Под действием внешней нагрузки наружные кольца растягиваются, а внутренние — сжимаются. Преодолевая силы трения, кольца частично входят друг в друга, давая пружине осадку

$$\delta = \frac{(n-1)P}{2\pi E \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (\beta + \varphi)} \left(\frac{D_n}{F_n} + \frac{D_B}{F_B} \right), \tag{49}$$

где n — число колец (два из них торцовые, целые или укороченные, работают одной стороной); β — угол конусности, обычно $\beta = 14 \div 17^\circ$; φ — угол трения, $\operatorname{tg} \varphi = \mu$ (здесь μ — коэффициент трения, $\mu = 0,1 \div 0,15$); D_n и F_n — средний диаметр наружного кольца и площадь поперечного сечения; D_B и F_B — то же, для внутреннего кольца.

При постепенной разгрузке осадка пружины некоторое время сохраняется до тех пор, пока внутренние силы упругости уравновешиваются силами трения. Затем, преодолевая трение, кольца возвращаются в исходное состояние.

В результате кривые $P = f(\delta)$ при нагружении и разгрузке не совпадают, они образуют «пет-

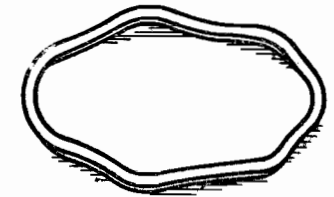


Рис. 16. Кольцевая волнистая пружина

левидную кривую». Площадь этой петли равна работе трения, она составляет обычно 60—70% полной работы.

Благодаря высокой амортизирующей способности, связанной с работой сил трения, кольцевые пружины широко используют в буферных и амортизирующих устройствах.

Напряжение растяжения в наружном кольце

$$\sigma_n = \frac{P_{\max}}{\pi F_n \operatorname{tg}(\beta + \varphi)}, \quad (50)$$

напряжение сжатия во внутреннем кольце

$$\sigma_n = \frac{P_{\max}}{\pi F_n \operatorname{tg}(\beta + \varphi)}. \quad (51)$$

Энергия, поглощаемая пружиной за один цикл (нагрузка-разгрузка),

$$T = \xi \frac{P\delta}{2}, \quad (52)$$

где $\xi = 0,6 \div 0,7$.

Пружины, работающие в условиях многократных нагружений, следует принудительно охлаждать.

При конструировании пружин необходимо иметь в виду, что угол β всегда должен быть больше угла трения φ .

На практике обычно используют следующие соотношения между высотой кольца H , наружным диаметром пружины D_a и средней толщиной колец b_{cp} :

$$\frac{H}{D_a} = \frac{1}{5} \div \frac{1}{6}; \quad \frac{b_{cp}}{H} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{5}.$$

Зазор e между двумя соседними кольцами (наружными или внутренними) при наибольшей внешней нагрузке не должен быть меньше 1 мм.

КОЛЬЦЕВЫЕ ВОЛНИСТЫЕ ПРУЖИНЫ

Эти пружины (рис. 16) являются разновидностью прорезных пружин, их применяют как компенсаторы температурных перемещений, а также в торцевых уплотнениях. Последнее связано с более равномерной передачей нагрузки на уплотняющие кольца, чем при использовании витых пружин.

При малой осадке грузоподъемность таких пружин высокая, чем обеспечивается компактностью конструкции. Их изготавливают штамповкой из тонколистовой стали.

Так как размеры поперечного сечения пружины малы в сравнении с радиусом кривизны, то при определении податливости и прочности можно использовать общепринятые методы расчета стержней малой кривизны (без учета нормальных и перерезывающих сил).

Осадка пружины

$$\delta = \kappa \frac{PR^3}{2nB}, \quad (53)$$

где R — средний радиус пружины; n — число волн пружины; B — жесткость сечения кольца шириной b и высотой h на изгиб; $B = \frac{bh^3}{12} E$; κ — коэффициент,

$$\kappa = (\alpha - \operatorname{tg} \alpha) (1 + 3\nu) + (1 + \nu) \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (54)$$

В соотношении (54): α — половина угла между опорными линиями, $\alpha = \frac{\pi}{2n}$; ν — коэффициент [см. формулу (45)].

Наибольшие напряжения изгиба в сечении кольца

$$\sigma_{\max} = \xi \frac{PR}{bh^2}, \quad (55)$$

где

$$\xi = \frac{3}{n} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

РЕЗИНОВЫЕ УПРУГИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Резиновые упругие элементы применяют в конструкциях упругих муфт (рис. 17), вибро- и шумоизолирующих опорах (рис. 18) и других устройствах для получения больших перемещений. Такие элементы обычно передают нагрузку через металлические детали (пластины и трубки и т. п.).

Преимущества резиновых упругих элементов: электроизолирующая способность; высокая демпфирующая способность; способность аккумулировать большее количество энергии на единицу массы, чем пружинная сталь (до 10 раз).

В табл. 5 приведены расчетные схемы и формулы для приближенного определения напряжений и перемещений для резиновых упругих элементов.

Материал элементов — техническая резина с пределом прочности $\sigma_n \geq 80$ кгс/см²; модуль сдвига $G = 50 \div 90$ кгс/см².

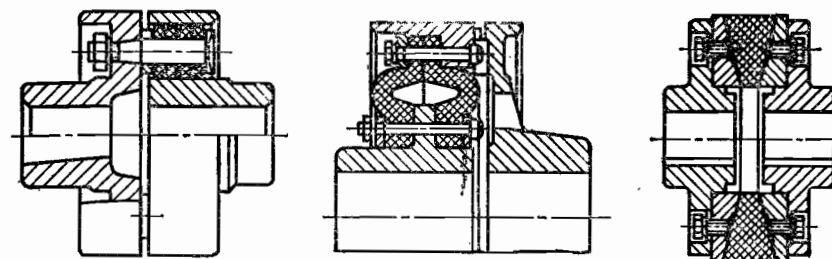


Рис. 17. Конструкции муфт с резиновыми упругими элементами: а — втулочно-пальцевая муфта; б — муфта с упругими оболочками; е — муфта с дисковым элементом

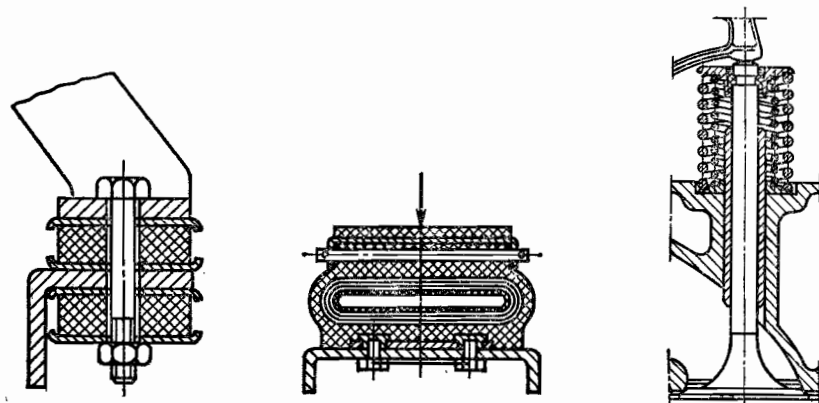
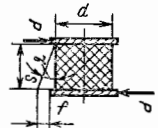
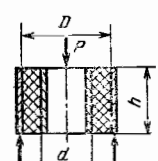
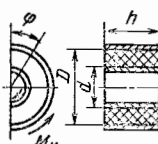
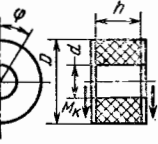
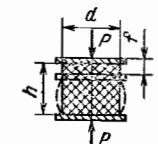


Рис. 18. Резиновый амортизатор

Рис. 19. Пневмоэластичный амортизатор

Рис. 20. К расчету клапанных пружин

5. К расчету резиновых упругих элементов

Расчетная схема элемента	Напряжения	Перемещения	Допускаемые напряжения, кгс/см ²															
			статические	динамические														
	$\tau = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}$	$f = S \operatorname{tg} \left(\frac{P}{GF} \right)$	15	4														
	$\tau = \frac{P}{F} = \frac{2P}{\pi(D+d)h}$	$f = \frac{P \ln \left(\frac{D}{d} \right)}{2\pi Gk}$																
	<table border="1"> <tr> <td>$\frac{f}{D-d}$</td> <td>0</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>1</td> <td>0,93</td> <td>0,89</td> <td>0,84</td> <td>0,81</td> <td>0,8</td> </tr> </table>	$\frac{f}{D-d}$			0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	1	0,93	0,89	0,84	0,81	0,8	
$\frac{f}{D-d}$	0	0,1			0,2	0,3	0,4	0,5										
k	1	0,93			0,89	0,84	0,81	0,8										
	$\tau = \frac{2M_k}{\pi d^2 h}$	$\varphi = \frac{M_k}{\pi h G \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{D^2} \right)}$	20	7														
	$\tau = 5,1 \frac{M_k D}{(D^4 - d^4)}$	$\varphi \approx 10,2 \frac{M_k}{G(D^4 - d^4)}$																
	$\sigma = \frac{P}{F}$	$f = \frac{Ph}{6,5GF}$			30	10												

Примечание. Допускаемые напряжения для резиновых элементов упругих муфт $[\sigma] = 20$ кгс/см².

В последние годы получают распространение пневмоэластичные упругие элементы (рис. 19).

Пример. Рассчитать клапанные пружины (рис. 20) для карбюраторного двигателя, если известно, что при полном открытии клапана (ход клапана $h = 11,5$ мм) пружины должны воспринимать усилие $P_{\max} = 36,2$ кгс, усилие затяжки $P_{\min} = 17$ кгс.

Клапанные пружины являются ответственными деталями. Принимаем в качестве материала пружин сталь 50ХВА ($\sigma_B = 130$ кгс/мм², $\sigma_T = 110$ кгс/мм², $\tau_{-1} = 40$ кгс/мм² и по табл. 2 для пружин класса 1 находим $[\tau]_K = 48$ кгс/мм²). В связи с ограниченными габаритами используем в конструкции две концентрические пружины сжатия.

Принимаем, что первая (наружная) пружина будет воспринимать 63,5% внешней нагрузки, когда вторая — 36,5%, откуда наибольшие усилия для пружин

$$P_{(1)2} = 0,635 P_{\max} = 23 \text{ кгс};$$

$$P_{(2)2} = 0,365 P_{\max} = 13,2 \text{ кгс}.$$

Усилия затяжки пружин:

$$P_{(1)1} = 0,5 \quad P_{(1)2} = 11,5 \text{ кгс};$$

$$P_{(2)1} = P_{\min} - P_{(1)1} = 17 - 11,5 = 5,5 \text{ кгс}.$$

Расчет первой пружины. Назначаем индекс * пружины $c = 8,7$. По формуле (31) вычисляем диаметр проволоки пружины **

$$d_{(1)} = 1,6 \sqrt{\frac{k_{(1)} P_{(1)2} c_{(1)}}{[\tau]_K}} = 1,6 \sqrt{\frac{23,6 \cdot 8,7}{48}} \approx 3,9 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_{(1)} = 4$ мм.

Средний диаметр пружины

$$D_{(1)0} = c_{(1)} d_{(1)} = 8,7 \cdot 4 = 34,8 \text{ мм}.$$

Податливость одного витка

$$\lambda_{(1)} = \frac{8D_{(1)0}^3}{Gd_{(1)}^4} = \frac{8(34,8)^3}{0,83 \cdot 10^4 (4)^4} = 0,16 \text{ мм/кгс}.$$

Необходимое число витков

$$n_{(1)} = \frac{h_{(1)}}{\lambda_{(1)} (P_{(1)2} - P_{(1)1})} = \frac{11,5}{0,16 (23 - 11,5)} = 6,25,$$

или, округляя до полувитка, получим

$$n_{(1)} = 6,5.$$

Полное число витков

$$n_{(1)1} = n_{(1)} + 1,5 = 6,5 + 1,5 = 8.$$

Длина пружины, сжатой до соприкосновения,

$$H_{(1)3} = (n_{(1)1} - 0,5) d_{(1)} = (8 - 0,5) \cdot 4 = 30 \text{ мм}.$$

Полная осадка пружины

$$\delta_{(1)2} = n_{(1)} \lambda_{(1)} P_{(1)2} = 6,5 \cdot 0,16 \cdot 23 = 23 \text{ мм}.$$

Шаг витков

$$t_{(1)} = d_{(1)} + \frac{1,26_{(1)2}}{n_{(1)}} = 4 + \frac{1,2 \cdot 23}{6,5} = 8,25 \text{ мм}.$$

Полная длина ненагруженной пружины

$$H_{(1)0} = H_{(1)3} + n_{(1)} (t_{(1)} - d_{(1)}) = 30 + 6,5 (8,25 - 4) = 57,6 \text{ мм}.$$

Так как $\frac{H_{(1)0}}{D_{(1)0}} = \frac{57,6}{34,8} = 1,66 < 2,5$, то опасность выпучивания пружины отсутствует.

* Обычно индекс клапанных пружин $c = 7 \div 10$.

** Значение $[\tau]_K$ принято с учетом кривизны витков.

Расчет второй пружины. Принимаем $c_{(2)} = c_{(1)} = 8,7^*$. По формуле (81) вычисляем диаметр проволоки

$$d_{(2)} = 1,6 \sqrt{\frac{k_{(2)} P_{(2)} c_{(2)}}{[\tau]_k}} = 1,6 \sqrt{\frac{1,16 \cdot 13,2 \cdot 8,7}{48}} \approx 2,9 \text{ мм.}$$

Принимаем $d_{(2)} = 3$ мм.
Средний диаметр пружины

$$D_{(2)0} = c_{(2)} d_{(2)} = 8,7 \cdot 3 = 26,1 \text{ мм.}$$

Определяем радиальный зазор между первой и второй пружинами

$$\delta_r = \frac{1}{2} (D_{(1)0} - D_{(2)0} - d_{(1)} - d_{(2)}) = \frac{1}{2} (34,8 - 26,1 - 4 - 3) = 0,85 \text{ мм.}$$

Обычно зазор в клапанных пружинах $\delta_r = 1 \div 1,5$ мм.

Уменьшаем индекс пружины, принимая $c_{(2)} = 8,5$.

Тогда средний диаметр пружины

$$D_{(2)0} = c_{(2)} d_{(2)} = 8,5 \cdot 3 = 25,5 \text{ мм,}$$

а радиальный зазор $\delta_r = 1,15$ мм.

Податливость одного витка

$$\lambda_{(2)} = \frac{8D_{(2)0}^3}{Gd_{(2)}^4} = \frac{8(25,5)^3}{0,83 \cdot 10^4 (3)^4} = 0,195 \text{ мм/кгс.}$$

Необходимое число витков при $\delta_{(1)} = \delta_{(2)}$

$$n_{(2)} = \frac{\delta_{(2)}}{\lambda_{(2)} (P_{(2)2} - P_{(2)1})} = \frac{11,5}{0,195 (13,1 - 5,5)} = 7,75;$$

округляя до полувитка, получим

$$n_{(2)} = 8.$$

Полное число витков

$$n_{(2)1} = n_{(2)} + 1,5 = 8 + 1,5 = 9,5.$$

Длина пружины, сжатой до соприкосновения,

$$H_{(2)3} = (n_{(2)1} - 0,5) d_{(2)} = (9,5 - 0,5) \cdot 3 = 27 \text{ мм.}$$

Так как $H_{(2)} < H_{(1)}$, то вторая пружина не достигнет предельной нагрузки.

Полная осадка пружины

$$\delta_{(2)2} = n_{(2)} \lambda_{(2)} P_{(2)2} = 8 \cdot 0,195 \cdot 13,1 = 20,3 \text{ мм.}$$

Шаг витков

$$t_{(2)} = d_{(2)} + \frac{1,2\delta_{(2)2}}{n_{(2)}} = 3 + \frac{1,2 \cdot 20,3}{8} = 6,05 \text{ мм.}$$

Полная длина ненагруженной пружины

$$H_{(2)0} = H_{(2)3} + n_{(2)} (t_{(2)} - d_{(2)}) = 27 + 8 (6,05 - 3) = 51,4 \text{ мм.}$$

Максимальные напряжения в пружине

$$\tau_{(2) \max} = \frac{8k D_{(2)0} P_{(2)2}}{\pi d_{(2)}^3} = \frac{8 \cdot 1,16 \cdot 25,5 \cdot 13,1}{\pi (3)^3} = 36,4 \text{ кгс/мм}^2 < 40 \text{ кгс/мм}^2.$$

Расчет пружин на прочность. Напряжения в поперечных сечениях пружин:

а) минимальные:

$$\tau_{(1) \min} = \frac{8k_{(1)} D_{(1)0} P_{(1)1}}{\pi d_{(1)}^3} = \frac{8 \cdot 1,16 \cdot 34,8 \cdot 11,5}{\pi (4)^3} = 16,6 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$\tau_{(2) \min} = \frac{8k_{(2)} D_{(2)0} P_{(2)1}}{\pi d_{(2)}^3} = \frac{8 \cdot 1,16 \cdot 25,5 \cdot 5,5}{\pi (3)^3} = 7,4 \text{ кгс/мм}^2;$$

* Можно задаться $d_{(2)}$ и из условия равенства длин сжатых до соприкосновения пружин найти $n_{(2)}$.

б) максимальные:

$$\tau_{(1) \max} = \frac{8k_{(1)} D_{(1)0} P_{(1)2}}{\pi d_{(1)}^3} = \frac{8 \cdot 1,16 \cdot 34,8 \cdot 23}{\pi (4)^3} = 37,1 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$\tau_{(2) \max} = 36,4 \text{ кгс/мм}^2.$$

Запас прочности по текучести (принимаем $\tau_T = 0,6\sigma_T$);

$$n_{(1)T} = \frac{0,6\sigma_T}{\tau_{(1) \max}} = \frac{0,6 \cdot 110}{37,1} = 1,77;$$

$$n_{(2)T} = 1,82.$$

Амплитуда переменных напряжений:

$$\tau_{(1)a} = \frac{\tau_{(1) \max} - \tau_{(1) \min}}{2} = \frac{37,1 - 16,6}{2} = 10,25 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$\tau_{(2)a} = \frac{\tau_{(2) \max} - \tau_{(2) \min}}{2} = \frac{36,4 - 7,4}{2} = 14,5 \text{ кгс/мм}^2.$$

Среднее напряжение цикла

$$\tau_{(1)m} = \frac{\tau_{(1) \max} + \tau_{(1) \min}}{2} = \frac{37,1 + 16,6}{2} = 26,85 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$\tau_{(2)m} = \frac{\tau_{(2) \max} + \tau_{(2) \min}}{2} = \frac{36,4 + 7,4}{2} = 21,9 \text{ кгс/мм}^2.$$

Запасы прочности при $\tau_{-1} = 40$ кгс/мм², $\psi_\tau = 0,2$, $\varepsilon_\tau = 1$;

$$n_{(1)} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{(1)a} + \psi_\tau \tau_{(1)m}} = \frac{40}{10,25 + 0,2 \cdot 26,85} = 2,56;$$

$$n_{(2)} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{(2)a} + \psi_\tau \tau_{(2)m}} = \frac{40}{14,5 + 0,2 \cdot 21,9} = 2,12.$$

Запас прочности по переменным напряжениям:

$$n_{(1)a} = \frac{\tau_{-1} - \psi_\tau \tau_{(1)m}}{\tau_{(1)a}} = \frac{40 - 0,2 \cdot 26,85}{10,25} = 3,4;$$

$$n_{(2)a} = \frac{\tau_{-1} - \psi_\tau \tau_{(2)m}}{\tau_{(2)a}} = \frac{40 - 0,2 \cdot 21,9}{14,5} = 2,46.$$

Запасы прочности вполне достаточные.

ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Разрушение зубьев при длительной работе можно в основном подразделять на два вида:

1) поломка зуба от изгиба в зоне его перехода в обод, где имеет место высокая концентрация напряжений (рис. 1);

2) повреждение рабочей поверхности зуба, которое обычно начинается с выкрашивания и может привести к обминанию, задирам и поломке зуба (рис. 2).

У основания недостаточно прочного зуба при повышенной концентрации напряжений (из-за малого радиуса галтели или наличия грубых следов обработки) на растянутой стороне появляется усталостная трещина, которая, постепенно распространяясь в глубь тела зуба и вдоль его основания, приводит к разрушению. При больших контактных напряжениях микроскопические усталостные трещины появляются на поверхности зубьев (обычно на ножках вблизи полюсной линии); развиваясь, эти трещины приводят к выкрашиванию мелких частиц металла и образованию пор и ямок, которые затем сливаются, захватывая все большую часть поверхности, вследствие чего передача выходит из строя.

В некоторых случаях зуб может сломаться или получить недопустимую остаточную деформацию в результате большой кратковременной (даже однократной) перегрузки. Такое статическое разрушение представляет опасность для зубьев из относительно хрупких материалов (например, чугуна) или же для зубьев с очень малым радиусом выкружки у корня, когда пластические деформации сильно локализуются.

У длинных зубьев иногда откалываются углы, что связано с концентрацией нагрузки у кромок. Если отколовшиеся частицы не попадут в зацепление, то оставшаяся часть зуба может продолжать некоторое время работать.

Разрушение поверхности зуба может произойти также вследствие заедания, которое возникает, если из-за большого выделения тепла при трении зубьев и плохом охлаждении значительно повышается температура в зоне контакта. При этом вязкость масла уменьшается, и оно выдавливается зубьями.

Открытые передачи подвержены абразивному износу вследствие попадания между зубьями твердых частиц пыли или грязи.

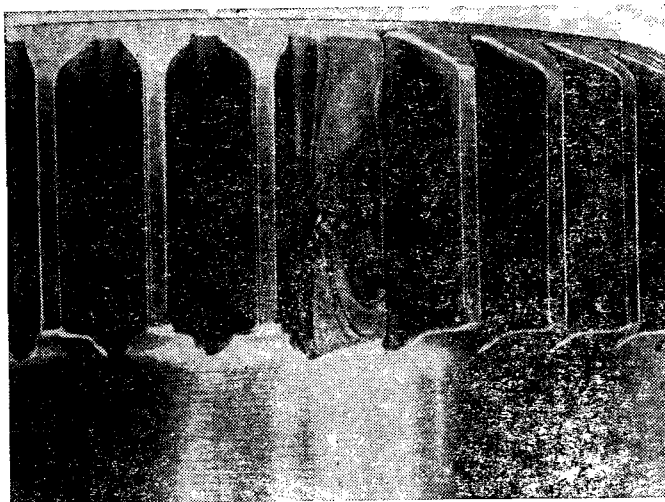


Рис. 1. Поломка зуба от изгиба

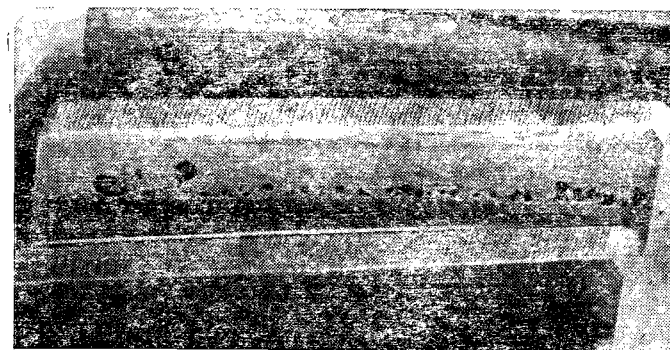


Рис. 2. Выкрашивание поверхности зуба

Износ сопровождается утонением зуба и нарушением его поверхности. Зубья рассчитывают: а) на выносливость и статическую прочность при изгибе; б) на контактную выносливость активных поверхностей (на выкрашивание).

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Схема зацепления прямозубых цилиндрических зубчатых колес без смещения показана на рис. 3. В табл. 1 приведены некоторые из основных определений и обозна-

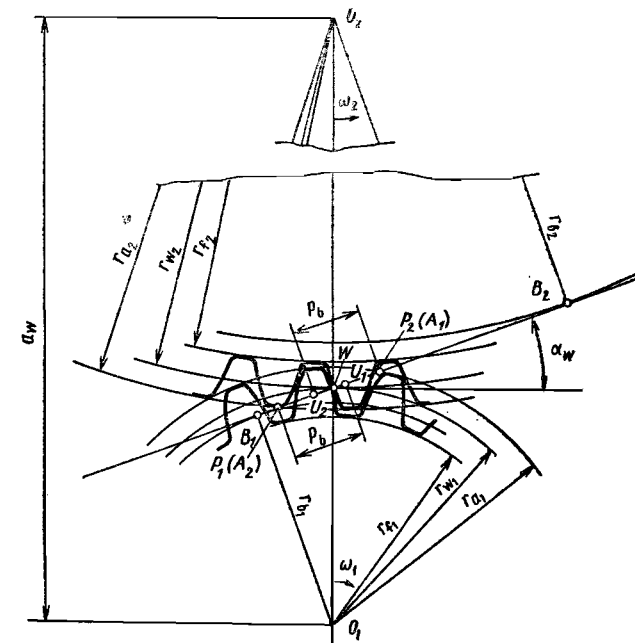


Рис. 3. Схема зацепления цилиндрических зубчатых колес без смещения

1. Основные определения и обозначения для прямозубых цилиндрических зубчатых колес

Термин, его определение	Обозначение по ГОСТ	Старое обозначение
Межосевое расстояние — расстояние между осями зубчатых колес передачи по межосевой линии O_1O_2	a_w	A
Шестерня — зубчатое колесо передачи с меньшим числом зубьев; относящиеся к нему величины имеют индекс 1		Индексы: ш
Колесо — зубчатое колесо передачи с ббльшим числом зубьев; относящиеся к нему величины имеют индекс 2		к
Число зубьев: шестерни колеса	z_1 z_2	$z_{ш}$ $z_к$
Передаточное число — отношение числа зубьев колеса z_2 к числу зубьев шестерни z_1 ($u \geq 1$)	u	i
Делительные диаметры — диаметры делительных окружностей, являющиеся базовыми для определения элементов зубьев и их размеров	d_1, d_2	$d_{ш}, d_к$
Начальные диаметры — диаметры начальных окружностей сопряженной пары колес, имеющих общие с зубчатыми колесами оси и катящихся одна по другой без скольжения (для колес без смещения начальные окружности совпадают с делительными)	d_{w1}, d_{w2}	$d_{ш}, d_к$
Диаметры основных окружностей — диаметры окружностей, разверткой которых являются эвольвенты зубьев	d_{b1}, d_{b2}	d_{o1}, d_{o2}
Диаметры вершин зубьев	d_{a1}, d_{a2}	$D_{Г1}, D_{Г2}$
Диаметры впадин	d_{f1}, d_{f2}	$d_{вп1}, d_{вп2}$
Высота зуба; $h = 0,5 (d_a - d_f)$	h	h
Высота головки зуба; $h_a = 0,5 (d_a - d)$	h_a	h'
Высота ножки зуба; $h_f = 0,5 (d - d_f)$	h_f	h''
Полюс зацепления — точка касания начальных окружностей	W	P
Линия зацепления — общая касательная к основным окружностям, проходящая через полюс зацепления (траектория общей точки контакта зубьев при ее движении относительно неподвижного звена передачи)	B_1B_2	C_1C_2
Активная линия зацепления — часть линии зацепления, по которой происходит взаимодействие зубьев	A_1A_2	B_1B_2
Угол зацепления — острый угол между линией зацепления и прямой, перпендикулярной к межосевой линии	α_w	α
Диаметры окружности верхних граничных точек однопарного зацепления	$d_{н1}$ $d_{н2}$	$d_{Аш}$ $d_{Ак}$
Диаметры окружностей нижних точек активных профилей зубьев (в колесах без смещения точки P_1, P_2 совпадают соответственно с точками A_2, A_1)	$d_{р1}$ $d_{р2}$	$d_{Бш}$ $d_{БК}$
Основной шаг — кратчайшее расстояние по основной окружности между одноименными профилями соседних зубьев	p_b	t_o
Делительный шаг — то же, но по делительной окружности	p	t
Модуль (характеристика масштаба колеса); $m = p/\pi = d_1/z_1 = = d_2/z_2$	m	m
Коэффициент перекрытия — отношение угла поворота зубчатого колеса от положения входа зуба в зацепление до выхода его из зацепления к угловому шагу $\tau = 2\pi/z$	ϵ_v	e

Продолжение табл. 1

Термин, его определение	Обозначение по ГОСТ	Старое обозначение
Рабочая ширина венца — общая часть ширины венцов зубчатых колес, участвующая в контакте	b_w	b
Толщина зуба (переменная)	s	S
Окружная скорость , измеряемая по начальной окружности, м/с	v	v

Примечание. Линейные размеры в мм.

чений по действующим ГОСТ 16530—70 и ГОСТ 16531—70, а также (для справок) обозначения, ранее применявшиеся в технической литературе.

Если зубчатое зацепление соответствует стандартному исходному контуру по СТ СЭВ 308—76, т. е. углу профиля $\alpha = 20^\circ$, высоте головки зуба $h_a = m$, радиальному зазору $c = 0,25 m$ и радиусу закругления у корня зуба $\rho_f = 0,38m$, то основные геометрические размеры колес без смещения можно определить с помощью табл. 2.

2. Основные размеры колес без смещения

Величина	Расчетная формула
Делительный (начальный) диаметр	$d = zm$
Диаметр вершин зубьев	$d_a = (z + 2) m$
Диаметр впадин	$d_f = (z - 2,5) m$
Межосевое расстояние	$a_w = 0,5 (z_1 + z_2) m$
Постоянная хорда (толщина зуба) \bar{s}_c	$\bar{s}_c = 1,3870m;$
при высоте до постоянной хорды (расстоянии от вершины зуба) \bar{h}_c	$\bar{h}_c = 0,7476m$

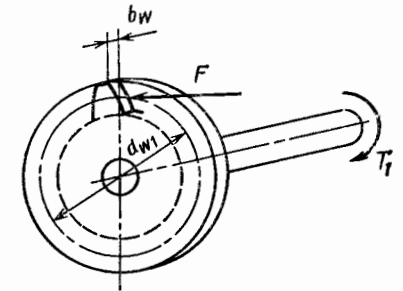


Рис. 4. Схема нагружения зуба

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРЯМЫХ ЗУБЬЕВ

Усилие, действующее на зуб. Крутящий момент на шестерне T_1 (в кгс·м) выражается через передаваемую мощность N (в кВт) и частоту вращения шестерни n_1 (в об/мин) формулой

$$T_1 = 974 \frac{N}{n_1} \quad (1)$$

и определяет окружную силу (в кгс) в зубчатой передаче

$$F = \frac{2000T_1}{d_{w1}}, \quad (2)$$

где d_{w1} — диаметр начальной окружности шестерни, мм (рис. 4).

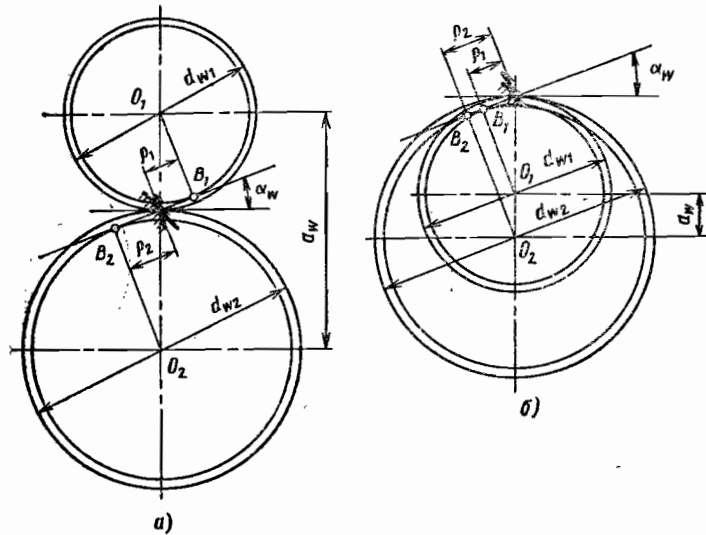


Рис. 5. Схемы внешнего (а) и внутреннего (б) зацеплений

Удельная расчетная окружная сила w (в кгс/мм), отнесенная к единице рабочей ширины венца b_w (в мм),

$$w = \frac{F}{b_w} K; \tag{3}$$

Удельная расчетная нормальная сила (в кгс/мм)

$$w_\alpha = \frac{w}{\cos \alpha_w}, \tag{4}$$

где α_w — угол зацепления.

Введением коэффициента K можно учесть неравномерность распределения нагрузки между зубьями и по ширине зуба и дополнительные динамические нагрузки в зацеплении. В предварительных расчетах принимают $K = 1,5 \div 2,0$. Из формул (2) — (3) следует

$$w = \frac{2000T_1}{b_w d_{w1}} K. \tag{5}$$

Для передач с внешним зацеплением (рис. 5, а) межосевое расстояние

$$a_w = 0,5 (d_{w2} + d_{w1}) = 0,5 d_{w1} (u + 1),$$

где d_{w1} — диаметр начальной окружности шестерни, мм; $u = z_2/z_1 = d_{w2}/d_{w1}$ — передаточное число. Из последней формулы

$$d_{w1} = \frac{2a_w}{u + 1}. \tag{6}$$

Подставив T_1 и d_{w1} из равенств (1) и (6) в формулу (5), получим

$$w = 9,74 \cdot 10^5 (u + 1) \frac{NK}{n_1 a_w b_w}. \tag{7}$$

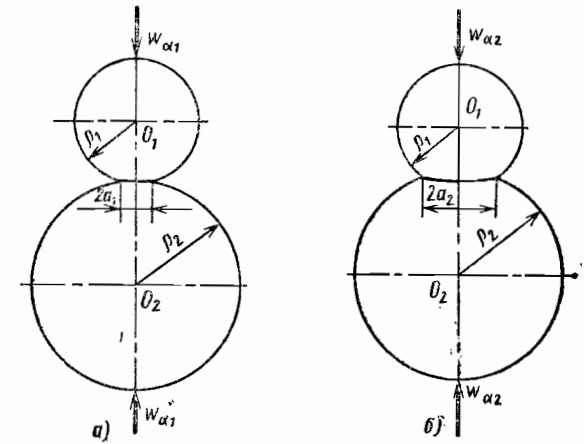


Рис. 6. Увеличение ширины контактной площадки с ростом нагрузки ($a_2 > a_1$)

Для передач с внутренним зацеплением (рис. 5, б)

$$a_w = 0,5 (d_{w2} - d_{w1}) = 0,5 d_{w1} (u - 1),$$

откуда

$$d_{w1} = \frac{2a_w}{u - 1},$$

и формула для определения удельной силы принимает вид

$$w = 9,74 \cdot 10^5 (u - 1) \frac{NK}{n_1 a_w b_w}. \tag{8}$$

Усилие, действующее на единицу ширины зуба, возрастает с увеличением передаваемой мощности и уменьшается с увеличением частоты вращения, межосевого расстояния и рабочей ширины зуба. Усилие вызывает деформацию поверхностного слоя зуба в зонах контакта и общий изгиб зуба.

Расчет на контактную выносливость. Так как контактная деформация носит местный характер, то для упрощения вместо сжатия зубьев рассматривают сжатие двух цилиндров, радиусы которых ρ_1 и ρ_2 соответственно равны радиусам кривизны профилей зубьев шестерни и колеса в зоне контакта (см. рис. 5). При сжатии двух цилиндров на их границе образуется площадка контакта, ширина которой $2a$ возрастает с увеличением нагрузки (рис. 6, а, б). Поэтому среднее контактное напряжение $\sigma_{Hm} = w_\alpha/2a$ увеличивается медленнее, чем сила w_α .

Фактически напряжения распределяются по ширине контактной площадки неравномерно. Максимальное контактное напряжение (в кгс/мм²) для зубьев из одинакового материала

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{w_\alpha E}{\rho_{np}}}, \tag{9}$$

где E — модуль упругости, кгс/мм²; ρ_{np} — приведенный радиус кривизны зубьев, мм.

Для передач с внешним зацеплением

$$\rho_{np} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 + \rho_1}. \tag{10}$$

Из рис. 5, а следует, что

$$\rho_1 = 0,5 d_{w1} \sin \alpha_w; \quad \rho_2 = 0,5 d_{w2} \sin \alpha_w = u \rho_1,$$

поэтому

$$\rho_{np} = 0,5 \frac{u}{u+1} d_{w1} \sin \alpha_w, \quad (11)$$

и формула (9) для стальных зубьев с углом зацепления $\alpha_w = 20^\circ$ принимает вид

$$\sigma_H = 153 \sqrt{\frac{w}{d_{w1}} \frac{(u+1)}{u}}, \quad (12)$$

где w определяется по формуле (5).

Выразив d_{w1} через межосевое расстояние a_w по формуле (6), получим

$$\sigma_H = 105 (u+1) \sqrt{\frac{w}{a_w u}}, \quad (13)$$

где a_w в мм.

Для передач с внутренним зацеплением (см. рис. 5, б)

$$\rho_{np} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1},$$

или

$$\rho_{np} = 0,5 \frac{u}{u-1} d_{w1} \sin \alpha_w, \quad (14)$$

и соответственно

$$\sigma_H = 153 \sqrt{\frac{w}{d_{w1}} \frac{(u-1)}{u}}, \quad (15)$$

или

$$\sigma_H = 105 (u-1) \sqrt{\frac{w}{a_w u}}. \quad (16)$$

Условие контактной выносливости активной поверхности зуба имеет вид

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP}, \quad (17)$$

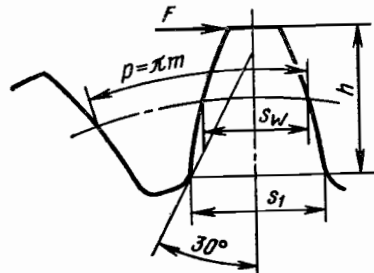
где σ_{HP} — допускаемое контактное напряжение, которое устанавливают по экспериментальным данным и обычно выражают через твердость поверхности зубьев. В приближенных расчетах можно принимать $\sigma_{HP} = \sigma_{H \text{ lim}}^0$; значения $\sigma_{H \text{ lim}}^0$ в кгс/мм² приведены на с. 223. Для передач с ограниченным числом циклов ($N < 10^7$) значения σ_{HP} могут быть увеличены на 10—30%.

Контактные напряжения возрастают с увеличением удельной окружной силы w и убывают с увеличением межосевого расстояния a_w . Условие контактной выносливости зубьев определяется минимально допустимая величина межосевого расстояния a_w , т. е. габариты передачи.

Расчет на выносливость зубьев при изгибе. Зуб рассчитывают на изгиб как консольную балку переменного сечения, нагруженную на конце сосредоточенной силой F (рис. 7), которую определяют по формуле (2). Максимальное напряжение в основании зуба (кгс/мм²)

$$\sigma_F = \frac{M_H}{W_a} \alpha_\sigma = \frac{6wh\alpha_\sigma}{s_1^2}, \quad (18)$$

Рис. 7. К упрощенному расчету зуба на изгиб



где h — высота; s_1 — толщина зуба в опасном сечении; α_σ — коэффициент концентрации напряжений в переходной части зуба.

Опасное сечение можно приближенно найти, если провести касательную к переходной кривой зуба под углом $\sim 30^\circ$ к его оси.

Формулу (18) можно представить в виде

$$\sigma_F = Y_F \frac{w}{m}, \quad (19)$$

где m — модуль, мм; Y_F — коэффициент, учитывающий форму зуба (безразмерная величина, численно равная напряжению в зубе с модулем $m = 1$ мм под действием нагрузки $w = 1$ кгс/мм). Коэффициент Y_F определяется по формуле

$$Y_F = \frac{6hm\alpha_\sigma}{s_1^2}. \quad (20)$$

Высота зуба до опасного сечения $h \approx 2m$. Соотношение между толщиной зуба в опасном сечении s_1 и толщиной зуба на начальной окружности $s_w \approx 0,5p$, где $p = \pi m$ — шаг зубьев, зависит от числа зубьев и других факторов. Принимая в среднем $s_1/s_w \approx 1,3$ и $\alpha_\sigma \approx 1,3$, получим из формулы (20) $Y_F \approx 3,7$, и формула (19) примет вид

$$\sigma_F \approx 3,7 \frac{w}{m}, \quad (21)$$

где w в кгс/мм, m в мм.

Более точные значения коэффициента Y_F приведены ниже.

Условие выносливости при изгибе зуба

$$\sigma_F \leq \sigma_{FP}, \quad (22)$$

где σ_{FP} — допускаемое напряжение при изгибе,

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F \text{ lim}}}{S_F}, \quad (23)$$

здесь $\sigma_{F \text{ lim}}$ — предел выносливости материала зубьев при пульсирующем цикле; S_F — коэффициент безопасности (запас прочности). В приближенном расчете принимают $S_F = 2,0 \div 2,5$.

Значения $\sigma_{F \text{ lim}}$ меняются в пределах от 40 кгс/мм² для поверхностно неупрочненных зубьев до 80—100 кгс/мм² для цементованных и нитроцементованных зубьев.

Напряжения изгиба в зубе возрастают с увеличением удельной окружной силы w и убывают с увеличением модуля m . Из условия прочности зуба на изгиб определяют величину модуля m (размер зубьев), а следовательно, и их число $z = d/m$.

Пример. Проверить прочность зубьев при следующих исходных данных: мощность передачи $N = 7$ кВт, частота вращения шестерни $n_1 = 400$ об/мин; передаточное число $u = 4$, модуль $m = 4$ мм, межосевое расстояние $a_w = 180$ мм, ширина зуба $b_w = 80$ мм, зацепление внешнее. Материал колес — углеродистая сталь без специальной поверхностной термообработки; твердость $HB 300$; $\sigma_{F \text{ lim}} = 40$ кгс/мм².

Приняв $K = 1,5$, находим по формуле (7) удельную расчетную окружную силу

$$w = 9,74 \cdot 10^6 (4+1) \frac{7 \cdot 1,5}{400 \cdot 180 \cdot 80} = 8,85 \text{ кгс/мм.}$$

По формуле (12) находим расчетное контактное напряжение

$$\sigma_H = 108 (4+1) \sqrt{\frac{8,85}{180 \cdot 4}} = 60 \text{ кгс/мм}^2.$$

Допускаемое контактное напряжение

$$\sigma_{HP} = 0,18 \cdot 300 + 6 = 60 \text{ кгс/мм}^2.$$

Из сравнения значений σ_H и σ_{HP} следует, что условие контактной выносливости удовлетворяется.

По приближенной формуле (21) находим напряжение изгиба

$$\sigma_F \approx 3,7 \frac{8,85}{4} = 8,2 \text{ кгс/мм}^2.$$

Коэффициент безопасности

$$S_F = \frac{40}{8,2} = 4,9 > 2,5,$$

т. е. величина S_F достаточна.

С целью унификации и сопоставимости результатов расчетов зубчатых передач, с 1 января 1977 г. введен в действие ГОСТ 21354—75 «Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные. Расчет на прочность», который устанавливает структуру формул расчета зубчатых передач на контактную выносливость активных поверхностей зубьев и на выносливость зубьев при изгибе. Расчетные формулы по ГОСТ имеют ту же структуру, что выше рассмотренные упрощенные формулы, но отличаются рядом поправочных коэффициентов, подробнее учитывающих условия работы зубчатых передач. Для передач с непрямыми зубьями факторы, относящиеся к торцовому сечению или действующие в окружном направлении (силы F_t и ω_t) имеют индекс t .

СТРУКТУРА РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ ПО ГОСТ 21354—75

Расчет на контактную выносливость активных поверхностей зубьев. Расчетное контактное напряжение в полюсе зацепления

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_e \sqrt{\frac{\omega_{Ht} u + 1}{d_{w1} u}} \leq \sigma_{HP} \quad (24)$$

где Z_H , Z_M , Z_e — коэффициенты, соответственно учитывающие форму сопряженных поверхностей зубьев в полюсе зацепления, механические свойства материалов зубьев и суммарную длину контактных линий.

Удельная расчетная окружная сила

$$\omega_{Ht} = \frac{F_{Ht}}{b_w} K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv} \quad (25)$$

где F_{Ht} — исходная расчетная окружная сила при расчете на контактную выносливость; $K_{H\alpha}$, $K_{H\beta}$, K_{Hv} — коэффициенты, соответственно учитывающие распределение нагрузки между зубьями, неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий, динамическую нагрузку в зацеплении.

Допускаемое контактное напряжение

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H \text{ lim}}}{S_H} Z_R Z_v K_L K_{xH} \quad (26)$$

где $\sigma_{H \text{ lim}}$ — предел контактной выносливости поверхности зубьев при заданном числе циклов перемены напряжений; S_H — коэффициент безопасности; Z_R , Z_v , K_L , K_{xH} — коэффициенты, соответственно учитывающие шероховатость сопряженных поверхностей зубьев, окружную скорость, влияние смазки, размер зубчатого колеса.

Расчет зубьев на выносливость при изгибе. Расчетное напряжение изгиба зубьев

$$\sigma_F = Y_F Y_e Y_\beta \frac{\omega_{Ft}}{m} \leq \sigma_{FP} \quad (27)$$

где Y_F , Y_e , Y_β — коэффициенты, соответственно учитывающие форму зуба, перекрытие зубьев, наклон зуба.

Удельная расчетная окружная сила

$$\omega_{Ft} = \frac{F_{Ft}}{b_w} K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{Fv} \quad (28)$$

где F_{Ft} — исходная расчетная окружная сила при расчете зубьев на выносливость при изгибе; $K_{F\alpha}$, $K_{F\beta}$, K_{Fv} — коэффициенты, соответственно учитывающие распределение нагрузки между зубьями, неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий, динамическую нагрузку в зацеплении.

Допускаемое напряжение изгиба зубьев

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F \text{ lim}}}{S_F} Y_R Y_S K_{xF} \quad (29)$$

где $\sigma_{F \text{ lim}}$ — предел выносливости зубьев при изгибе при заданном числе циклов перемены напряжений; S_F — коэффициент безопасности; Y_R , Y_S , K_{xF} — коэффициенты, соответственно учитывающие влияние шероховатости переходной поверхности зуба, концентрацию напряжений у основания зуба, размеры зубчатого колеса.

В приложениях к ГОСТ 21354-75 приведены подробные рекомендации по методике расчета входящих в формулы (24) — (29) параметров и коэффициентов для силовых зубчатых передач внешнего зацепления.

Ниже рассмотрены основные факторы, которые следует учитывать в уточненных расчетах на прочность зубчатых передач (для прямозубых колес индекс t опущен). Условия работы и требования к зубчатым передачам в отдельных классах машин существенно различаются, поэтому уточненный расчет передач проводится обычно для каждого класса машин по специальным методикам, в которых второстепенные для данного типа передач факторы не учитываются, а преобладающие учитываются точнее.

НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗУБ

Номинальная удельная окружная сила на данном режиме работы

$$\omega_{\text{ном}} = \frac{2000 T_1}{b_w d_{w1}} \quad (30)$$

Расчетная удельная сила на данном режиме отличается от номинальной:

$$\omega = \omega_{\text{ном}} K, \quad (31)$$

где $K = 1,3 \div 2,0$.

Величину K можно представить в виде произведения нескольких коэффициентов, каждый из которых учитывает определенный фактор, влияющий на изменение нагрузки по сравнению с номинальной. Основные факторы, увеличивающие нагрузку: неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий (по ширине зуба), учитываемая коэффициентом K_β ;

удар зубьев при входе в зацепление, учитываемый коэффициентом K_v ; динамические нагрузки, связанные с крутильными колебаниями системы, учитываемые коэффициентом $K_{кр}$.

Одновременный вход в зацепление двух и более пар зубьев (благодаря перекрытию) уменьшает нагрузку, действующую на каждый зуб, что учитывается коэффициентом K_α .

Следовательно,

$$K = K_\alpha K_\beta K_v K_{кр} \quad (32)$$

При расчете динамических нагрузок, связанных с ударом зубьев при их входе в зацепление, вводят коэффициент

$$K_d = K_\alpha K_v, \quad (33)$$

учитывающий одновременно и удар и перекрытие зубьев, тогда

$$K = K_d K_\beta K_{кр}. \quad (34)$$

На некоторых режимах передача может вращаться вхолостую, не передавая вращающего момента ($\omega_{ном} = 0$), однако динамические нагрузки при этом могут действовать. Величину w определяют в этом случае непосредственно из динамического расчета. При расчете на контактную выносливость и на изгиб коэффициенты нагрузки могут иметь разные значения.

При изменении режима (частоты вращения, мощности, направления вращения) меняется как номинальная нагрузка, так и коэффициенты, определяющие расчетную нагрузку. Особенности расчета передачи при работе на различных режимах изложены ниже (см. стр. 224).

Неравномерность распределения нагрузки по ширине зуба (коэффициент K_β)

Во время работы зубья могут прирабатываться один к другому, поэтому различают коэффициент начальной неравномерности нагрузки K^0_β и расчетный коэффициент $K_\beta \leq K^0_\beta$.

Начальная неравномерность зависит от неточности изготовления и монтажа передачи и от упругих деформаций под нагрузкой элементов передачи (валов, опор, корпусов, тел колес и самих зубьев). Полный расчет упругих деформаций системы представляет собой очень трудную задачу, поэтому обычно рассчитывают только деформации изгиба зубьев, кручения ободьев или тел колес и изгиба валов.

Деформация зубьев и кручение ободьев или тел колес (коэффициент K_φ). Деформация зуба колеса в сечении, где действует распределенная нагрузка w_α *:

$$\delta_2 = \frac{w}{c_2}, \quad (35)$$

где c_2 — жесткость зуба колеса в кгс/мм² (см. ниже).

Чтобы контакт зубьев не нарушился, несмотря на эту деформацию, соответствующее сечение колеса должно повернуться на угол φ_2 (рис. 8), причем

$$\delta_2 = \varphi_2 r_{b2} = 0,5 \varphi_2 d_{w2} \cos \alpha_w.$$

Аналогичные соотношения справедливы для шестерни. Деформация пары сопряженных зубьев

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{w}{c} = 0,5 \cos \alpha_w (\varphi_1 d_{w1} + \varphi_2 d_{w2}), \quad (36)$$

где

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}.$$

Из формулы (36) следует, что нагрузка w не изменится по ширине зуба в том случае, если углы поворота шестерни φ_1 и колеса φ_2 во всех сечениях будут одинаковыми, что возможно лишь при очень малой ширине зуба или при очень жестких колесах. В действительности из-за скручивания тела колес вместе с валом (рис. 9) или ободьев (рис. 10) углы φ_1 и φ_2 меняются, причем особенно резко в тех сечениях, где действуют наибольшие крутящие моменты. В этих сечениях интенсивность нагрузки на зуб возрастает.

* В дальнейшем индексы α при w_α опускаются, кроме случаев, когда необходимо различать нормальную w_α и окружную w силы.

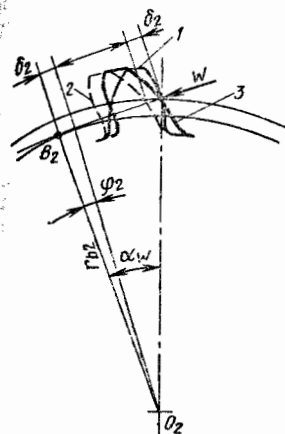


Рис. 8. Схема поворота колеса при деформации зуба: 1, 2, 3 — положения зуба соответственно до деформации, после деформации и после поворота

Рис. 9. Неравномерное распределение нагрузки по ширине зуба из-за закручивания тел сплошных колес вместе с валами; вращающие моменты к валам приложены а — с разных сторон; б — с одной стороны

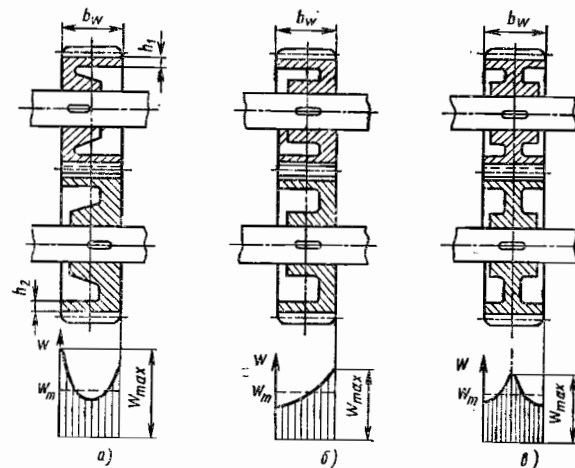
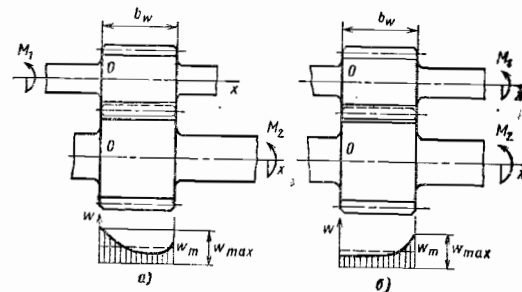


Рис. 10. Неравномерное распределение нагрузки по ширине зуба из-за закручивания ободьев колес; вращающие моменты к ободьям приложены: а — с разных сторон; б — с одной стороны; в — к средней части обода

Расчетная схема, соответствующая передачам, показанным на рис. 9 и 10, а, б, приведена на рис. 11. Здесь $m_1(x)$ и $m_2(x)$ — распределенные вращающие моменты;

$$\left. \begin{aligned} m_1(x) &= -0,5w(x) d_{w1} \cos \alpha_w; \\ m_2(x) &= -0,5w(x) d_{w2} \cos \alpha_w; \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

связанные с внутренними крутящими моментами T условиями равновесия элемента вала:

$$\frac{dT_1}{dx} + m_1 = 0; \quad \frac{dT_2}{dx} + m_2 = 0. \quad (38)$$

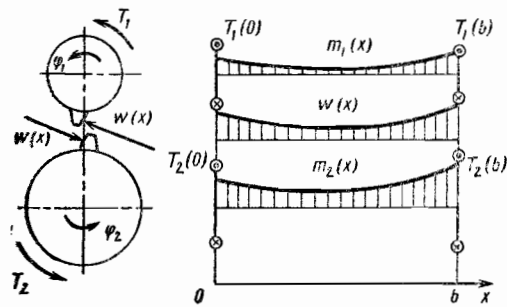


Рис. 11. Расчетная схема кручения тел сопряженных колес

Дважды продифференцировав уравнение (36) и учтя выражения (37) и (39), получим дифференциальное уравнение для распределенной нагрузки $w(x)$:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \beta^2 w = 0, \quad (40)$$

где β^2 — параметр ($1/\text{мм}^2$), определяемый по формулам

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2; \\ \beta_1^2 &= 0,25c \cos^2 \alpha_w \frac{d_{w1}^2}{G_1 J_1}; \\ \beta_2^2 &= 0,25c \cos^2 \alpha_w \frac{d_{w2}^2}{G_2 J_2}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Решение уравнения (40)

$$w = A \operatorname{sh} \beta x + B \operatorname{ch} \beta x, \quad (42)$$

где постоянные A и B зависят от условий подведения вращающего момента к телу колеса или к ободу.

Вращающие моменты M_1 и M_2 приложены с разных сторон (см. рис. 9, а и 10, а).

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{При } x=0 \quad T_1(0) &= M_1; \\ \frac{d\varphi_1}{dx} &= -\frac{T_1(0)}{G_1 J_1}; \quad \frac{d\varphi_2}{dx} = 0. \\ \text{При } x=b \quad (b_w=b) \quad T_2(b) &= M_2; \\ \frac{d\varphi_1}{dx} &= 0; \quad \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{T_2(b)}{G_2 J_2}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Так как согласно равенству (36)

$$\frac{dw}{dx} = 0,5c \cos \alpha_w \left(d_{w1} \frac{d\varphi_1}{dx} + d_{w2} \frac{d\varphi_2}{dx} \right), \quad (44)$$

то условия (43) приводятся к виду:

Из формул (38) и соотношений для относительных углов закрутки

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{T_1}{G_1 J_1}; \quad \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{T_2}{G_2 J_2},$$

где G_1, G_2 — модули сдвига материалов шестерни и колеса; J_1, J_2 — геометрические жесткости на кручение тел колес с валами (см. рис. 9) или ободьев (см. рис. 10), следуют уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} &= -\frac{m_1}{G_1 J_1}; \\ \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} &= -\frac{m_2}{G_2 J_2}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

при $x=0$

$$\frac{dw}{dx} = -0,5c \cos \alpha_w \frac{T_1(0) d_{w1}}{G_1 J_1} = -w_m b \beta_1^2;$$

при $x=b$

$$\frac{dw}{dx} = 0,5c \cos \alpha_w \frac{T_2(b) d_{w2}}{G_2 J_2} = w_m b \beta_2^2,$$

где w_m — средняя величина нормальной удельной нагрузки (в кгс/мм). Если T_1, T_2 в кгс·м, b, d_w — в мм, то

$$w_m = \frac{2000 T_1(0)}{b d_{w1} \cos \alpha_w} = \frac{2000 T_2(b)}{b d_{w2} \cos \alpha_w}.$$

Определив из условий (45) постоянные A и B , получим

$$w(x) = \frac{w_m}{\beta b} \left[\frac{(\beta_2 b)^2 + (\beta_1 b)^2 \operatorname{ch} \beta b}{\operatorname{sh} \beta b} \operatorname{ch} \beta x - (\beta_1 b)^2 \operatorname{sh} \beta x \right]. \quad (46)$$

Характер изменения нагрузки по ширине зуба $w(x)$ показан на рис. 9, а и 10, а. Обычно максимальная нагрузка возникает у кромок зуба со стороны приложения вращающего момента к шестерне ($x=0$), так что коэффициент неравномерности нагрузки

$$K_\varphi = \frac{w_{\max}}{w_m} = \frac{(\beta_2 b)^2 + (\beta_1 b)^2 \operatorname{ch} \beta b}{\beta b \operatorname{sh} \beta b}.$$

Для сплошных (см. рис. 9) стальных колес при $c = 1,8 \cdot 10^3$ кгс/мм², $G = 8 \times 10^3$ кгс/мм² и $\alpha_w = 20^\circ$, полагая для грубой оценки

$$J_1 = \frac{\pi d_{w1}^4}{32}; \quad J_2 = \frac{\pi d_{w2}^4}{32},$$

получим

$$\beta_1 b \approx 0,71 \frac{b}{d_{w1}}; \quad \beta_2 b \approx 0,71 \frac{b}{d_{w2}}$$

и

$$K_\varphi = 0,71 \frac{b}{d_{w1}} \frac{\operatorname{ch} \left(0,71 \frac{b}{d_{w1}} \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} \right) + \frac{1}{u^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} \operatorname{sh} \left(0,71 \frac{b}{d_{w1}} \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} \right)}. \quad (47)$$

График зависимости (47) показан на рис. 12, а. Используя приближенные значения функций

$$\operatorname{sh} \beta b \approx \beta b + \frac{1}{6} (\beta b)^3;$$

$$\operatorname{ch} \beta b \approx 1 + \frac{1}{2} (\beta b)^2,$$

получим

$$K_\varphi \approx 1 + 0,17 \left(1 - \frac{1}{2u^2} \right) \left(\frac{b}{d_{w1}} \right)^2. \quad (48)$$

Кривая, построенная по формуле (48), также показана на рис. 12, а, откуда следует, что при обычных значениях b/d_{w1} формула (48) обеспечивает достаточную точность.

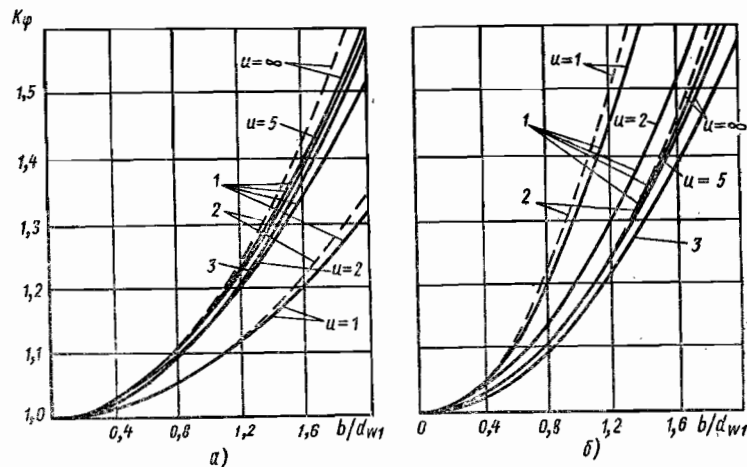


Рис. 12. Зависимости коэффициента неравномерности нагрузки K_ϕ от отношений b/d_{w1} и u при кручении тел сплошных колес вместе с валами; крутящие моменты приложены: а — с разных сторон [1 — расчет по формуле (47), 2 — по формуле (48)]; б — с одной стороны [1 — расчет по формуле (50); 2 — по формуле (51)]; 3 — расчет по формуле (52)

Вращающие моменты M_1 и M_2 приложены с одной стороны (см. рис. 9, б и 10, б). В этом случае решение уравнения (40) примет вид

$$\omega(x) = \omega_m \beta b \frac{\text{ch } \beta x}{\text{sh } \beta b}. \quad (49)$$

Максимальная величина нагрузки будет у кромки зуба со стороны приложения вращающих моментов. Коэффициент

$$K_\phi = \frac{\omega_{\max}}{\omega_m} = \frac{\beta b}{\text{th } \beta b}.$$

Для сплошных стальных колес

$$K_\phi = \frac{0,71 \frac{b}{d_{w1}} \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}}{\text{th} \left(0,71 \frac{b}{d_{w1}} \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} \right)}. \quad (50)$$

Используя приближенное выражение функции $\text{th } \beta b \approx \beta b - \frac{1}{3} (\beta b)^3$, получим

$$K_\phi \approx 1 + 0,17 \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) \left(\frac{b}{d_{w1}} \right)^2. \quad (51)$$

Графики зависимостей (50) и (51) показаны на рис. 12, б.

При $u \geq 3$ неравномерность распределения нагрузки для сплошных колес определяется практически только жесткостью на кручение шестерни, характер приложения вращающего момента уже не оказывает влияния и формулы (47) и (50) или (48) и (51) совпадают.

В рекомендациях к ГОСТ 21354—75 используется формула

$$K_\phi = 1 + 0,14 \left(\frac{b}{d_{w1}} \right)^2, \quad (52)$$

которая дает усредненное значение величины K_ϕ (см. рис. 12).

Для случая, показанного на рис. 10, в, вместо полной ширины зуба b следует подставлять в формулы $0,5b$.

Для зубчатых колес с тонкими ободьями толщиной $h_1 \ll d_{w1}$ и $h_2 \ll d_{w2}$ (см. рис. 10), полагая $J_1 \approx 0,25 \pi h_1 d_{w1}^3$, $J_2 \approx 0,25 \pi h_2 d_{w2}^3$ при $c = 1,8 \cdot 10^3$ кгс/мм², $G = 8 \cdot 10^3$ кгс/мм² и $\alpha_w = 20^\circ$, найдем

$$\beta_1 b \approx \frac{0,25b}{\sqrt{h_1 d_{w1}}}; \quad \beta_2 b \approx \frac{0,25b}{\sqrt{h_2 d_{w2}}}.$$

При этом вместо формулы (50) получим

$$K_\phi = \frac{0,25b \sqrt{1 + \frac{h_1}{uh_2}}}{\sqrt{h_1 d_{w1}} \text{th} \left(\frac{0,25b \sqrt{1 + \frac{h_1}{uh_2}}}{\sqrt{h_1 d_{w1}}} \right)}. \quad (53)$$

Приближенно

$$K_\phi = 1 + 0,021 \left(\frac{b}{d_{w1}} \right) \left(\frac{b}{h_1} \right) \left(1 + \frac{h_1}{uh_2} \right). \quad (54)$$

Из формулы (54) следует, что с уменьшением толщины обода неравномерность распределения нагрузки возрастает. Обод колеса следует выполнять достаточно жестким.

Во многих зубчатых передачах применяют колеса с относительно узкими зубьями. Из приведенных формул и кривых видно, что если $b/d_{w1} \leq 0,3$, то для колес обычной конфигурации $K_\phi \approx 1$, т. е. деформацией закручивания в этих случаях можно пренебречь.

Изгибные деформации валов (коэффициент K_f). Силы давления на зубья, передаваясь на валы, вызывают их изгиб в плоскостях, параллельных плоскости зацепления (рис. 13). Если γ_Σ — суммарный угол перекоса осей колес в этой плоскости, то отклонение от среднего значения нагрузки в точке на расстоянии x от середины зуба $\Delta w = cx \text{tg } \gamma_\Sigma$, где для упрощения принято, что по ширине зуба нагрузка меняется линейно. Учитывая, что у кромок зубьев их жесткость понижается, принимают $x = a_f b$, где $a_f = 0,3 \div 0,4$. В этом случае коэффициент неравномерности нагрузки от деформаций изгиба валов

$$K_f = \frac{\omega_m + \Delta w}{\omega_m} = 1 + a_f c b^2 \bar{\gamma}_\Sigma, \quad (55)$$

где $\bar{\gamma}_\Sigma = \gamma_\Sigma / \omega_m b$, причем при малых углах перекоса $\text{tg } \gamma_\Sigma \approx \gamma_\Sigma$. В рекомендациях к ГОСТ 21354—75 принято $c = 1,4 \cdot 10^3$ кгс/мм².

Угол перекоса γ_Σ следует вычислять для всей системы валов передачи, учитывая возможные начальные технологические перекосы, а также податливость опор и корпусов, однако ввиду сложности решения такой задачи обычно ограничиваются расчетом деформаций только тех валов, на которых закреплена данная пара колес. Усилиями, передающимися на эти валы со стороны других колес, и технологическими перекосами также пренебрегают. В этом случае γ_Σ — угол перекоса осей в сечении, где расположены колеса, от единичной силы, действующей в том же сечении на валы шестерни и колеса.

Для консольно закрепленного колеса (рис. 13)

$$\bar{\gamma} = \frac{l^2}{3EJ} (1 + 1,5a) a, \quad (56)$$

где $\bar{a} = a/l$.

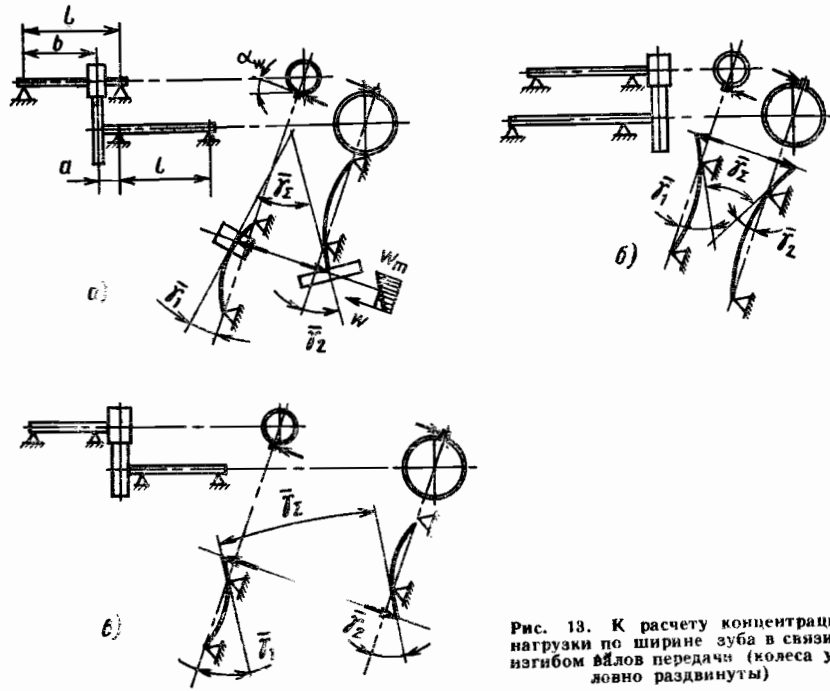


Рис. 13. К расчету концентрации нагрузки по ширине зуба в связи с изгибом валов передачи (колеса условно раздвинуты)

Для колеса, расположенного между опорами,

$$\bar{\gamma} = \frac{l^2}{3EJ} (1 - \bar{b}) \bar{b} (1 - 2\bar{b}), \quad (57)$$

где $\bar{b} = b/l$.

В формулу (55) подставляют значение

$$\bar{\gamma}_\Sigma = |\bar{\gamma}_1 \pm \bar{\gamma}_2|. \quad (58)$$

При расположении зубчатых колес по схемам, показанным на рис. 13, а и б, углы перекоса валов складываются, по схеме, показанной на рис. 13, в, — вычитаются.

В результате перекоса нагрузка возрастает на участке зуба, ближайшем к опоре. Наибольшие перекосы обычно возникают при одностороннем консольном расположении колес (рис. 13, б).

Общая начальная неравномерность (коэффициент K_β^0).

Если при кручении ободьев и изгибе валов нагрузка концентрируется у одного и того же края зуба, то общая начальная неравномерность распределения нагрузки определяется коэффициентом

$$K_\beta^0 = 1 + (K_\varphi - 1) + (K_f - 1) = K_\varphi + K_f - 1. \quad (59)$$

Если при кручении и изгибе нагрузка концентрируется у различных краев зуба, то расчет ведется по величине K_β^0 , равной наибольшей из величин K_φ или K_f .

Неравномерность распределения по длине зуба контактных напряжений σ_H соответствует неравномерности нагрузки w , поэтому при расчете на контактную

выносливость поверхностей зубьев считают $K_{H\beta}^0 = K_\beta^0$. Неравномерность распределения по длине зуба максимальных изгибных напряжений в заделке сглаживается тем сильнее, чем меньше отношение b_w/m . Рекомендованная в ГОСТ 21354—75 зависимость $K_{F\beta}^0$ от $K_{H\beta}^0$ и b_w/m при $b_w/m \geq 4$ может быть приближенно аппроксимирована формулой

$$\sqrt{K_{F\beta}^0} - 1 = (\sqrt{K_{H\beta}^0} - 1) \left[1 - 0,54e^{-0,1 \left(\frac{b_w}{m} - 4 \right)} \right]. \quad (60)$$

Концентрация нагрузки у краев зубьев может быть снижена применением продольной коррекции.

Приработка зубьев. Приработка зубьев происходит в результате их истирания или пластической деформации и зависит от твердости поверхностей зубьев, от степени равномерности передаваемой нагрузки, от времени работы, окружающей скорости и других факторов.

В расчетах предполагают, что интенсивность приработки пропорциональна местной нагрузке, поэтому наиболее быстрая приработка происходит в первые часы работы передачи, когда нагрузка распределяется по ширине зуба весьма неравномерно. Затем приработка замедляется, а при большой твердости зубьев прекращается.

Расчетный коэффициент неравномерности распределения нагрузки по ширине зуба с учетом приработки определяют по формуле

$$K_\beta = 1 + (K_\beta^0 - 1) K_w. \quad (61)$$

При работе на постоянном режиме величина коэффициента K_w зависит от твердости поверхности зубьев колеса, которая обычно меньше или равна твердости поверхности зубьев шестерни. Рекомендуемые ГОСТ 21354—75 кривые для определения значения K_w приведены на рис. 14. С увеличением окружной скорости приработка уменьшается. При работе на переменных режимах условия для приработки также ухудшаются (см. ниже).

Зуб может передать всей шириной нагрузку $F = \omega_\alpha b \cos \alpha_w$ или с учетом выражений (31) и (34)

$$F = \frac{\omega_\alpha \cos \alpha_w}{K_1 K_{кр}} \frac{b}{K_\beta}.$$

Так как с увеличением ширины зуба коэффициент K_β также увеличивается, то при заданных условиях прочности значения удельного давления w_α величина полной нагрузки F достигает при некотором значении b^* максимума. При определении K_β по формуле (52) и $K_w \approx 1$, $K_f \approx 1$

$$b^* = \frac{d_{w1}}{\sqrt{0,14}} \approx 2,7 d_{w1}.$$

С учетом коэффициента K_f получают $b^*/d_{w1} \approx 1 \div 3$.

Увеличивать ширину зуба сверх b^* нецелесообразно.

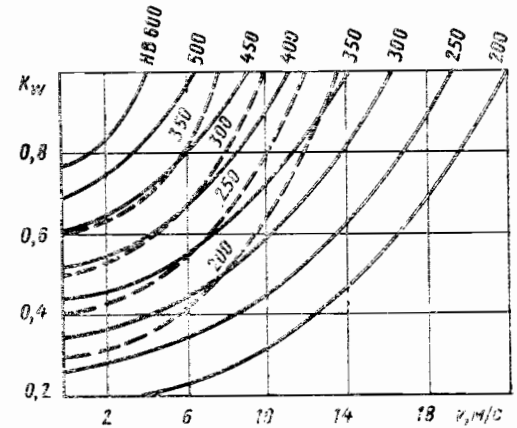


Рис. 14. Зависимость коэффициента приработки K_w от твердости поверхности зубьев колеса при работе на постоянном режиме; сплошные линии соответствуют расчету на контактную выносливость; штриховые линии — расчету на изгиб

Статическое распределение усилий между зубьями (коэффициент K_α) *

В тихоходных зубчатых передачах с немассивными колесами, где динамические нагрузки невелики, распределение нагрузки между зубьями при наличии перекрытия определяется условиями статики.

Если в контакте одновременно находятся две пары зубьев I и II (рис. 15, а), то сумма нормальных усилий $\omega_{\alpha I}$ и $\omega_{\alpha II}$ должна равняться передаваемой нагрузке $\omega_{\alpha 0} = \omega_0 / \cos \alpha_w$, где ω_0 определяется формулами (30)—(34) при $K_\alpha = 1$. Опуская индекс « α », имеем

$$\omega_I + \omega_{II} = \omega_0. \tag{62}$$

При этом основные шаги зубьев в деформированном состоянии должны быть одинаковыми, т. е.

$$p'_{b1} = p'_{b2}. \tag{63}$$

Здесь индекс I относится к ведущему, индекс 2 — к ведомому колесам.

Шаг в деформированном состоянии p'_b отличается от шага ненагруженных зубьев p_b на величину упругих перемещений зубьев по линии зацепления (рис. 15, б и в):

$$\left. \begin{aligned} p'_{b1} &= p_{b1} - \delta_{111} + \delta_{11}; \\ p'_{b2} &= p_{b2} + \delta_{112} - \delta_{12}. \end{aligned} \right\} \tag{64}$$

Из (64) следует условие совместности деформаций

$$\Delta + \delta_{11} - \delta_{12} = 0, \tag{65}$$

где $\Delta = p_{b2} - p_{b1}$ — ошибка по основному шагу; $\delta_{11} = \delta_{111} + \delta_{12}$ — сближение сопряженных зубьев I вследствие их упругой деформации; $\delta_{11} = \delta_{111} + \delta_{112}$ — то же, для зубьев II.

Допуски на величину основного шага зубчатых цилиндрических передач $f_{pb} = |p_b - p_{bn}|$ (p_{bn} — номинальная величина шага) определяют по нормам плавности ГОСТ 1643—72 в зависимости от степени точности передачи, модуля и диаметра колес (например, для передачи 3-й степени точности при $m = 2 \div 3,55$ мм и $d_2 \leq 50$ мм величина $f_{pb} = \pm 3,0$ мкм. Величина максимально возможной ошибки в основном шаге сопряженных зубьев

$$\Delta_{\max} = (p_{b2})_{\min} - (p_{b1})_{\min} = (p_{b1})_{\max} - (p_{b2})_{\min} = f_{pb1} + f_{pb2}. \tag{66}$$

В зависимости от соотношений между шагами зубьев p_{b1} и p_{b2} действительные ошибки во время работы передачи могут иметь любые значения в пределах $-\Delta_{\max} \leq \Delta \leq \Delta_{\max}$, т. е. ошибка Δ может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Однако вероятность сочетания $(p_{b2})_{\max}$ и $(p_{b1})_{\min}$ или, наоборот, очень невелика. Поэтому в качестве расчетной (вероятной) максимальной ошибки Δ_0 обычно принимают величину

$$\Delta_0 = \sqrt{f_{pb1}^2 + f_{pb2}^2}. \tag{67}$$

вероятность проявления которой имеет тот же порядок, что и вероятность выполнения основных шагов по верхнему или нижнему допуску и считают $\Delta = \pm \Delta_0$ (если $f_{pb1} = f_{pb2}$, то $\Delta_{\max} = 2f_{pb}$, в то время как $\Delta_0 = \sqrt{2}f_{pb} \approx 1,41f_{pb}$).

Упругая деформация зубьев складывается из изгиба и контактного сжатия. Испытания показывают, что полные упругие перемещения зубьев практически про-

* Решение этой задачи методами теории упругости дано в работах [3 и др.].

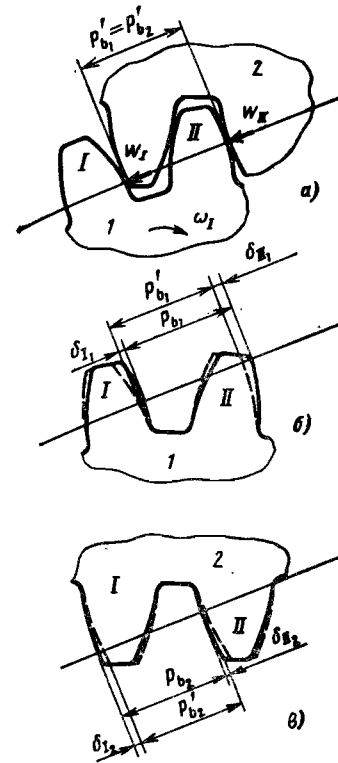
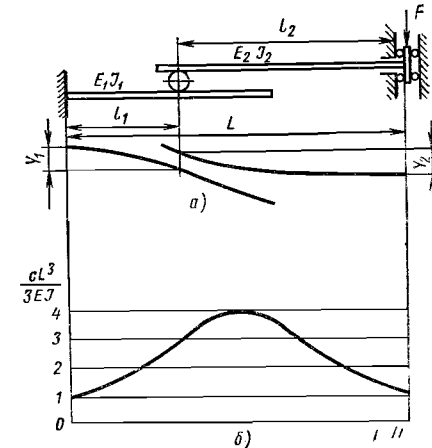


Рис. 15. К расчету статического распределения усилий между зубьями

Рис. 16. Простейшая схема деформации зубьев (а) и изменение удельной жесткости двух одинаковых сопряженных балок постоянного сечения (б) в зависимости от положения точки контакта



порциональны приложенной нагрузке, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \omega_I &= c_I \delta_{11}; \\ \omega_{II} &= c_{II} \delta_{11}, \end{aligned} \right\} \tag{68}$$

где c_I, c_{II} — удельные жесткости зубьев в кгс/мм².

В простейшей схеме передачи усилия $F = \omega_0 b$ (рис. 16, а) общий прогиб сопряженных балок постоянного сечения

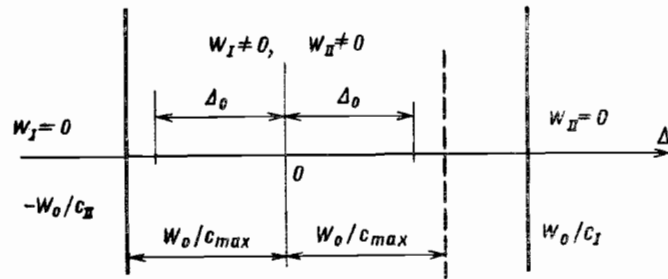
$$y_1 + y_2 = \frac{\omega_0 b}{3} \left(\frac{l_1^3}{E_1 J_1} + \frac{l_2^3}{E_2 J_2} \right)$$

и удельная жесткость на единицу длины зуба

$$c = \frac{\omega_0}{y_1 + y_2} = \frac{3}{b} \left(\frac{l_1^3}{E_1 J_1} + \frac{l_2^3}{E_2 J_2} \right)^{-1}.$$

Удельная жесткость пропорциональна модулю упругости, имеет максимум при контакте в середине пролета (рис. 16, б) и для геометрически подобных балок имеет одинаковое значение, не зависящее от их абсолютных размеров. Это же справедливо и для зубьев.

По данным различных исследований, для стальных прямых зубьев эвольвентного профиля нормальной высоты удельная жесткость в полюсе (W) $c_w = 1350 \div 1800$ кгс/мм², в начальной и конечной точках однопарного зацепления (U_1 и U_2 , см. рис. 3) $c_u = 1300 \div 1650$ кгс/мм², в начальной и конечной точках активного участка

Рис. 17. Области одно- и двухпарного зацепления зубьев (при $c_{\max} = c_{II}$)

линии зацепления (P_1 и P_2) $c_p = 950 \div 1250$ кгс/мм². В ГОСТ 21354—75 приняты значения жесткостей, близкие к минимальным.

Решая совместно уравнения (62), (65) и (68), найдем величину усилий, действующих на каждый зуб при наличии перекрытия зацепления:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{c_1}{c_1 + c_{II}} (\omega_0 + c_{II} \Delta); \\ \omega_{II} &= \frac{c_{II}}{c_1 + c_{II}} (\omega_0 - c_1 \Delta). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Контактные усилия ω_1 и ω_{II} не могут быть отрицательными. Если ошибка $\Delta > 0$ (шаг зубьев ведомого колеса больше шага ведущего), то при величине $\Delta > \frac{\omega_0}{c_1}$ вторая пара зубьев не будет контактировать ($\omega_{II} = 0$, рис. 17); если ошибка $\Delta < 0$ (шаг зубьев ведомого колеса меньше шага ведущего), то при абсолютной величине $|\Delta| > \frac{\omega_0}{c_{II}}$ не будет контактировать первая пара ($\omega_1 = 0$).

Полагая $\Delta = \pm \Delta_0$, получим (см. рис. 17)

$$\begin{aligned} \omega_1 > 0 & \text{ при } \Delta_0 < \frac{\omega_0}{c_{II}}; \\ \omega_{II} > 0 & \text{ при } \Delta_0 < \frac{\omega_0}{c_1}. \end{aligned}$$

Эти условия можно объединить в одно, т. е.

$$\Delta_0 < \frac{\omega_0}{c_{\max}}, \quad (70)$$

где c_{\max} — наибольшее из значений c_1 и c_{II} при рассматриваемом положении зубьев.

Если условие (70) не выполняется, то в данном положении зубьев в зацеплении будет находиться только одна пара (фактического перекрытия нет).

Точные абсолютно жесткие зубья входят в контакт в точке P_1 (см. рис. 3). Пока точка контакта вновь вошедшей в зацепление пары зубьев I перемещается по линии зацепления из точки P_1 в точку U_2 , точка контакта предыдущей пары зубьев II перемещается из точки U_1 в P_2 . В точке P_2 предыдущая пара размыкается, и в зацеплении на участке $U_2 U_1$ остается одна пара зубьев.

Точные ($\Delta_0 = 0$) упругие зубья встретятся несколько ранее точки P_1 (вне линии зацепления), а в тот момент, когда точка контакта пары зубьев I займет положение

P_1 , усилия в зубьях в соответствии с формулами (69) при $c_1 = c_p$, $c_{II} = c_u$ и $\Delta_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1P_1} &= \frac{c_p}{c_p + c_u} \omega_0 \approx 0,42\omega_0; \\ \omega_{IIU_1} &= \frac{c_u}{c_p + c_u} \omega_0 \approx 0,58\omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

К моменту перед выходом пары II из зацепления усилия примут значения ($c_1 = c_u$; $c_{II} = c_p$, $\Delta_0 = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1U_2} &= \frac{c_u}{c_u + c_p} \omega_0 \approx 0,58\omega_0; \\ \omega_{IIP_2} &= \frac{c_p}{c_u + c_p} \omega_0 \approx 0,42\omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Характер изменения коэффициента $K_\alpha = \omega/\omega_0$ в точных упругих зубьях схематически показан на рис. 18 жирной линией.

В неточных упругих зубьях характер изменения усилий зависит от величины и знака ошибок. Область возможных значений усилий ω_1 и ω_{II} при некоторой величине ошибки $\Delta_{\max} < \omega_0/c_u$ на рис. 18 заштрихована. При оценке усилий по величине ошибки Δ_0 их наибольшие значения в точках P_1 и P_2 в соответствии с формулами (69)

$$(\omega_{1P_1})_{\max} = (\omega_{IIP_2})_{\max} = \frac{c_p}{c_p + c_u} (\omega_0 + c_u \Delta_0) \approx 0,42\omega_0 (1 + \psi_k), \quad (73)$$

где коэффициент

$$\psi_k = \frac{c_u \Delta_0}{\omega_0} = \frac{\Delta_0}{\left(\frac{\omega_0}{c_u}\right)} \quad (74)$$

представляет собой отношение ошибки Δ_0 к упругой деформации зубьев в точках U_1 или U_2 . Наименьшие значения усилий в точках P_1 и P_2

$$(\omega_{1P_1})_{\min} = (\omega_{IIP_2})_{\min} \approx 0,42\omega_0 (1 - \psi_k).$$

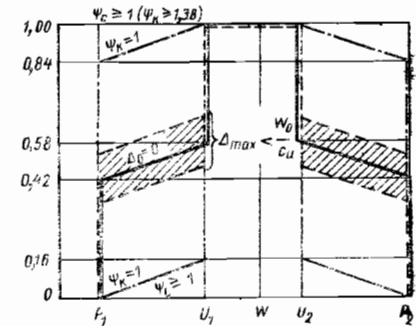
Наибольшие значения усилий в точках U_1 и U_2

$$(\omega_{1U_2})_{\max} = (\omega_{IIU_1})_{\max} = \frac{c_u}{c_u + c_p} \cdot (\omega_0 + c_p \Delta_0) \approx 0,58\omega_0 (1 + \psi_c), \quad (75)$$

$$\text{где } \psi_c = \frac{c_p \Delta_0}{\omega_0} = \frac{c_p}{c_u} \psi_k \approx 0,73\psi_k \quad (\psi_k \approx 1,37\psi_c). \quad (76)$$

Двухпарное зацепление на всем протяжении участка теоретического перекрытия зубьев $P_1 U_2$ и $U_1 P_2$ будет осуществляться при условии (70), т. е. при

$$\Delta_0 < \frac{\omega_0}{c_u} \text{ или при } \psi_k < 1. \quad (77)$$

Рис. 18. Изменение коэффициента статического перекрытия K_α вдоль рабочего участка линии зацепления при различных значениях параметра вероятной ошибки ψ_k

Предельно возможные изменения усилий при $\psi_k = 1$ показаны на рис. 18 штрихпунктирной линией.

При больших ошибках, когда $\psi_k > 1$, но $\psi_c < 1$, зона двухпарного зацепления будет сужаться, а при

$$\Delta_0 \geq \frac{\omega_0}{c_p} \text{ или при } \psi_c \geq 1 \quad (78)$$

в зацеплении будет находиться фактически только одна пара зубьев, несмотря на наличие теоретического перекрытия зубьев ($e_v > 1$). Условия зацепления см. в табл. 3.

Характер изменения коэффициента $K_\alpha = \omega'/\omega_0$ при $\omega' = \omega_1$ и $\omega' = \omega_{I1}$ на активном участке линии зацепления при различных значениях ψ_k и ψ_c показан на рис. 18.

Максимальные статические усилия $\omega_{ст}$ в характерных точках линии зацепления могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_{P_1} &= \omega_0 K_{\alpha P_1}; \\ \omega_{U_2} &= \omega_0 K_{\alpha U_2}; \\ \omega_W &= \omega_0 K_{\alpha W}; \\ \omega_{U_1} &= \omega_0 K_{\alpha U_1}; \\ \omega_{P_2} &= \omega_0 K_{\alpha P_2}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Для точек U_2 и U_1 (рис. 18) следует считать $\omega' = \omega_0$, т. е. $K_{\alpha U_2} = K_{\alpha U_1} = 1$. При расположении полюса в зоне однопарного зацепления $K_{\alpha W} = 1$. Поэтому в расчете на контактную выносливость $K_{H\alpha} = 1$.

Для точек P_1 и P_2 при двухпарном зацеплении в соответствии с формулой (73)

$$K_{\alpha P_1} = K_{\alpha P_2} = K_{\alpha P} = 0,42 (1 + \psi_k). \quad (80)$$

Формулой (80) можно пользоваться при $\psi_c \leq 1$, т. е. при $\psi_k \leq 1,37$. При больших значениях ψ_k следует считать $K_{\alpha P} = 1$.

Для очень тихоходных передач при расчете усилия ω по формулам (31), (34) считают $K_d \approx K_\alpha$.

Динамические усилия на зубьях при крутильных колебаниях (коэффициент $K_{кр}$) и резонансные режимы

Зубчатые колеса составляют вместе с валами и другими присоединенными деталями общую упругую систему, динамический расчет которой представляет большую сложность. Однако такая общая система нередко распадается на две части, динамически слабо зависящие одна от другой, так как жесткость зубьев $c_z \approx (2 + 3) \times 10^9$ кгс/мм² обычно значительно превышает жесткость валов $c_b \approx (0,5 + 2) \times 10^9$ кгс/мм². Поэтому при анализе колебаний сопряженных зубчатых колес в связи с упругими деформациями зубьев инерционными нагрузками от других присоединенных деталей пренебрегают и считают, что вращающие моменты постоянны. С другой стороны, при расчете крутильных колебаний зубчатых колес и других деталей в связи с упругими деформациями валов зубья можно считать жесткими.

Частота собственных колебаний сопряженных колес. При контакте зубьев вблизи полюса, когда в зацеплении находится одна пара зубьев, дифференциальные уравнения вращения сопряженных колес имеют вид (рис. 19)

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_{m1} \frac{d\omega_1}{dt} &= T_1 - \omega_\alpha r_{b1}; \\ \bar{J}_{m2} \frac{d\omega_2}{dt} &= -T_2 + \omega_\alpha r_{b2}. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

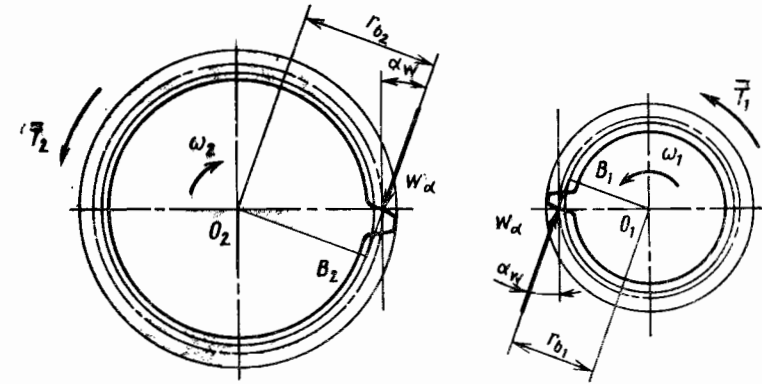


Рис. 19. Схема нагружения колес: 1 — ведущего; 2 — ведомого

где \bar{J}_{m1} , \bar{J}_{m2} — моменты инерции колес; T_1 , T_2 — вращающие моменты, отнесенные к единице ширины зуба.

При равномерном вращении $d\omega_1/dt = d\omega_2/dt = 0$, и из равенства (81) следуют соотношения

$$\omega_\alpha = \omega_m = \frac{T_1}{r_{b1}} = \frac{T_2}{r_{b2}} = c_w \delta_m = \text{const}. \quad (82)$$

Если под воздействием малого случайного возмущения деформация в некоторый момент времени $t = 0$ увеличилась на величину $\Delta\delta_0$, то возрастает и усилие на зуб, условия равновесия колес при постоянных значениях моментов T_1 и T_2 нарушатся, и угловые скорости колес начнут периодически изменяться, что будет сопровождаться изменением усилия и деформации с той же частотой.

Введя в равенства (81) выражения (82) и обозначая $\Delta\omega = \omega_\alpha - \omega_m$, получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_{m1} \frac{d\omega_1}{dt} &= -\Delta\omega r_{b1}; \\ \bar{J}_{m2} \frac{d\omega_2}{dt} &= \Delta\omega r_{b2}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

причем

$$\Delta\omega = c_w \Delta\delta. \quad (84)$$

Если величина $\Delta\delta_0$ достаточно мала, то контакт зубьев при колебаниях не нарушится.

Условие совместного движения зубьев (рис. 20) требует, чтобы скорость сближения их вдоль линии зацепления равнялась скорости увеличения деформации зубьев:

$$\omega_1 r_{b1} - \omega_2 r_{b2} = \frac{d(\Delta\delta)}{dt}. \quad (85)$$

Дифференцируя обе части равенства (85) и подставляя в них значения $d\omega_1/dt$ и $d\omega_2/dt$ из равенства (83), получим с учетом соотношения (84) дифференциальное уравнение собственных колебаний сопряженных колес

$$\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + \beta^2 \omega \Delta\delta = 0, \quad (86)$$

где

$$\beta^2 = \left(\frac{r_{b1}^2}{\bar{J}_{m1}} + \frac{r_{b2}^2}{\bar{J}_{m2}} \right) c_w. \quad (87)$$

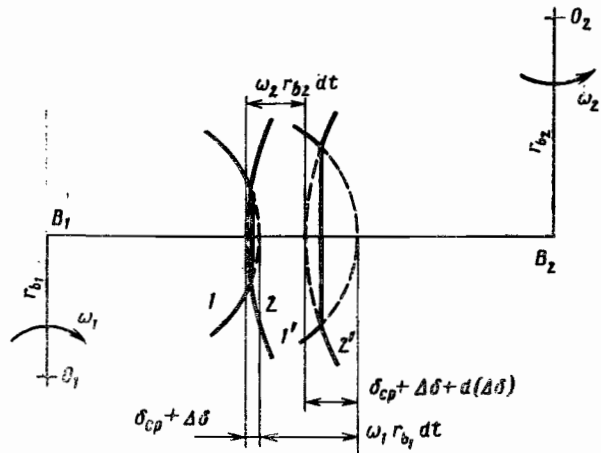


Рис. 20. Схема совместного движения упругих зубьев вдоль линии зацепления: 1, 2 — положения соприкасающихся поверхностей зубьев в момент времени t ; 1', 2' — положения в момент времени $t + dt$ (вся деформация зубьев условно показана в виде деформации смятия)

Решение уравнения (86) при начальных условиях $\Delta\delta(0) = \Delta\delta_0$ и $\frac{d(\Delta\delta)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$
 $\Delta\delta = \Delta\delta_0 \cos \beta_w t$.

Частота собственных колебаний колес (в Гц) при однопарном зацеплении вблизи полюса

$$f_w = \frac{\beta_w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_w}{M_{пр}}} \approx \frac{6}{\sqrt{M_{пр}}}; \quad (88)$$

где $M_{пр}$ — приведенная масса колес, кгс·с²/мм²;

$$\frac{1}{M_{пр}} = r_{b1}^2 \left(\frac{1}{J_{m1}} + \frac{u^2}{J_{m2}} \right); \quad (89)$$

Для оценки величин J_{m1} и J_{m2} представим колеса в виде дисков с радиусами r_{b1} и r_{b2} , для которых

$$J_{m1} = 0,5\rho_1 \pi r_{b1}^4, \quad J_{m2} = 0,5\rho_2 \pi r_{b2}^4, \quad (90)$$

где ρ_1, ρ_2 — плотности материалов колес.

Выразив r_{b1} через диаметр начальной окружности ведомого колеса по формуле

$$r_{b1} = \frac{d_{w2} \cos \alpha_w}{2u}$$

и подставив значения J_m из формулы (90) в формулу (89), получим

$$M_{пр} = \frac{\pi \rho_1 d_{w2}^2}{8 \cos^2 \alpha_w \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + u^2 \right)}. \quad (91)$$

Для стальных колес при $\alpha_w = 20^\circ$

$$M_{пр} \approx 3,6 \cdot 10^{-10} \frac{d_{w2}^2}{1 + u^2}, \quad (92)$$

где d_{w2} в мм; $M_{пр}$ в кгс·с²/мм².

В общем случае при определении величин J_{m1} и J_{m2} должны учитываться полярные моменты инерции деталей, жестко связанных с зубчатыми колесами.

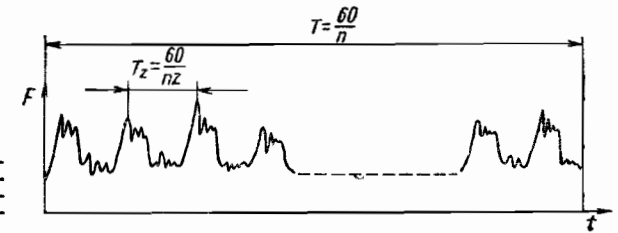


Рис. 21. Изменение по времени t силы F , передающейся на колесо со стороны зубьев; T — время одного оборота в с

С учетом соотношения (92) формула (88) принимает вид

$$f_w \approx 3,2 \cdot 10^6 \frac{\sqrt{1 + u^2}}{d_{w2}}, \quad (93)$$

где d_{w2} в мм; f_w в Гц.

В периоды двухпарного зацепления частота собственных колебаний сопряженных колес возрастает до величины

$$f_p = f_w \sqrt{\frac{c_u + c_p}{c_w}} \approx 1,27 f_w. \quad (94)$$

На собственную частоту колебаний сопряженных колес определенное влияние оказывает также податливость обода и тела колес, упругость валов и масляного слоя, податливость опор. Поэтому расчет при использовании формулы (93) дает лишь ориентировочное значение частоты, которое может быть уточнено экспериментально.

Помимо высоких частот колебаний сопряженных колес, передачи имеют также ряд значительно более низких частот собственных крутильных колебаний, относящихся к упругой системе, которую образуют колеса вместе с валами и другими вращающимися деталями. При расчете этих частот упругость зубьев можно пренебрегать. Основы методов расчета крутильных колебаний изложены в гл. 21.

Резонансные и вынужденные колебания. Если частота собственных колебаний колес совпадает с частотой какой-либо переменной силы, действующей в передаче, возникают резонансные колебания, которые могут явиться источником серьезных дефектов.

Основные переменные силы в передаче связаны с периодическим входом зубьев в зацепление, когда за каждый оборот колесо с z зубьями воспринимает z импульсов, так что изменение по времени t силы F , передающейся на колесо со стороны зубьев, имеет вид, показанный на рис. 21. Наиболее сильная составляющая такой возбуждающей силы имеет частоту (в Гц)

$$f_z = \frac{1}{T_z} = \frac{nz}{60} = \frac{1000v}{\pi m}, \quad (95)$$

где T_z — период импульсов, с; v — окружная скорость, м/с; m — модуль, мм

Так как форма импульсов не синусоидальна, а их характер и период T_z из-за неточностей зацепления не вполне одинаковы, то наряду с частотой f_z могут проявляться возбуждающие силы с кратными ей частотами $2f_z, 3f_z$ и т. д., а также с близкими частотами $f = \frac{n(z \pm k)}{60}$, где $k = 1, 2$ и т. д.

При работе на небольших частотах вращения частота f_z может резонировать с низкой частотой собственных колебаний системы колес и валов, а при работе с большой частотой вращения — с частотой собственных колебаний сопряженных зубьев.

Изменение усилия, действующего на зуб при низкочастотном резонансе, показано на рис. 22. Несмотря на ограниченное число циклов, которое зуб успевает испы-

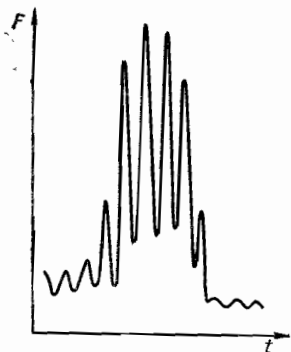


Рис. 22. Оциллограмма изменения усилия на зубе при резонансе [10]

тать за время нахождения в зацеплении, уровень переменных напряжений в зубе может стать значительным, так как резонансное усиление колебаний проявляется весьма интенсивно. Кроме того, возникающие при резонансе колебания колес вызывают дополнительные ударные нагрузки при входе зубьев в зацепление. Работа передачи на резонансных режимах не допускается.

В некоторых передачах, например в редукторах поршневых двигателей, крутильные колебания могут иметь вынужденный характер.

Динамические усилия на зубьях, связанные с крутильными колебаниями и учитываемые коэффициентом $K_{кр}$, оценивают обычно экспериментально. При проектировании величину $K_{кр}$ выбирают по опыту работы аналогичных конструкций.

Поломки зубчатых колес могут быть связаны также с резонансными колебаниями ободьев и дисков колес [9].

Оценка возможности резонанса. Для оценки возможности резонанса определяют приведенную

массу колес $M_{пр}$, собственные частоты колебаний колес при однопарном (f_w) и двухпарном (f_p) зацеплении.

Расчетные резонансные окружные скорости

$$\left. \begin{aligned} v_{рез}^{(p)} &= \lambda \pi m f_p; \\ v_{рез}^{(w)} &= \lambda \pi m f_w, \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

где при основном резонансе $\lambda = 1$, при резонансе со второй гармоникой к частоте зацепления $\lambda = 0,5$.

Возбуждение при двухпарном зацеплении обычно бывает более сильным. Из-за жесткости смежных валов частота несколько повышается, а из-за податливости ободов и опор снижается, поэтому для ответственных передач резонансные режимы нужно уточнять экспериментально тензометрированием колес.

При проектировании передач резонансных значений окружной скорости следует избегать.

Динамические усилия на зубьях при пересопряжении (коэффициенты K_d и K_v)

Пересопряжение зубьев сопровождается колебаниями зубьев, причем полная (динамическая) нагрузка w может существенно отличаться от нагрузки $w_{ст}$, определяемой рассмотренными выше условиями статического нагружения. В большинстве случаев нагрузка w в характерных точках линии зацепления больше нагрузки $w_{ст}$ в тех же точках, что позволяет условно считать

$$w = w_{ст} + w_v, \quad (97)$$

или

$$w = w_{ст} K_v, \quad (98)$$

где w_v — сила удара, $K_v \geq 1$ — коэффициент удара.

Однако при большой окружной скорости и отрицательных ошибках ($\Delta < 0$) возможны случаи, когда динамическая нагрузка при однопарном зацеплении реализуется неполностью, так что w на этом участке оказывается меньшей, чем $w_{ст}$, и понятие силы удара лишается смысла.

В общем случае удобнее относить w_v и w к передаваемой нагрузке $w_0 = w_{ном} K_\beta K_{кр}$ и считать

$$w = w_0 K_d; \quad w_v = w_0 K_d (K_v - 1), \quad (99)$$

где коэффициент динамической нагрузки

$$K_d = K_\alpha K_v.$$

Величина K_d может быть и больше, и меньше единицы.

Для статически ненагруженных зубьев $w_{ст} = 0$, так что

$$w = w_v. \quad (100)$$

Динамические усилия (удар) испытывает пара зубьев 1 (рис. 23), входящая в зацепление. Если шаг ведущего колеса с учетом деформации зубьев меньше шага ведомого, то ножка ведущего зуба 1 ударяет по кромке зуба ведомого колеса 2 вне линии зацепления вблизи точки P_1 (рис. 23, а). Такой удар условно называют *кромочным*. Если шаг ведущего колеса с учетом деформации зубьев превышает шаг ведомого, то пара зубьев 1 входит в контакт на линии зацепления вблизи точки U_2 уже после того, как точка контакта зубьев 11 отойдет от линии зацепления (рис. 23, б). Такой удар условно называют *срединным*. Если зубья 1 встречаются ранее точки U_2 , так что пересопряжение частично происходит еще на линии зацепления, то происходит *неполный срединный удар*.

3. Влияние параметров неточности зубьев на условия статического зацепления и характер ударов

ψ_k	ψ_c	Условия статического зацепления на участках перекрытия зубьев	Характер возможных ударов зубьев при $-\Delta_0 \leq \Delta \leq \Delta_0$
$\psi_k = 0$	$\psi_c = 0$	Двухпарное зацепление	Кромочный и неполный срединный
$0 < \psi_k \leq 1$	$0 < \psi_c \leq 1$		
$\psi_k > 1$		Неполное двухпарное зацепление	Кромочный и срединный
	$\psi_c > 1$	Однопарное зацепление	

Кромочный удар возможен при любых значениях Δ_0 (табл. 3), в том числе и в точной передаче (при $\Delta_0 = 0$), так как при ошибках Δ , заключенных в пределах $-\Delta_0 \leq \Delta \leq \Delta_0$, всегда возможны случаи, когда шаг ведущего колеса с учетом деформации зубьев будет меньше шага ведомого. Полный срединный удар возможен только в передачах при $\psi_c > 1$, когда ошибка Δ_0 превышает упругую деформацию зубьев.

Неполный срединный удар, возможный при $\psi_c \leq 1$, имеет несколько ослабленный характер, так как к моменту начала удара входящие в зацепление зубья оказываются уже частично нагруженными.

Характер динамических усилий существенно зависит от соотношений между периодом собственных колебаний сопряженных колес

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{M_{пр}}{c}} \quad (101)$$

и отрезками времени, в течение которых протекают отдельные фазы пересопряжения зубьев. В формуле (101) принимают $f = f_w$ или $f = f_p$ в зависимости от участков линии зацепления.

При умеренных окружных скоростях величины $v_k = \frac{T}{T_k} < 1$ и $v_c = \frac{T}{T_c} < 1$, где T_k и T_c — продолжительности начальных периодов кромочного и срединного

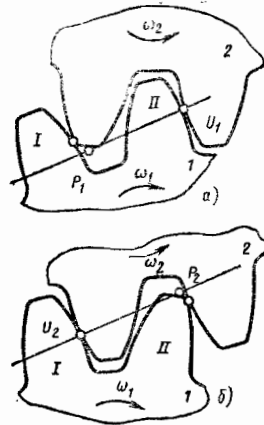


Рис. 23. Схема возникновения кромочного (а) и срединного (б) ударов зубьев

ударов, когда точка контакта одной из пары зубьев находится вне линии зацепления. При этом за время пересоприжения зубьев успевает произойти несколько колебаний, сопровождающихся перераспределением нагрузки с одного зуба на другой. Реализуются не только первый, но и последующие максимумы усилия. При срединном ударе зазор между входящими в зацепление зубьями исчезает уже в процессе удара, который полностью реализуется. Благодаря демпфированию в системе колебания от ранее происшедших ударов в значительной мере затухают, что позволяет считать скорость вращения колес к моменту начала нового пересоприжения равномерной.

С увеличением окружной скорости величины v_k и v_c становятся больше единицы, и тогда за время пересоприжения зубьев скорость вращения колес практически не успевает измениться. Входящая в зацепление пара зубьев воспринимает на себя всю дополнительную нагрузку от погрешности в основных шагах, а динамические усилия достигают своих максимальных значений. При еще более высоких окружных скоростях величина $v_3 = T/T_3$, где T_3 — полное время нахождения в зацеплении пары зубьев, также становится больше единицы. Тогда скорость вращения колес практически не меняется в течение всего времени нахождения пары зубьев в зацеплении. Возникающая при кромочном ударе деформация остается без изменения до выхода зубьев из зацепления, так что реализуется только первый максимум усилия. Срединного удара вообще не происходит, так как зубья отходят от линии зацепления раньше, чем устраняется зазор между ними. Колебаний колес нет, и динамические нагрузки, получающиеся постоянного знака, дают дополнительный вращающий момент. Это вызывает изменение среднего взаимного положения колес и требует рассмотрения движения колес в целом.

Полный расчет динамических нагрузок в зубьях — задача очень сложная и полностью не решенная. Ниже приведена приближенная методика расчета, основанная на теории динамического пересоприжения зубьев и экспериментально проверенная сопоставлением с результатами опытов разных исследователей практически во всем возможном диапазоне изменения параметров относительных ошибок (от $\psi_c \approx 0$ до $\psi_c \approx 50$) и в достаточно широком диапазоне изменения параметров инерционности передач ($v_k = 0,1 \div 11$ и $v_c = 0,5 \div 10$). При экспериментах окружные скорости достигали значений $v = 50$ м/с, удельная нормальная сила $\omega_{\alpha} = 57$ кгс/мм, ошибка основного шага $\Delta_0 = 72$ мкм, передаточное число $u = 1 \div 2$. Расчетные оценки динамических сил вне резонансных режимов соответствуют, как правило, верхним значениям экспериментальных данных. Для расчета динамических сил важное значение имеет правильное определение частоты собственных колебаний передачи и установление действительных наиболее вероятных значений ошибок основных шагов с учетом приработки зубьев.

Расчет динамических сил. В табл. 4 приведены формулы для расчета коэффициентов K_{α} , $K_{v \text{ lim}}$ и K_v в практически наиболее распространенном диапазоне окружных скоростей, когда $v_3 = T/T_3 < 1$. Коэффициент динамической нагрузки $K_d = K_{\alpha} K_v$. Относительные ошибки основного шага ψ_c и ψ_k определяются формулами (74) и (76) с учетом (67):

$$\psi_c = 0,95 \frac{\Delta_0}{\omega_{\alpha 0}}; \quad \psi_k = 1,37 \psi_c, \quad (102)$$

где Δ_0 в мкм, $\omega_{\alpha 0}$ в кгс/мм.

При расчете кромочного удара на заданные значения относительных ошибок ψ_c и $\psi_k = 1,37 \psi_c$ последовательно определяют:

4. Формулы для расчета коэффициентов

Удар	Точка	K_{α} при $\psi_c \leq 1$	$K_{v \text{ lim}}$		K_v
			$\psi_c \leq 1$	$\psi_c \geq 1$	
Кромочный	P_1	$0,42 (1 + \psi_k)$	1,73	$1,73 + (\psi_c - 1)$	$1 + (K_{v \text{ lim}} - 1) \bar{v}_k$, но не более $K_{v \text{ lim}}$
	U_2	$0,58 (1 + \psi_c)$ при $\psi_k \leq 1$; 1 при $\psi_k \geq 1$	$\frac{1 + \psi_k}{K_{\alpha}}$	$1,73 + (\psi_c - 1)$, но не менее 2,37	
Срединный	U_2	1	$1,42 + 0,58 \psi_c$	$1 + \sqrt{1 + 2,74 (\psi_c - 1)}$	$1 + (K_{v \text{ lim}} - 1) \bar{v}_c$, но не более $K_{v \text{ lim}}$

Примечание. При $\psi_c \geq 1$ $K_{\alpha} = 1$ при кромочном и срединном ударах.

1) отношение радиусов кривизны эвольвент в точке P_1 (при входе в зацепление)

$$\frac{\rho_{1P_1}}{\rho_{2P_1}} = \frac{(1+u) \sin \alpha_w}{u \sqrt{\left(1 + \frac{2}{uz_1}\right)^2 - \cos^2 \alpha_w}} - 1; \quad (103)$$

2) время кромочного контакта зубьев вне линии зацепления

$$T_k^* = 1,95 \cdot 10^{-5} \frac{d_{w2}}{v} \sqrt{\frac{\omega_{\alpha 0} (1 + \psi_k)}{a_w \sin \alpha_w} \left(\frac{\rho_{1P_1}}{\rho_{2P_1}}\right)}, \quad (104)$$

где d_{w2} , a_w в мм; $\omega_{\alpha 0}$ в кгс/мм; v в м/с, T_k^* в с;

3) период собственных колебаний сопряженных колес (в с)

$$T = \frac{1}{f_{\text{экс}}}, \quad (105)$$

где $f_{\text{экс}}$ — экспериментальное значение собственной частоты.

Если оно неизвестно, принимают

$$T \approx 0,115 \sqrt{M_{\text{пр}}}, \quad (106)$$

где приведенную массу колес в кгс·с²/мм² определяют по формулам (89)—(92),

4) коэффициент

$$\bar{v}_k = \frac{1}{\pi} \frac{T}{T_k^*}; \quad (107)$$

5) предельно возможный $K_{v \text{ lim}}^{(k)}$ и фактический $K_v^{(k)}$ коэффициенты удара и коэффициент полной динамической нагрузки $K_d^{(k)}$ — отдельно для точек P_1 и U_2 (по табл. 3);

6) силу удара ω и полную динамическую силу ψ по формулам (99).

При расчете срединного удара последовательно определяют:

1) отношение радиусов кривизны эвольвент в точке P_2 (при выходе из зацепления)

$$\frac{\rho_{2P_2}}{\rho_{1P_2}} = \frac{(1+u) \sin \alpha_w}{u \sqrt{\left(1 + \frac{2}{z_1}\right)^2 - \cos^2 \alpha_w}} - 1; \quad (108)$$

2) характеристическое время срединного удара T_c^* (в с)

$$T_c^* = 1,46 \frac{T_k^*}{u \sqrt{1 + \psi_k}} \sqrt{\left(\frac{\rho_{2P_2}}{\rho_{1P_2}}\right) / \left(\frac{\rho_{1P_1}}{\rho_{2P_1}}\right)}; \quad (109)$$

3) коэффициент

$$\bar{v}_c = \bar{v}_k \frac{T_k^*}{T_c^*}; \quad (110)$$

4) предельно возможный $K_v^{(c)}$ и фактический $K_v^{(c)}$ коэффициенты удара и коэффициент полной динамической нагрузки $K_d^{(c)}$ (по табл. 3);

5) силу удара w_v и полную динамическую силу w по формулам (99).

Более детальные расчеты для быстроходных передач с учетом условий реализации срединного удара и других особенностей могут быть выполнены согласно работам [5, 8 и др.]. Из этих расчетов вытекают следующие основные особенности развития динамических нагрузок в прямозубых передачах.

Максимально возможный коэффициент динамической нагрузки в точке P_1 при кромочном ударе

$$K_{d \text{ lim}}^{(k)} = K_\alpha K_v^{(k)} \text{lim} = \frac{c_p}{c_u} (1 + \psi_k) \approx 0,73 (1 + \psi_k)$$

соответствует передачам с большой инерционностью (практически для $\bar{v}_k \geq 1$), когда в процессе удара скорость вращения колес и усилие w_{II} между парой зубьев II не меняются. При меньшей инерционности коэффициент $K_d^{(k)}$ определяется формулой

$$K_d^{(k)} = K_{d \text{ lim}}^{(k)} \kappa_k, \quad (111)$$

где коэффициент смягчения удара κ_k зависит от параметра \bar{v}_k (рис. 24). Эта зависимость хорошо аппроксимируется ломаной линией:

при $0 \leq \bar{v}_k \leq 1$

$$\kappa_k = \frac{c_u}{c_u + c_p} \left(1 + \frac{c_p}{c_u} \bar{v}_k\right) \approx 0,58 + 0,42 \bar{v}_k;$$

при $\bar{v}_k > 1$ $\kappa_k = 1$,
что учтено в табл. 3.

Сила удара $w_v = w - w_{ст}$ для цельнокованых колес при $\psi_c < 1$ может быть приближенно оценена по формуле

$$w_v \approx 0,01 v \sqrt{\frac{a_w}{1 + u^2} \left(\frac{\rho_{2P_1}}{\rho_{1P_1}}\right) \left(\Delta_0 + \frac{w_0}{1,31}\right)},$$

где v в м/с, a_w в мм, Δ_0 в мкм, w_0 и w_v в кгс/мм.

При малых окружных скоростях сила удара пропорциональна окружной скорости и увеличивается с ростом ошибки Δ_0 .

Максимально возможный коэффициент динамической нагрузки при полном срединном ударе

$$K_{d \text{ lim}}^{(c)} = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{c_u}{c_p} (\psi_c - 1)} \approx 1 + \sqrt{1 + 2,74 (\psi_c - 1)}.$$

Это значение $K_{d \text{ lim}}^{(c)}$ соответствует передачам с большой инерционностью, когда зазор между зубьями пары I , равный (с учетом деформации зубьев II) величине $\Delta_0 - (w_{II}/c_p)$ не меняется до полного разжатия этих зубьев, после чего ведущее колесо

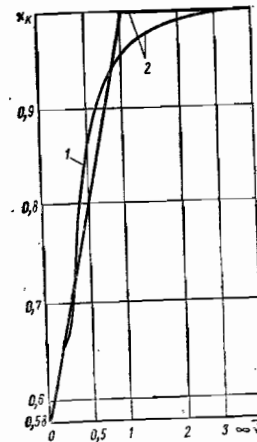
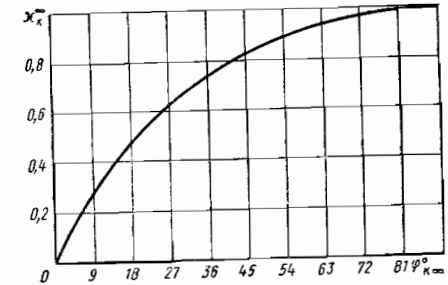


Рис. 24. Зависимости коэффициента смягчения кромочного удара κ_k от параметра \bar{v}_k : 1 — теоретическая [8]; 2 — расчетная

Рис. 25. Зависимость коэффициента смягчения кромочного удара статически ненагруженных зубьев κ_k^∞ от параметра $\Phi_{к\infty}^\circ$



начинает ускоренно вращаться под действием постоянного вращающего момента, а зубья пары I сближаются, в результате чего происходит удар. При меньшей инерционности удар также смягчается. При неполном срединном ударе динамические нагрузки меньше.

При малой окружной скорости сила срединного удара, как и кромочного, пропорциональна скорости. Для неточных передач (при $\psi_c \geq 1$) можно считать [8]

$$w_v = 3,2 \cdot 10^{-2} v \frac{u}{\alpha_f} \sqrt{\frac{a_w \Delta_0}{1 + u^2} \left(\frac{\rho_{1P_2}}{\rho_{2P_2}}\right) \Psi}, \quad (112)$$

где

$$\Psi = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\psi_k}} + 1,37 \sqrt{1 - \frac{1}{\psi_c}}}{2,37}.$$

Величина Ψ меняется в пределах от 0,56 до 1. Если принять $\Psi = 0,6$, считать в среднем $\frac{u^2}{1 + u^2} \left(\frac{\rho_{1P_2}}{\rho_{2P_2}}\right) \approx \frac{1}{0,75 u^2}$, не учитывать снижения жесткости зубьев при кромочном контакте и учесть экспериментальную поправку на собственную частоту колебаний $\alpha_f = 1,1$, то формула (112) примет вид

$$w_v = \delta_F g_0 v \sqrt{\frac{a_w}{u}}, \quad (113)$$

где a_w в мм, Δ_0 в мкм, v в м/с; $g_0 = \sqrt{\Delta_0}$.

Выражение (113), предложенное А. И. Петрусевичем (при $\delta_F = 0,025$), широко применяется для приближенной оценки силы удара зубьев и, в частности, использовано в ГОСТ 21354—75 (с уменьшенным множителем $\delta_F = 0,016$).

Сила удара в статически слабо нагруженных передачах. В статически слабо нагруженных передачах (коробки приводов агрегатов и др.) зубья после кромочного удара быстро разжимаются, так что реализуется только первый максимум. Сила удара при этом мало отличается от значения при отсутствии статической нагрузки ($w_{\infty} = 0$ или $\psi_k \rightarrow \infty$). Для этого предельного случая сила кромочного удара $w = w_v = c_p \Delta_0 \kappa_k^\infty$, где коэффициент κ_k^∞ определяется по графику, приведенному на

рис. 25 в зависимости от характеристического угла $\varphi_{k\infty}$ для которого [8]

$$\operatorname{tg} \varphi_{k\infty} = \bar{v}_{k\infty} = \frac{1}{2\lambda} \frac{T_1}{T_{k1}^*},$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \sqrt{\frac{c_u + c_p}{c_p}} T \approx 1,54T; \\ T_{k1}^* &= 2,24 \cdot 10^{-5} \frac{d_{w2}}{v} \sqrt{\frac{\Delta_0}{a_w \sin \alpha_w} \left(\frac{\rho_{1P_1}}{\rho_{2P_2}} \right)}; \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

причем d_{w2} , a_w в мм, Δ_0 в мкм, v в м/с; величину T (в с) определяют по формулам (105) или (106), а отношение ρ_{1P_1}/ρ_{2P_2} — по формуле (103).

Графиком на рис. 24 можно пользоваться для оценки силы кромочного удара статически слабо нагруженных зубьев при $\psi_c > 1$ и $\bar{v}_k < 0,5$, считая

$$K_d^{(k)} = 1 + \frac{c_p}{c_u} \psi_k \chi_k^{\infty} \approx 1 + 0,73 \psi_k \chi_k^{\infty}. \quad (115)$$

Расчетная динамическая нагрузка. Расчетную динамическую нагрузку определяют для каждой характерной точки линии зацепления:

$$\left. \begin{aligned} w_{P_1} &= w_0 K_d^{(k)}; \\ w_{U_2} &= w_0 K_d U_2; \\ w_W &= w_0 K_d W; \\ w_{U_1} &= w_0; \\ w_{P_2} &= w_0 K_{\alpha P_2}. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

В качестве значений $K_d U_2$ и $K_d W$ принимают те из коэффициентов $K_d^{(k)}$ и $K_d^{(e)}$ для точек U_2 и W , которые имеют большую величину.

Пример. Найти силу удара w_0 и динамическую нагрузку w в передаче с параметрами $a_w = 250$ мм, $i = 2$, $m = 5$ мм, $\alpha_w = 20^\circ$, $v = 15,7$ м/с, 7-я степень точности ($\Delta_0 = 28$ мкм), $w_0 = 39,3$ кгс/мм, $z_1 = 32$, $d_{w2} = 320$ мм.

Последовательно находим

для кромочного удара: $\frac{\rho_{1P_1}}{\rho_{2P_2}} = 0,223$; $\psi_c = 0,677$ ($\psi_c < 1$); $\psi_k = 0,928$; $T_k^* = 1,76 \cdot 10^{-4}$ с;

$M_{np} = 7,4 \cdot 10^{-6}$ кгс·с²/мм²; $T = 3,11 \cdot 10^{-4}$ с; $\bar{v}_k = 0,560$; в точке P_1 : $K_{\alpha} = 0,810$; $K_{vlim} = 1,73$; $K_v = 1,41$; $K_d = 1,14$; $w_0 = 13,1$ кгс/мм; $w = 44,8$ кгс/мм; в точке U_2 : $K_{\alpha} = 0,975$; $K_{vlim} = 1,978$; $K_v = 1,55$; $K_d = 1,51$; $w_0 = 21,1$ кгс/мм; $w = 59,5$ кгс/мм;

для срединного удара: $\frac{\rho_{2P_2}}{\rho_{1P_1}} = 1,081$; $T_k^* = 2,05 \cdot 10^{-4}$ с; $\bar{v}_c = 0,485$; $K_{vlim} = 1,81$; $K_d = K_v = 1,393$; $w_0 = 15,4$ кгс/мм; $w = 54,8$ кгс/мм.

По расчету согласно рекомендациям к ГОСТ 21354—75: $g_0 = 5,3$; $K_v = 1,468$; $K_d = 1,19$; $w_0 = 14,9$ кгс/мм; $w = 46,7$ кгс/мм.

Полный расчет согласно табл. 3 (помимо расчета по ГОСТ 21354—75) целесообразно проводить для вновь проектируемых, особенно быстроходных ответственных передач.

При расчете передач со смещениями параметры ψ и \bar{v} надо определять по фактической геометрии зуба и жесткостям. Уменьшение динамической нагрузки при модификации зубьев можно учесть, принимая в качестве расчетной ошибки

$$\Delta_{расч} = \Delta_0 - \Delta_{\alpha\alpha},$$

где $\Delta_{\alpha\alpha}$ — нормальная глубина модификации профиля головки зуба. По ГОСТ 21354—75 в этом случае принимают $\delta_r = 0,011$.

Влияние динамических нагрузок на контактную выносливость поверхности зубьев обычно проявляется слабее, чем на выносливость при изгибе, особенно в зубьях невысокой твердости. Поэтому $K_{Fv} = K_v$, а

$$K_{Hv} = 1 + \eta (K_v - 1), \quad (117)$$

где при твердости $HB > 350$ $\eta = 0,75$; при твердости $HB \leq 350$ $\eta = 0,35$.

РАСЧЕТ ЗУБЬЕВ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Напряжения при изгибе. На единицу ширины зуба действует нормальная нагрузка w_{α} , направленная по линии зацепления, и касательная нагрузка от сил трения $q = f w_{\alpha}$, где при наличии смазки $f = 0,05 \div 0,08$. Силы трения направлены в сторону относительного скольжения зубьев, т. е. на ведущем зубе от полюса, на зубьях ведущего колеса и уменьшает на зубьях ведомого. Практически, при расчете зубьев на изгиб влиянием трения можно пренебречь.

Под действием нормальной нагрузки w_{α} на растянутой стороне зуба возникают меньшие напряжения, чем на сжатой. Однако вследствие того, что поверхностные слои материала зуба оказывают меньшую сопротивляемость усталостным растягивающим напряжениям, чем напряжения сжатия, наиболее опасными являются напряжения, возникающие на растянутой стороне зуба. Наибольшие напряжения изгиба действуют в плоскости, нормальной к переходной поверхности зуба. Поэтому поломка зуба происходит, как правило, не по плоскому, а по цилиндрическому или близкому к нему сечению (рис. 27).

Номинальное напряжение изгиба в опасном сечении можно определить по формулам сопротивления материалов. Расчетная схема зуба показана на рис. 28. Действующую по линии зацепления нагрузку w_{α} раскладывают на две составляющие — изгибающую $w_{\alpha} \cos \gamma_x$ и сжимающую $w_{\alpha} \sin \gamma_x$. Изгибающие напряжения, возникающие в опасном сечении зуба,

$$\sigma_{из} = \frac{M_{из}}{W_{из}} = \frac{6 w_{\alpha} h_x \cos \gamma_x}{s_1^2}, \quad (118)$$

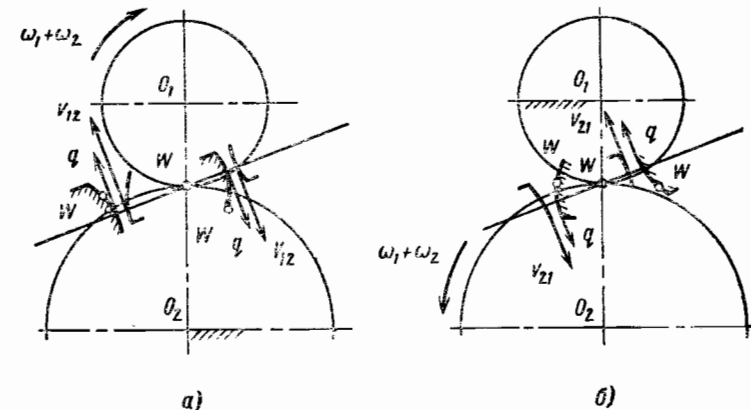


Рис. 28. Направление действия сил трения: а — на ведомом зубе; б — на ведущем

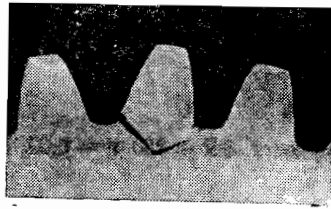


Рис. 27. Типичная поломка зуба при испытаниях на пульсаторе

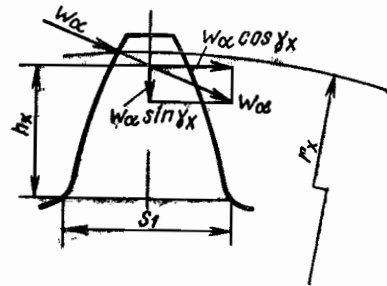


Рис. 28. Схема зуба при расчете на изгиб

напряжения сжатия

$$\sigma_{сж} = \frac{F_{сж}}{S} = \frac{w_{\alpha} \sin \gamma_x}{s_1}, \quad (119)$$

где s_1 — толщина зуба в опасном сечении; h_x — плечо изгиба.

Суммарные номинальные напряжения на растянутой стороне переходной кривой зуба

$$\sigma_0 = \sigma_n - \sigma_{сж} = w_{\alpha} \left(\frac{6h_x \cos \gamma_x}{s_1^2} - \frac{\sin \gamma_x}{s_1} \right). \quad (120)$$

Формулу (120) можно привести к виду

$$\sigma_0 = Y_{F0} \frac{w_F}{m}, \quad (121)$$

где удельную расчетную окружную силу w_F принято определять по усилию, действующему на делительной окружности, т. е.

$$w_F = \omega \frac{d_w i}{d_1} = \omega \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} = \omega_{\alpha} \cos \alpha; \quad (122)$$

здесь α — угол профиля исходного контура.

Безразмерный коэффициент

$$Y_{F0} = \frac{m}{s_1 \cos \alpha} \left(\frac{6h_x \cos \gamma_x}{s_1} - \sin \gamma_x \right) \quad (123)$$

называют коэффициентом, учитывающим форму зуба (коэффициентом формы зуба), при расчете номинальных напряжений. В ряде прежних работ коэффициентом формы зуба называли обратную величину $1/Y_{F0}$. Чем больше величина коэффициента формы зуба, тем больше напряжения при данной силе и модуле.

Из-за концентрации напряжений на переходной поверхности местные упругие напряжения σ_F будут больше номинальных σ_0 , что учитывают введением теоретического коэффициента концентрации напряжений

$$\sigma_F = \alpha_{\sigma} \sigma_0. \quad (124)$$

Местные упругие напряжения, возникающие в зубе при изгибе, могут быть определены как аналитическими методами [3], так и экспериментально, например методом фотоупругости (рис. 29). Наибольшие напряжения соответствуют наибольшей частоте полос и находятся у основания зуба на переходной поверхности.

Максимальные местные напряжения также определяют по формуле типа (121)

$$\sigma_F = Y_F \frac{w_F}{m}, \quad (125)$$

где

$$Y_F = \alpha_{\sigma} Y_{F0}. \quad (126)$$

Зависимость коэффициента Y_F от числа зубьев z и коэффициента смещения x для зубьев с исходным реечным контуром по ГОСТ 13755—68 при приложении силы K к вершине зуба приведена на рис. 30 [7].

Напряжения изгиба σ_F пропорциональны нагрузке w_F и растут с увеличением ее плеча (но не пропорционально из-за уменьшения в определенных пределах коэффициента концентрации). Так как максимальная динамическая нагрузка действует в первые моменты зацепления, то в худших условиях обычно находится ведомый зуб, для которого опасным может быть приложение нагрузки на кромке зуба (в точке P_1 , см. рис. 3) и в точке U_2 .

Для ведущего зуба опасным также может быть приложение нагрузки на кромке (в точке P_2) или в точке U_1 , когда проявляется влияние срединного удара и возрастает коэффициент концентрации. Коэффициент формы зуба при приложении нагрузки в точках начала или конца участка однопарного зацепления U :

$$Y_{Fu} = Y_F Y_e. \quad (127)$$

Определив из геометрического расчета диаметр окружностей d_u , на которых расположены точки U , можно найти усредненное значение коэффициента Y_e в зависимости от параметра

$$H = \frac{d_a - d_u}{2m} \quad (128)$$

по формуле

$$Y_e \approx 1 - 0,35H. \quad (129)$$

С учетом выражений (125) и (127) приходим к расчетной формуле (27). В развернутом виде для прямозубых передач

$$\sigma_F = Y_F Y_e \frac{2000 T_1}{m b_w d_1} K. \quad (130)$$

Для приближенной оценки теоретических коэффициентов концентрации напряжений можно пользоваться формулой

$$\alpha_{\sigma} = 1 + 0,15 \frac{s_1}{\rho_m}, \quad (131)$$

где ρ_m — средний радиус переходной поверхности; s_1 — толщина зуба в опасном сечении.

По мере уменьшения плеча силы от h_x (см. рис. 28) до h'_x величина α_{σ} увеличивается, причем

$$\alpha'_{\sigma} \approx \alpha_{\sigma} \sqrt{\frac{h_x}{h'_x}}. \quad (132)$$

Более подробные сведения о коэффициентах формы зуба для передач с другими исходными контурами, а также о коэффициентах α_{σ} и Y_e приведены в работах [1, 3, 7] и др.

Пределы выносливости зубьев и запасы прочности. Разрушение зуба от усталости начинается на растянутой стороне. Если зубья испытывают одностороннее нагружение, то цикл нагружения будет пульсирующим. Если нагрузки на зуб последовательно прикладываются с разных сторон (например, у промежуточных шестерен) и величины их одинаковы, то цикл получается симметричным. При разных нагрузках

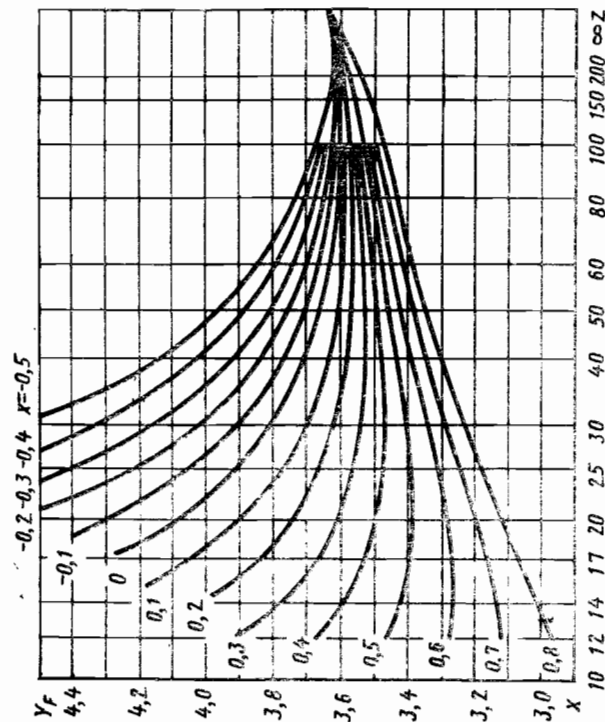


Рис. 30. Зависимость коэффициента формы по местным напряжениям Y_F от числа зубьев z и коэффициента коррекции x при приложении нагрузки к вершине зуба при исходном реборном контуре по ГОСТ 13755—68

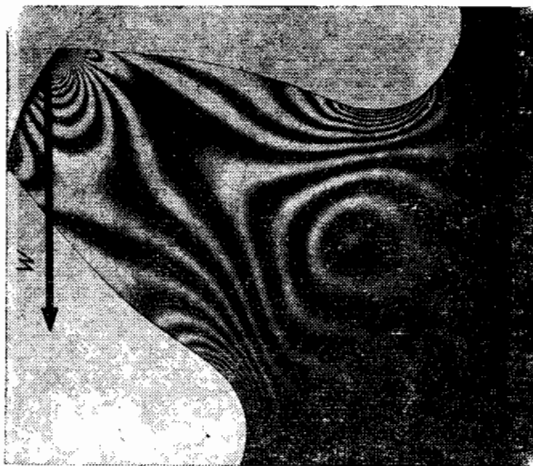


Рис. 29. Интерференционные полосы при статическом изгибе модели зуба из оптического активного материала

по формулам (8) и (9) гл. 2 можно найти среднее σ_m и амплитудное σ_a значения нагрузки и номинальные напряжения.

Запас усталостной прочности зуба (коэффициент безопасности) определяют как отношение разрушающей нагрузки $w_{разр}$ к действующей w , причем $w_{разр}$ должна быть приложена в той же точке профиля, что и w :

$$S_F = \frac{w_{разр}}{w}. \quad (133)$$

Переходя с помощью формулы (121) к номинальным напряжениям, найдем

$$S_F = \frac{\sigma_{вразр}}{\sigma_0}, \quad (134)$$

где $\sigma_{вразр}$ — номинальное напряжение, соответствующее разрушающей нагрузке. Аналогичным способом можно выразить запас прочности через местные напряжения σ_F и $\sigma_{Fразр}$.

Существуют два метода определения $\sigma_{разр}$ и запасов прочности.

1-й метод — по данным усталостных испытаний гладких образцов и образцов с надрезом. Запас прочности для пульсирующего цикла

$$S_F = \frac{2\sigma_{-1}}{\left(\frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma} + \psi_\sigma\right)\sigma_0}, \quad (135)$$

для симметричного цикла

$$S_F = \frac{\sigma_{-1}\epsilon_\sigma}{k_\sigma\sigma_0}. \quad (136)$$

При разных нагрузках, действующих в ту и другую сторону,

$$S_F = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma}\sigma_{0a} + \psi_\sigma\sigma_{0m}}, \quad (137)$$

где σ_{-1} — предел выносливости материала сердцевины зуба; ϵ_σ — коэффициент влияния абсолютных размеров; ψ_σ — коэффициент влияния асимметрии цикла. При расчете стальных зубьев обычно считают $\epsilon_\sigma \approx 1$, $\sigma_{-1} \approx 0,5 \sigma_{вс}$, где $\sigma_{вс}$ — предел прочности сердцевины зуба; $\psi_\sigma \approx 0,5$.

Эффективный коэффициент концентрации напряжений в зубе k_σ устанавливают сопоставлением результатов усталостных испытаний гладких образцов данного материала и образцов из того же материала и той же термообработки, но имеющих надрез по форме переходной поверхности зуба и подвергнутых поверхностной механической и химико-термической обработке.

Зависимость между k_σ и α_σ обычно представляют в виде

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1), \quad (138)$$

где q_σ — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений, которым условно учитывают также влияние поверхностной обработки.

Для зубьев, подвергшихся нормализации, улучшению и поверхностной или объемной закалке, $q_\sigma \approx 0,8$ при твердости $HRC < 35$ и $q_\sigma \approx 1$ при твердости $HRC > 35$.

Если зубья подвергнуты поверхностной химико-термической обработке, то их напряженное состояние в значительной мере зависит от величины наведенных напряжений. В этом случае усталостные трещины зарождаются под упрочненным слоем. Эффект концентрации напряжений здесь уменьшается в связи с удалением очага разрушения от геометрического концентратора напряжений (переходной кривой). Для цементованных галтелей принимают $q_\sigma \approx 0,2$ или величину k_σ устанавливают независимо от значений α_σ . Для стальных зубьев цементованных, азотированных или

цианированных $k_{\sigma} \approx 1,2$. При грубой оценке прочности можно считать для зубьев из нормализованного и улучшенного материала $k_{\sigma} = 1,8$, для закаленных зубьев $k_{\sigma} = 2,0$; для чугуновых зубьев $k_{\sigma} = 1,2$.

2-й метод — по данным усталостных испытаний непосредственно зубьев, как это принято в ГОСТ 21354—75. При таких испытаниях в полной мере учитываются при- рудные зубчатым колесам технологические особенности изготовления, влияние химико- термической обработки и другие факторы. По имеющимся данным [6] при базе испыта- ний $4 \cdot 10^6$ циклов предел выносливости зубьев цементованных и нитроцементованных из сталей, содержащих молибден (25ХГМ) или более 1% никеля и не более 1% хрома (20ХН2М, 12ХН3А и др.), $\sigma_F^0 \lim = 95 \div 100$ кгс/мм²; цементованных и нитроцемен- тованных из других сталей (20Х, 12Х2Н4А, 20Х2Н4А, 35Х и др.) $\sigma_F^0 \lim = 70 \div 80$ кгс/мм²; азотированных $\sigma_F^0 \lim = (30 + 1,8 HRC)$ кгс/мм², где HRC 24—40 — твердость в сердцевине зубьев.

При объемной закалке зубьев $\sigma_F^0 \lim = 50 \div 60$ кгс/мм²; для зубьев, закален- ных при нагреве ТВЧ, $\sigma_F^0 \lim = 70 \div 90$ кгс/мм² при твердости переходной поверх- ности HRC 52—62 и $\sigma_F^0 \lim = 50 \div 60$ кгс/мм² при HRC 48—55; для зубьев из нор- мализованной и улучшенной стали при HB 180—350 $\sigma_F^0 \lim = 0,18 HB$.

Шлифование переходной поверхности зубьев снижает указанные значения $\sigma_F^0 \lim$ на 20—30%, дробеструйная или электрохимическая обработка повышает их на 10—20%. При симметричном цикле нагружения $\sigma_F^0 \lim$ снижается на 20—30%.

Фактическое число циклов нагружения при работе на постоянном режиме

$$N = 60ant, \quad (139)$$

где a — число вхождений в зацепление каждой стороны зуба за один оборот; n — частота вращения, об/мин; t — время работы, ч.

Предел выносливости $\sigma_F^0 \lim$, соответствующий числу циклов N , определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_F \lim &= \sigma_6 \sqrt[m]{\frac{N_6}{N}} \quad \text{при } N_{\min} \leq N \leq N_0; \\ \sigma_F \lim &= \sigma_6 \sqrt[m]{\frac{N_6}{N_0}} = \text{const} \quad \text{при } N \geq N_0. \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

При расчете по формулам (135)—(137) $N_6 = 10^7$ циклов, $\sigma_6 = \sigma_{-1}$; по формулам (140) — $N_6 = 4 \cdot 10^6$ циклов, $\sigma_6 = \sigma_F^0 \lim$. Для зубьев с нешлифованной переходной поверхностью при твердости $HB > 350$ принимают $m = 9$, в остальных случаях $m = 6$. При твердости сердцевины $HB \leq 350$ принимают $N_0 = 10^7$ циклов и при твер- дости $HB > 350$ $N_0 = 15 \cdot 10^7$; $N_{\min} = 5 \cdot 10^4$ циклов. При меньшем числе циклов про- водят расчет на малоцикловую усталость.

При расчетах на выносливость зубчатых колес в общем машиностроении исполь- зуют следующие значения коэффициента безопасности (запаса прочности) S_F :

- 1,8 — для отливок стальных или чугуновых, термически не обработанных;
- 1,6 — для отливок стальных или чугуновых, подвергнутых отжигу, нормализа- ции или улучшению;
- 1,4 — для поковок стальных, подвергнутых нормализации или улучшению;
- 1,8 — для поковок стальных; зубья подвергнуты объемной закалке ($HB > 300$);
- 2,2 — для поковок и отливок стальных, термически обработанных; зубья имеют твердую поверхность ($HB > 350$) и вязкую сердцевину.

В передачах, где излом зубьев не допустим по условиям техники безопасности или связан со значительными производственными потерями, коэффициенты безопас- ности рекомендуется увеличивать на 50% по сравнению с приведенными выше. Для авиационных редукторов принимают $S_F = 1,5 \div 3,0$.

По условию усталостной прочности зубьев на изгиб

$$\sigma_F \leq \sigma_{FP}. \quad (141)$$

При определении допускаемого напряжения изгиба

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_F \lim}{S_F} Y_R Y_S K_{xP} \quad (142)$$

вводят дополнительные коэффициенты Y_S и K_{xP} , учитывающие влияние абсолютных размеров зубьев и колес, и коэффициент Y_K , учитывающий влияние шероховатости переходной поверхности. Приблизительно $Y_S = 1,08 - 0,16 \lg m$, $K_{xP} = 1 - 8,3 \cdot 10^{-5} d_a$, где m — модуль, мм; d_a — диаметр вершины колеса, мм; при полировании переходной поверхности $Y_R = 1,05 \div 1,2$.

Более детальные рекомендации по выбору пределов выносливости зубьев, коэф- фициентов безопасности и других коэффициентов приведены в приложениях к ГОСТ 21354—75. Особенности расчета при многорежимной работе рассмотрены ниже.

Статическая прочность. Зуб проверяют также на статическую прочность при максимальной кратковременной перегрузке.

При твердости сердцевины зубьев $HB < 350$ во избежание чрезмерной пластиче- ской деформации запас по текучести

$$S_{FM}^{(T)} = \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \quad (143)$$

принимают не ниже 1,25.

Для стальных (твердость $HB \geq 350$) и чугуновых колес во избежание хрупкого разрушения, запас прочности

$$S_{FM}^{(B)} = \frac{\sigma_B}{k_0 \sigma_0} = \frac{\sigma_B}{\sigma_F} \quad (144)$$

принимают 2,0—2,5.

Повысить усталостную прочность зуба на изгиб можно, увеличивая модуль зацепления, используя усиливающее ножку зуба положительное смещение или при- меняя более прочный материал. Для снижения динамических нагрузок повышают точность изготовления колес и вводят модификацию поверхности зуба. Для умень- шения концентрации нагрузки у торцов зуб делают бочкообразным. Повышение пре- дела выносливости зубьев обеспечивается: упрочнением поверхности, которое дости- гается химико-термической обработкой и наклепом впадин; уменьшением шерохова- тости поверхности у основания зуба, для чего полезно, в частности, применять направленную полировку впадин (в плоскости, перпендикулярной оси колеса); в ответственных передачах применением стали электрошлакового переплава, в кото- рой отсутствуют неметаллические включения. При нарезании зубьев не следует допускать уменьшения радиусов переходной поверхности. Использование зубьев, не шлифуемых у основания после закалки (с поднутренной конфигурацией ножки), гарантирует отсутствие прижогов от шлифовки, которые снижают предел выносли- вости.

Следует добиваться возможно большей равнопрочности колеса и шестерни правильным подбором материалов и рациональным распределением смещений между зубьями. При проектировании высоконапряженных зубчатых передач целесообразно использовать специальный исходный производящий контур, возможности проекти- рования передач значительно расширяются при использовании обобщающих пара- метров [1].

РАСЧЕТ НА КОНТАКТНУЮ ВЫНОСЛИВОСТЬ АКТИВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЗУБЬЕВ

Контактные напряжения. Рассмотрим сжатие двух цилиндрических тел, ради- усы которых ρ_2 и ρ_1 равны радиусам кривизны профилей зубьев колеса и шестерни в точке контакта (рис. 31).

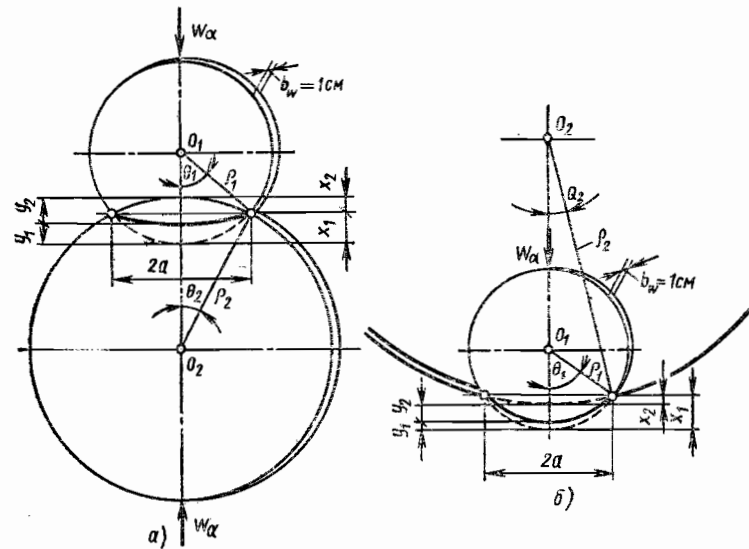


Рис. 31. К расчету контактных напряжений в зубе:
а — наружное зацепление; б — внутреннее

Опытами установлено, что деформация каждого цилиндра, как и при обычном испытании на сжатие, пропорциональна нагрузке w_α и обратно пропорциональна модулю упругости материала E , т. е.

$$y_1 = \lambda \frac{w_\alpha}{E_1}; \quad y_2 = \lambda \frac{w_\alpha}{E_2}, \quad (145)$$

где λ — некоторый безразмерный коэффициент пропорциональности.

С другой стороны (рис. 31), отрезок

$$x_1 = \rho_1 (1 - \cos \theta_1), \quad (146)$$

где

$$\sin \theta_1 = a/\rho_1. \quad (147)$$

Так как a значительно меньше ρ_1 , то

$$\theta_1 \approx \frac{a}{\rho_1} \quad (148)$$

и

$$x_1 \approx \rho_1 [1 - (1 - 0,5\theta_1^2)] \approx 0,5 \frac{a^2}{\rho_1}. \quad (149)$$

Аналогично

$$x_2 \approx 0,5 \frac{a^2}{\rho_2}. \quad (150)$$

Так как $y_1 + y_2 = x_1 \pm x_2$, где знак плюс соответствует внешнему зацеплению, знак минус — внутреннему, то

$$\lambda w_\alpha \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} \right), \quad (151)$$

откуда

$$a = 2 \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{w_\alpha \rho_{np}}{E_{np}}}, \quad (152)$$

где приведенный модуль упругости

$$E_{np} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}, \quad (153)$$

и приведенный радиус кривизны

$$\rho_{np} = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2 \pm \rho_1}. \quad (154)$$

Подставляя выражение (152) в формулу

$$\sigma_{Hm} = \frac{w_\alpha}{2a}, \quad (155)$$

где σ_{Hm} — среднее напряжение смятия, получим

$$\sigma_{Hm} = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{w_\alpha E_{np}}{\rho_{np}}}. \quad (156)$$

Фактически напряжения распределяются по ширине площадки неравномерно и кроме нормальных возникают также касательные напряжения τ , причем все напряжения пропорциональны σ_{Hm} . Расчеты показывают, что максимальные касательные напряжения возникают на некотором расстоянии от поверхности и определяются по формуле

$$\tau_{max} = 0,127 \sqrt{\frac{w_\alpha E_{np}}{\rho_{np}}}. \quad (157)$$

Из-за сил трения между зубьями максимальными становятся напряжения на поверхности контактной площадки, их величина больше на 15% τ_{max} по формуле (157) (при коэффициенте трения $f = 0,2$). Поэтому в ряде прежних работ в качестве расчетной принимали формулу (157) с коэффициентом 0,145. В рекомендуемом приложении № 1 к ГОСТ 21354—75 в качестве расчетной принята формула максимальных нормальных контактных напряжений

$$\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mu^2)}} \sqrt{\frac{w_\alpha E_{np}}{\rho_{np}}} \approx 0,418 \sqrt{\frac{w_\alpha E_{np}}{\rho_{np}}}. \quad (158)$$

Для полюса с учетом формул (4), (11) и (14)

$$\sigma_H \approx 0,593 \sqrt{\frac{w}{d_{w1}} \frac{u \pm 1}{u} \frac{2}{\sin 2\alpha_w} E_{np}}. \quad (159)$$

Формулу (159) можно представить в виде

$$\sigma_H = Z_H Z_M \sqrt{\frac{w}{d_{w1}} \frac{u \pm 1}{u}}, \quad (160)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Z_M &= \sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha_w}}; \\ Z_M &= 0,836 \sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}} \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

причем w в кгс/мм, E в кгс/мм², d_{w1} в мм

Для стальных зубьев $Z_M = 86,6$. Для передач, у которых коэффициент суммы смещений $x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0$, величина $Z_H = 1,76$.

Так как по мере удаления от полюса приведенный радиус кривизны $\rho_{пр}$ уменьшается, при той же нагрузке контактные напряжения возрастают и определяются формулой

$$\sigma_{H\xi} = \sigma_H \sqrt{\frac{u}{(1-\xi)(u \pm \xi)}} \left(\frac{\omega_\xi}{w}\right), \quad (162)$$

где ω_ξ — нагрузка в точке ξ ,

$$\xi = \frac{\frac{\rho_2 - u}{\rho_1}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} \pm 1}. \quad (163)$$

Если точка P_1 расположена вблизи основной окружности, то $\xi \rightarrow 1$ и $\sigma_{H\xi} \rightarrow \infty$. В действительности, однако, зона контакта имеет конечную ширину, поэтому при больших значениях $\sigma_{H(P_1)}$ величину ξ следует уточнить, определяя ее по средней величине радиуса кривизны поверхности на площадке контакта (см. работу [1] гл. 4).

Влияние смазки и кинематики передачи на выкрашивание. Масло, проникая в мельчайшие трещинки, возникающие на поверхности зуба в результате усталости, углубляет их, и частицы материала откалываются. Поверхность зуба становится неровной, что ведет к возрастанию удельных давлений и к дальнейшему разрушению поверхности. С увеличением вязкости масла повышается сопротивляемость поверхностного слоя, так как уменьшается трение, и вязкой смазке труднее проникнуть в микротрещины.

При движении с трением микротрещины, образующиеся в поверхностном слое, наклонены к поверхности (рис. 32). Зубья обкатываются и скользят один по другому. Если направления скоростей качения v_k и скольжения v_c совпадают, то при приближении зоны контакта к микротрещине силы трения сдвигают металл так, что масло выдавливается из трещины, а трещина прикрывается. После того как зона контакта минует микротрещину, силы трения будут способствовать ее раскрытию, но масло при пониженном давлении проникает внутрь слабо. Если скорости v_k и v_c направлены в противоположные стороны, силы трения раскрывают микротрещину как раз в области высокого давления, причем устье трещины направлено навстречу масляной волне, что ведет к интенсивному проникновению сжатого высоким давлением масла в глубину поверхностного слоя и откалыванию частиц материала. Направления скоростей v_k и v_c совпадают в головках зубьев и противоположны в ножках, т. е. условия работы ножек на выкрашивание менее благоприятны, что подтверждается опытом.

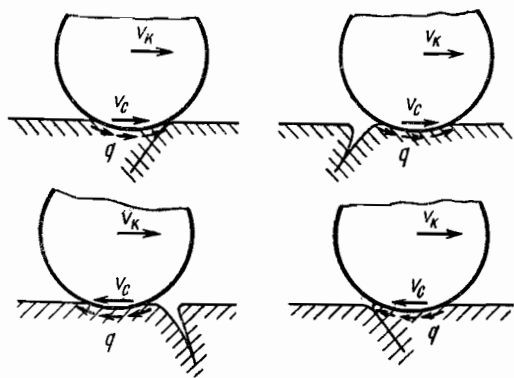


Рис. 32. Влияние направления качения и скольжения зубьев на проникновение смазки в поверхностные микротрещины

Интенсивность выкрашивания возрастает с увеличением сил трения, т. е. с увеличением нагрузки и коэффициента трения, который, в частности, зависит от скорости скольжения v_c . Максимальное значение коэффициента трения соответствует небольшой скорости скольжения

$v_c = 5 + 15$ см/с, которая бывает в точках, близких к полюсу. Именно в этих точках на ножках зубьев и начинается выкрашивание.

Ухудшение условий работы в полюсе учитывают, условно понижая допускаемые напряжения. Для точек U_2 и P_1 допускаемые напряжения повышаются. Опасные расчетные случаи соответствуют положениям, когда наибольшая динамическая нагрузка действует на полюс или ножку ведущего зуба (в точке P_1). Если ведомый зуб имеет менее прочную поверхность, его рассчитывают по нагрузке в полюсе ω_w . В открытых передачах выкрашивания не наблюдается.

Допускаемые напряжения. После появления первых признаков выкрашивания передача может работать еще довольно длительное время, поэтому коэффициент безопасности (запас прочности) по контактным напряжениям принимают равным $S_H = 1,0 \div 1,2$, причем его можно учитывать в величине расчетного предела выносливости $\sigma_{H \lim}^0$. Условие обеспечения контактной выносливости зубьев имеет вид

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP}, \quad (164)$$

где

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H \lim}^0}{S_H} Z_R Z_v K_L K_{xH}. \quad (165)$$

Предел выносливости $\sigma_{H \lim}^0$ при базовом числе циклов N_0 с поправкой на коэффициент безопасности S_H можно принимать в зависимости от средней твердости поверхности зубьев по табл. 5.

5. Значения пределов выносливости

Материал зубьев колес	$\sigma_{H \lim}^0$, кгс/мм ²
Сталь:	
без специальной химико-термической обработки поверхности (твердость $HB < 350$)	0,18 HB + 6,5
с объемной закалкой (HRC 38—50)	1,65 HRC + 13,5
с поверхностной закалкой (HRC 40—50)	1,4 HRC + 16,5
цементованная и нитроцементованная (твердость HRC > 56)	1,95 HRC
азотированная (HV 550—750)	88
Чугун (при числе циклов $N = 10^7$):	
серый	13 HB
ковкий и модифицированный	15,5 HB
Неметалл (в паре со сталью или чугуном):	
текстолит	4—5
лигнофоль	4,8—5,8

В авиационных редукторах допускаются более высокие значения $\sigma_{H \lim}^0$ (до $2,2 \div 2,6$ HRC) при числе циклов до 10^7 .

Предел выносливости $\sigma_{H \lim}^0$ соответствующий фактическому числу циклов нагружения N , которое при работе на постоянном режиме определяется формулой (139),

$$\sigma_{H \lim} = \sigma_{H \lim}^0 K_{HL}, \quad (166)$$

где K_{HL} — коэффициент влияния ограниченного числа циклов (коэффициент долговечности);

$$K_{HL} = \sqrt[6]{\frac{N_0}{N}} \text{ при } N_{\min} \leq N \leq N_0; \quad (167)$$

$$K_{HL} = 1 \text{ при } N \geq N_0; \quad (168)$$

$$K_{HL} = \sqrt[6]{\frac{N_0}{N_{\min}}} = \text{const при } N \leq N_{\min}. \quad (169)$$

Базовое число циклов N_0 и число циклов N_{\min} определяют по табл. 6. Для чугуновых колес

$$K_{HL} = \sqrt[6]{\frac{10^7}{N}} \quad \text{при } N \geq N_{\min}; \quad (170)$$

$$K_{HL} = \sqrt[6]{\frac{10^7}{N_{\min}}} = \text{const} \quad \text{при } N \leq N_{\min}. \quad (171)$$

Поправочные коэффициенты в формуле (165) имеют в среднем следующие значения: коэффициент, учитывающий шероховатость поверхностей зубьев, $Z_R \approx 0,95$; коэффициент, учитывающий окружную скорость, $Z_v \approx 1,1$; коэффициент, учитывающий влияние смазки, $K_L \approx 1$; коэффициент, учитывающий размер зубчатого колеса $K_{xH} = 1$ при $d_w \leq 700$ мм и $K_{xH} = 0,9$ при $d_w = 2500$ мм.

Для стальных зубьев, подвергаемых чистому шлифованию или швейнгованию, σ_{HP} следует увеличить на 10—15%, а в случае притирки зубьев каждого зубчатого

6. К расчету коэффициента K_{HL}

Материал зубьев	Твердость поверхности зубьев		Базовое число циклов $N_0 \cdot 10^{-6}$	$N_{\min} \times 10^{-6}$
	HB	HRC		
Сталь	200	—	10	0,032
	250	—	17	0,055
	300	—	25	0,090
	350	—	36	0,116
	—	40	44	1,29
	—	50	84	2,45
—	—	56	120	3,50
Чугун	Любая	—	∞	0,032

колеса в отдельности с применением специальных приспособлений и паст — на 25%.

Для внеполюсного контакта зубьев допускаемое напряжение повышают в μ раз, т. е.

$$\sigma_{HP}^{(5)} = \mu \sigma_{HP}, \quad (172)$$

где $\mu = 1,4$ в точках U и $\mu = 1,7$ в точках P .

При кратковременных перегрузках поверхность зуба проверяют на контактную прочность: зубья колес без специальной поверхностной химико-термической обработки — на отсутствие пластической деформации по допускаемому напряжению $\sigma_{HP} = 2,8\sigma_s$; зубья цементованные и поверхность закаленные — на запас по круп-

кому разрушению по допускаемому напряжению $\sigma_{HP} = 4 HRC$.

В передачах, в которых работают обе поверхности, каждую сторону зуба рассчитывают самостоятельно.

Повысить сопротивляемость поверхности зуба выкрашиванию можно увеличением межосевого расстояния, увеличением угла α_w , введением смещения, повышением вязкости смазки, уменьшением шероховатости поверхности зуба, применением материалов с повышенной твердостью поверхностного слоя.

Во время работы зубья нагреваются тем сильнее, чем выше удельное давление, скорость скольжения и коэффициент трения. При нагреве вязкость смазки уменьшается, трение усиливается и при определенных условиях может наступить заедание.

Уменьшить опасность заедания можно уменьшением нагрузки в зоне, где велико скольжение (используя, например, модификацию); уменьшением скольжения (применяя зубья с меньшим модулем в пределах, допускаемых прочностью зуба на изгиб); применением противозадирной смазки.

РАБОТА ПЕРЕДАЧИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ

Многие передачи эксплуатируют на различных режимах, отличающихся передаваемой мощностью, частотой вращения, продолжительностью, иногда направлением движения.

При приведении всех режимов к наиболее напряженному с действующим напряжением σ эквивалентное число циклов N_E при степенной зависимости между напряже-

ниями и числом циклов до разрушения согласно формуле (10) гл. 2

$$N_E = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i}{\sigma} \right)^m N_i, \quad (173)$$

где σ_i , N_i — напряжение и число циклов на i -м режиме; n — общее число режимов работы.

Относя N_i к общему числу циклов на всех режимах работы $N_\Sigma = \sum_{i=1}^n N_i$, получим

$$N_E = N_\Sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i}{\sigma} \right)^m \frac{N_i}{N_\Sigma}. \quad (174)$$

При расчете на выносливость при изгибе зубьев с нешлифованной переходной поверхностью с твердостью $HB > 350$ величина $m = 9$; в остальных случаях изгиба зубьев и при расчете на контактную выносливость $m = 6$.

Эквивалентное число циклов следует определять с учетом полных действующих напряжений на каждом режиме, т. е. с учетом коэффициентов, входящих в формулы (31)—(33), и их изменения по режимам. Так как номинальные напряжения изгиба σ_{F0} пропорциональны крутящему моменту T_1 , а номинальные контактные напряжения σ_{H0} пропорциональны $\sqrt{T_1}$, формулу (174) можно представить в виде: при расчете на контактную выносливость

$$N_{HE} = N_\Sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{1i} K_i}{T_1 K} \right)^3 \frac{N_i}{N_\Sigma}; \quad (175)$$

при расчете на выносливость при изгибе

$$N_{FE} = N_\Sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{1i} K_i}{T_1 K} \right)^{m_F} \frac{N_i}{N_\Sigma}, \quad (176)$$

где, как указано выше, m_F равно 6 или 9.

Так как наибольшее изменение по режимам подвержен коэффициент динамической нагрузки K_d , то

$$\frac{T_{1i} K_i}{T_1 K} \approx \frac{T_{1i} K_{di}}{T_1 K_d} = \frac{T_{1i} (1 + v_i)}{T_1 (1 + v)}, \quad (177)$$

где $v = K_v - 1$; $K_{di} \approx K_d$.

При постоянных частотах вращения сила удара $\omega_v = \omega_0 K_\alpha v$ практически не зависит от статической нагрузки, что позволяет считать $T_{1i} v_i \approx T_1 v$ и использовать в расчетах значение v для одного режима, считая, как это принято в рекомендациях к ГОСТ 21354—75,

$$\frac{T_{1i} K_i}{T_1 K} \approx \frac{T_{1i} + v T_1}{T_1 (1 + v)}. \quad (178)$$

Режимы, для которых число циклов N_i больше базовых чисел N_0 , указанных на с. 224 и 218, при суммировании по формулам (175)—(176) не учитываются. При суммировании не учитываются также режимы с высокими, но кратковременными нагрузками, так как опыт показывает, что такие нагрузки в сочетании с более низкими, но длительно действующими, не снижают долговечности зубчатых передач, если они удовлетворяют условиям статической прочности. Число циклов на указанных режимах должно быть меньше N_{\min} приведенных выше.

По эквивалентному числу циклов N_{HE} и N_{FE} определяют коэффициенты долговечности K_{HL} и K_{HF} и затем проверяют условия выносливости по формулам (141) и (164). Для режима, наиболее напряженного из всех режимов «неограниченной» длительности (при $N_i > N_0$) необходимо проверить, чтобы величина коэффициента безопасности S также была не ниже допустимого.

Характер работы передачи оказывает некоторое влияние на уровень напряжений на каждом режиме из-за изменения процесса приработки, что иногда учитывают в расчете. Предполагают, что степень приработки зубьев на i -м режиме пропорциональна номинальной нагрузке ω_{0i} и числу циклов нагружения N_i . Если считать, что при работе на максимальном режиме $\omega_{0\max}$ в течение всего ресурса N_Σ коэффициент приработки K_w имеет значение, соответствующее рис. 14, то относительная приработка на i -м режиме

$$\eta_i = \frac{\omega_{0i} N_i}{\omega_{0\max} N_\Sigma}, \quad (179)$$

относительная приработка за весь ресурс

$$\eta_\Sigma = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_{0i} N_i}{\omega_{0\max} N_\Sigma}. \quad (180)$$

Очевидно, что $\eta_i \leq \eta_\Sigma \leq 1$.

Коэффициент неравномерности распределения нагрузки на i -м режиме

$$K_{\beta i} = 1 + (K_\beta^0 - 1) [1 - \eta_i (1 - K_w)]. \quad (181)$$

При работе на одном постоянном режиме $\eta_i = 1$, и формулы (181) и (61) совпадают. Для очень кратковременных режимов $\eta_i = 0$ и $K_{\beta i} \approx K_\beta^0$.

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПЕРЕДАЧ С КОСЫМИ, ШЕВРОННЫМИ, КОНИЧЕСКИМИ ЗУБЬЯМИ И ПЕРЕДАЧ М. Л. НОВИКОВА

Для приближенного расчета указанных передач используют те же методы и структурные формулы (24)—(29), что и для прямозубых передач, внося определенные изменения в выражения для сил и коэффициентов K , Z и Y .

Косозубые и шевронные передачи

При расчете зубьев с углом наклона $\beta \neq 0$ на контактную выносливость отнесенная к наименьшей суммарной длине контактных линий

$$l_{\min} = K_\varepsilon \frac{b_w \varepsilon_\alpha}{\cos \beta_b}, \quad (182)$$

удельная окружная сила

$$\omega_i = \omega_{Ht} \frac{\cos \beta_b}{K_\varepsilon \varepsilon_\alpha} = \frac{2000 T_1 \cos \beta_b}{b_w d_{w1} K_\varepsilon \varepsilon_\alpha} K, \quad (183)$$

где ω_{Ht} — расчетная окружная сила, определяемая по формуле (25); $b_w = b - b_k$ — рабочая ширина венца (за вычетом ширины канавки b_k между полушевронами); β_b — основной угол наклона зубьев ($\sin \beta_b = \sin \beta \cos \alpha$); $K_\varepsilon \approx 0,95$ — коэффициент среднего уменьшения суммарной длины контактных линий в процессе зацепления, зависящий от коэффициентов осевого ε_β и торцового ε_α перекрытий.

Приведенный радиус кривизны

$$\rho_{пр} = \frac{u d_{wi}}{2(u+1)} \frac{\sin \alpha_{tw}}{\cos \beta_b}, \quad (184)$$

нормальная сила

$$\omega_\alpha = \frac{\omega_i}{\cos \alpha_{tw} \cos \beta_b}. \quad (185)$$

Введя соотношения (183)—(185) в формулу (158), приходим к основному выражению (24) для расчетного контактного напряжения $\sigma_{H'}$, в котором

$$\left. \begin{aligned} Z_H &= \sqrt{\frac{2 \cos \beta_b}{\sin 2\alpha_{tw}}}; \\ Z_E &= \frac{1}{\sqrt{K_\varepsilon \varepsilon_\alpha}}; \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Z_M определяется формулой (161).

Влияние неточности передачи на неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий дополнительно учитывается коэффициентом $K_{Ha} = 1,05 + 1,1$ при степени точности зубьев колес от 6 до 9. При определении коэффициента $K_{H\beta}$ учитывают повышенную жесткость косозубой передачи, принимая $c \approx 2000$ кгс/мм² при $8^\circ \leq \beta \leq 20^\circ$ и $c \approx 1500$ кгс/мм² при $\beta > 20^\circ$. При расчете силы удара по формуле (113) принимают $\delta_H \approx 0,003$, а по формуле (117) $\eta \approx 0,2$.

При расчете на выносливость при изгибе коэффициент формы Y_F определяют в зависимости от эквивалентного числа зубьев

$$z_v = \frac{z}{\cos^3 \beta}; \quad (187)$$

принимают $Y_\varepsilon = 1$; $Y_\beta = 1 - \frac{\beta}{140}$, где β в градусах;

$$K_{F\alpha} = \frac{1}{\varepsilon_\alpha} + \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{\varepsilon_\alpha} \frac{n - 5}{4}, \quad (188)$$

здесь n — степень точности по нормам контакта (при $5 \leq n \leq 9$); при вычислении коэффициента $K_{F\alpha}$ принимают $\delta_F = 0,006$.

Конические передачи

При расчете прямозубых конических передач их заменяют условно эквивалентными прямозубыми цилиндрическими колесами (рис. 33), при этом модуль зацепления

$$m_s = m \left(1 - 0,5 \frac{b_w}{L} \right); \quad (189)$$

диаметры колес

$$d_{wi(2)z} = \frac{d_{wi(2)}}{\cos \lambda_{1(2)}} \left(1 - 0,5 \frac{b_w}{L} \right); \quad (190)$$

число зубьев

$$z_{i(2)z} = \frac{z_{i(2)}}{\cos \lambda_{1(2)}}; \quad (191)$$

передаточное число

$$u_s = u \frac{\cos \lambda_{1z}}{\cos \lambda_2}; \quad (192)$$

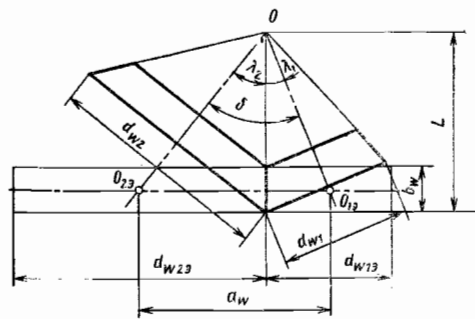


Рис. 33. К расчету конических зубчатых колес

межосевое расстояние

$$a_w = L \left(1 - 0,5 \frac{b_w}{L} \right) (\operatorname{tg} \lambda_1 + \operatorname{tg} \lambda_2); \quad (193)$$

окружная скорость

$$v_3 = v \left(1 - 0,5 \frac{b_w}{L} \right); \quad (194)$$

ширина зуба

$$b_{w1} = b_w. \quad (195)$$

Углы λ_1 и λ_2 начальных конусов зависят от передаточного числа $u = z_2/z_1$ и угла $\delta = \lambda_1 + \lambda_2$ между осями конических колес:

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{\sin \delta}{1 + \cos \delta}; \quad \operatorname{tg} \lambda_2 = \frac{u \sin \delta}{1 + u \cos \delta}. \quad (196)$$

Номинальная удельная нагрузка (в кгс/мм)

$$w_\alpha = \frac{1000 T_1 \sqrt{1 + 2u \cos \delta + u^2}}{L \left(1 - 0,5 \frac{b_w}{L} \right) b_w \cos \alpha_w \sin \delta}. \quad (197)$$

Контактные напряжения для стальных зубьев при $\alpha_0 = 20^\circ$ (в кгс/мм²)

$$\sigma_H = 105 \sqrt{\frac{w_\alpha}{L \left(1 - 0,5 \frac{b_w}{L} \right)} \frac{1 + 2u \cos \delta + u^2}{u \sin \delta}}. \quad (198)$$

Конические колеса с косыми зубьями условно заменяют эквивалентными цилиндрическими косозубыми колесами.

Передача М. Л. Новикова

Схема передачи с одной линией зацепления («заполюсной») показана на рис. 34. Рабочая часть профиля ведущего зуба 1 в торцовом или нормальном сечении очерчена по дуге радиуса ρ_{1a} с центром в точке L_a на расстоянии s от оси зуба; ведомый зуб 2 имеет вогнутый профиль с радиусом кривизны $\rho_{2f} > \rho_{1a}$. Обычно принимают $\rho_{1a} \approx 1,5m$ и $\rho_{2f} \approx 1,1 \frac{1}{1} a$. В мягких зубьях после приработки значения радиусов ρ_{1a} и ρ_{2f} сближаются, так что в работе зубья контактируют почти по всей длине дуги BC . Линия зацепления проходит через точку A параллельно осям колес, ее проекция на торцовую поверхность — точка (точечное зацепление), так что для обеспечения непрерывного контакта зубьев их профили равномерно смещаются по длине зуба, образуя винтовую поверхность с углом наклона зубьев к оси β (рис. 35). Обычно $\beta = 10 \div 30^\circ$.

Применяют также передачи с двумя линиями зацепления («дзопольные»), когда ведущий зуб контактирует с ведомым вначале своей вогнутой поверхностью ножи (до полюса), а затем — выпуклой (за полюсом). При этом в зацеплении могут находиться от двух до четырех зубьев.

Действующая на зуб нормальная сила F_α связана с окружной силой F_t соотношением

$$F_\alpha = \frac{F_t}{\cos \alpha_{tw}} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha_{tw} \operatorname{tg}^2 \beta}. \quad (199)$$

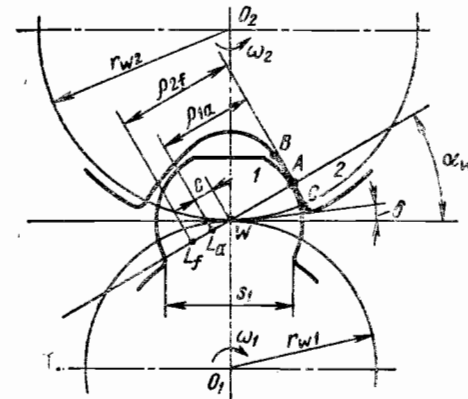


Рис. 34. Схема передачи М. Л. Новикова

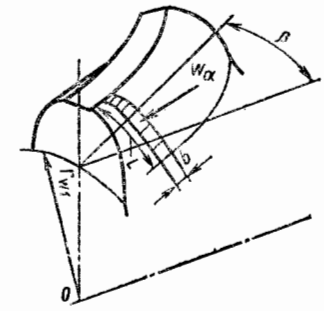


Рис. 35. К расчету зубьев кругового профиля

Контактные напряжения. Считая, что для приработавшихся зубьев контактная площадка имеет форму прямоугольника длиной L и шириной b (см. рис. 35), максимальные контактные напряжения можно приблизительно рассчитать по формуле

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_\alpha E}{L \rho_{пр}}}, \quad (200)$$

где

$$L = BC = 2\rho_{1a} (\alpha_{tw} - \delta), \quad (201)$$

причем технологический угол $\delta = 5 \div 7^\circ$; рабочий угол $2(\alpha_{tw} - \delta) = 30 \div 40^\circ$. Приведенный радиус кривизны

$$\rho_{пр} = \frac{r_{w1} u}{u + 1} \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha_{tw} \operatorname{tg}^2 \beta}}{\sin \alpha_{tw} \sin^2 \beta}. \quad (202)$$

Величина произведения $L \rho_{пр}$ для передачи Новикова в несколько раз больше, чем для аналогичной эвольвентной передачи, чем и объясняется ее повышенная сопротивляемость выкрашиванию.

Расчет на изгиб. Упрощенную формулу для напряжений изгиба можно получить, рассматривая зуб как консольную балку, к которой в точке A приложена сила F_α . Тогда

$$\sigma_u = \frac{6F_\alpha h}{b_w s_1^2} \varphi, \quad (203)$$

где h — плечо силы; s_1 — ширина опасного сечения; b_w — ширина рабочей части зубчатого венца; φ — поправочный коэффициент, учитывающий, что напряжения в зубе распределяются неравномерно по всей длине, а концентрируются на участке, непосредственно примыкающем к площадке контакта; $\varphi \approx 2,0$.

Уточненные методы расчета передач с круговыми зубьями изложены в работе [4].

ШАРИКОВИНТОВЫЕ ПЕРЕДАЧИ

В последние годы в машиностроении и приборостроении получили применение шариковинтовые передачи, преобразующие с высоким коэффициентом полезного действия вращательное движение в поступательное и наоборот.

Основные достоинства передач: высокий КПД ($\eta \approx 0,9$)*; высокая равномерность движения, малое трение покоя; возможность полного устранения зазора в резьбе и создания натяга, обеспечивающего высокую осевую жесткость.

КОНСТРУКЦИИ ПЕРЕДАЧ И МАТЕРИАЛЫ

Типичная конструкция передачи показана на рис. 1. Основные профили резьбы винта и гайки (в нормальном сечении винтовых канавок), применяемые в настоящее время в механизмах, даны на рис. 2.

Наиболее распространен полукруглый профиль (рис. 2, а). Радиус профиля резьбы r_2 выполняют несколько большим радиуса шарика r_1 , обычно $r_1 = (0,94 \div 0,97)r_2$. При больших значениях r_2 снижаются контактные напряжения, но существенно повышаются потери на трение из-за различия скоростей на площадках контакта.

Если передачу с полукруглым профилем резьбы винта и гайки изготовить без зазора, то угол контакта α_k в ненагруженной передаче будет равен нулю, а под нагрузкой несколько возрастет благодаря контактной деформации. Несущая способность и КПД передач с малым углом контакта невысокие. На практике значительное распространение получили передачи с $\alpha_k = 45^\circ$ благодаря высокой технологичности (возможно изготовление резьбы винта шлифованием без предварительного нарезания).

Применяют также стрелчатый или оживальный профиль резьбы (рис. 2, б, в), который позволяет осуществить передачу без зазора или с натягом за счет применения шариков диаметром, несколько большим номинального. В передаче с полукруглым профилем резьбы для выбора зазора или создания натяга следует применять вторую гайку.

Прямоугольный (рис. 2, г) и трапецидальный (рис. 2, д) профили наиболее просты в изготовлении. Однако их применение ограничено низкой нагрузочной способностью из-за высоких контактных напряжений. Обычно такие профили применяют

* В простой передаче винт-гайка $\eta = 0,2 \div 0,4$.

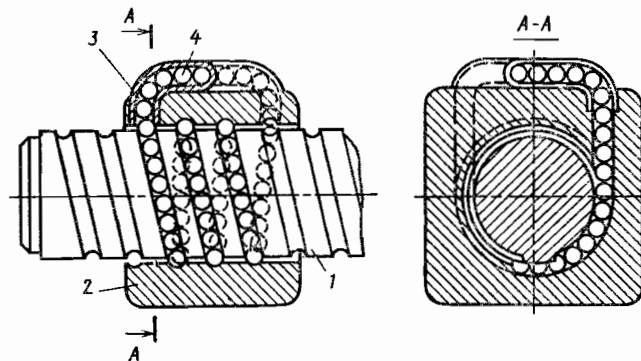


Рис. 1. Схема шариковинтовой передачи:
1 — ходовой винт; 2 — гайка; 3 — перепускной канал; 4 — шарики

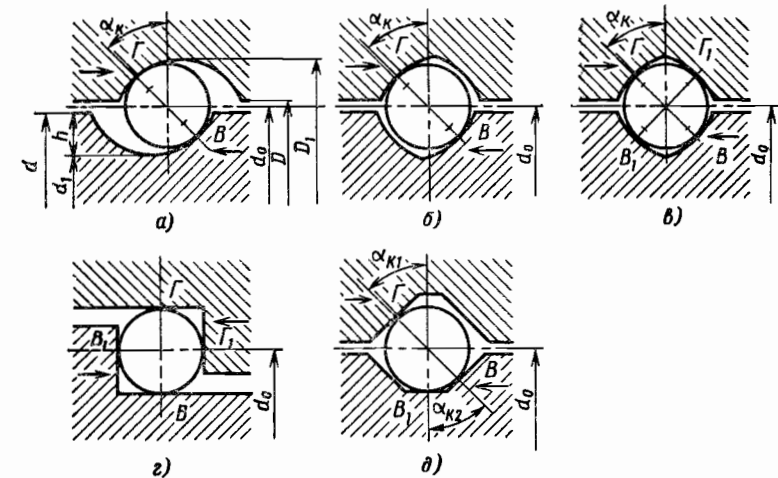


Рис. 2. Основные профили винта и гайки (в нормальном сечении винтовых канавок):
В, Г — точки контакта шарика; α_k — угол контакта

в передачах при малой осевой нагрузке и невысоких требованиях к осевой податливости.

Винты изготовляют из сталей ХВГ, 38ХМЮА, 7ХГ2ВМ, 8ХВ, 20Х3ВМФ и др., а гайки — из сталей ХВГ, 9ХС, ШХ15, ШХ6 и др. Рабочие поверхности закаляют до твердости HRC 60 и выше.

Шарики изготовляют из сталей ШХ6 и ШХ15.

Детали шариковинтовых передач обычно изготовляют с высокой точностью и высоким качеством поверхности. Параметр шероховатости поверхности резьбы $Ra = 0,32 \div 0,63$ мкм; отклонения диаметров, соответствующих точкам касания на винте и в гайке, не превышает 5—8 мкм на длине 1 м для винта и 3—5 мкм на длине гайки. Наибольшие накопленные ошибки шага резьбы винта не должны превышать ± 3 мкм в пределах одного шага, а наибольшая накопленная ошибка шага резьбы гайки на всей ее длине — не более 5—8 мкм. Разномерность шариков обычно назначают 1—2 мкм. Меньшие из указанных допусков применяют для передач с $d_0 = 20 \div 50$ мм, а большие — для передач с $d_0 = 60 \div 100$ мм.

Передачи смазывают пластичной или жидкой смазкой. Присутствие в смазке графита недопустимо.

РАСЧЕТ ПЕРЕДАЧ

Для расчета грузоподъемности и долговечности шариковинтовой передачи необходимо знать максимальное усилие, действующее на шарик. Это усилие можно найти, рассмотрев распределение нагрузки в передаче. В предварительных приближенных расчетах принимается равномерное распределение нагрузки.

Основные геометрические параметры профиля резьбы даны на рис. 3.

Общее решение. Уравнение совместности перемещений имеет вид (см. гл. 3)

$$\Delta_1 + \Delta_2 = [\delta_1(z) + \delta_2(z)] - [\delta_1(0) + \delta_2(0)], \quad (1)$$

где Δ_1, Δ_2 — удлинение и укорочение участков винта и гайки от 0 до z (рис. 4); $\delta_1(z) + \delta_2(z)$ — сумма прогибов витков винта и гайки, а также контактной деформации в сечении z (в осевом направлении); $\delta_1(0) + \delta_2(0)$ — то же, в сечении 0 (индекс 1 соответствует винту, 2 — гайке).

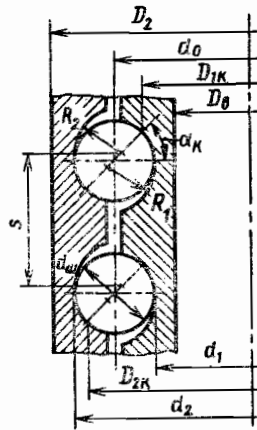


Рис. 3. Основные геометрические параметры резьбы

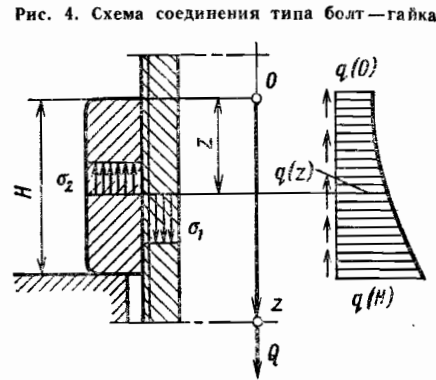


Рис. 4. Схема соединения типа болт-гайка

Перемещения Δ_1 и Δ_2 определяются по формулам

$$\Delta_1 = \int_0^z \frac{\sigma_1}{E_1} dz; \quad \Delta_2 = \int_0^z \frac{\sigma_2}{E_2} dz, \quad (2)$$

а перемещения δ_i ($i = 1, 2$) можно представить в виде

$$\delta_i = \left[\lambda_i^* \frac{p_i}{E_i} + \theta_i \sqrt[3]{\frac{S_{iш}^2}{d_{ш}} \left(\frac{p_i}{E_i} \right)^2} \right] \cos \psi_i, \quad (3)$$

где p_i — усилие на единицу длины линии контакта боковой поверхности витков; λ_i^* и θ_i — безразмерные коэффициенты; $d_{ш}$ — диаметр шарика; $S_{iш}$ — шаг (расстояние между двумя шариками вдоль контактной линии); ψ_i — угол подъема винтовой контактной линии (при расчете на прочность можно считать $\cos \psi = 1$).

Интенсивность распределения осевых сил по высоте резьбы $q(z)$ и усилия на единицу длины контактных линий связаны соотношением

$$p_i \pi D_{iK} \sin \alpha_K \cos \psi_i = qS, \quad (4)$$

где S — шаг резьбы; D_{iK} — диаметр цилиндрической поверхности, на которой расположена линия контакта; α_K — угол между направлением действия контактного усилия и плоскостью, перпендикулярной к оси резьбы.

Принято, что контактное усилие направлено нормально к поверхности контакта. Из условия равновесия шарика вытекает, что направление нормали должно быть общим для точек контакта на витках винта и гайки. Учитывая, что

$$\sigma_i = \frac{Q(z)}{F_i} = \frac{1}{F_i} \int_0^z q(z_1) dz_1, \quad (5)$$

где F_i — площадь поперечного сечения винта или гайки, и используя зависимости (1), (3), (4), уравнение совместности деформаций запишем в виде

$$\beta \int_0^z \int_0^{z_1} q(z_2) dz_2 dz_1 = \gamma q + \gamma_K q^{\frac{2}{3}} - C, \quad (6)$$

где

$$\beta = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{E_i F_i}; \quad (7)$$

$$\gamma = \frac{S}{\pi \sin \alpha_K} \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i^*}{D_{iK} E_i}; \quad (8)$$

$$\gamma_K = \left(\frac{S}{\pi \sin \alpha_K} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{d_{ш}^{\frac{2}{3}}} \sum_{i=1}^2 \theta_i \left(\frac{S_{iш}}{D_{iK}} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{E_i^{\frac{2}{3}}} \cos^{\frac{1}{3}} \psi_i. \quad (9)$$

Постоянная $C = \gamma q(0) + \gamma_K q^{\frac{2}{3}}(0)$ в уравнении (6) может быть определена из условия

$$\int_0^H q(z) dz = Q, \quad (10)$$

где Q — осевое усилие, действующее на соединение; H — длина свинчивания. Тогда

$$C = \frac{1}{H} \left[\gamma Q + \gamma_K \int_0^H q^{\frac{2}{3}}(z) dz - \beta \int_0^H \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} q(z_2) dz_2 dz_1 dz \right]. \quad (11)$$

Внося выражение (11) в уравнение (6), запишем последнее в виде интегрального уравнения

$$\Psi(q) = K(q) + q_{cp}, \quad (12)$$

где

$$\Psi(q) = \gamma + \frac{\gamma_K}{\gamma} q^{\frac{2}{3}}, \quad (13)$$

$$K(q) = \frac{\beta}{\gamma} \left[\int_0^z \int_0^{z_1} q(z_2) dz_2 dz_1 - \frac{1}{H} \int_0^H \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} q(z_2) dz_2 dz_1 dz \right] + \frac{\gamma_K}{\gamma} \frac{1}{H} \int_0^H q^{\frac{2}{3}}(z) dz; \quad (14)$$

$$q_{cp} = \frac{Q}{H}. \quad (15)$$

Разберем случай соединения типа стяжки (рис. 5). В этом случае уравнение (6) принимает вид

$$\beta \int_0^z \int_0^{z_1} q(z_2) dz_2 dz_1 - \frac{Qz}{E_2 F_2} = \gamma q + \gamma_K q^{\frac{2}{3}} - C. \quad (16)$$

Используя условие (10) для определения C , получим уравнение

$$\Psi(q) = K(q) + q_0. \quad (17)$$

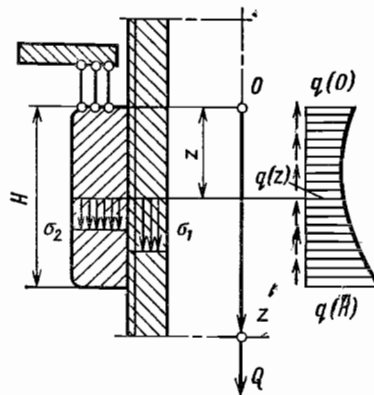


Рис. 5. Схема соединения типа стяжки

в котором

$$q_0 = q_{cp} + \frac{Q}{\gamma E_2 F_2} \left(\frac{H}{2} - z \right). \quad (18)$$

Величины $\Psi(q)$ и $K(q)$ определяются по (13) и (14). Отметим, что при $E_2 F_2 \rightarrow \infty$ распределение нагрузки в соединениях типа болт — гайка и типа стяжки не отличаются.

Если $\beta = 0$, то уравнение (12) имеет очевидное элементарное решение

$$q = q_{cp} = \frac{Q}{H},$$

т. е., если болт и гайка не испытывают деформаций растяжения или сжатия, то нагрузка по виткам распределяется равномерно. В общем случае уравнение (12) может быть решено методом последовательных приближений по схеме

$$\Psi(q_{i+1}) = K(q_i) + q_{cp}, \quad (19)$$

где q_i, q_{i+1} — исходное и последующее приближения для искомой функции $q(z)$. Принимаем первое приближение

$$q_{(1)} = q_{cp} = \frac{Q}{H},$$

тогда для второго приближения

$$\Psi(q_{(2)}) = K(q_{cp}) + q_{cp} = \frac{\beta}{2\gamma} \left(z^2 - \frac{1}{3} H^2 \right) q_{cp} + \frac{\gamma_k}{\gamma} q_{cp}^{\frac{2}{3}} + q_{cp}, \quad (20)$$

Обозначая через f_2 правую часть равенства (20), получаем

$$q_{(2)} + \frac{\gamma_k}{\gamma} q_{(2)}^{\frac{2}{3}} = f_2.$$

Это уравнение легко сводится к кубическому, но в практических расчетах его действительный корень более удобно отыскать по методу Ньютона.

Предположим, опуская для простоты индекс 2, что

$$F(q) = q + \frac{\gamma_k}{\gamma} q^{\frac{2}{3}} - f = 0.$$

Разлагая функцию $F(q)$ вблизи некоторой точки q_* , близкой к предполагаемому значению корня, и сохраняя только первые члены разложения, найдем

$$F(q) = F(q_*) + \frac{dF}{dq}(q_*) (q - q_*) = 0,$$

откуда

$$q = q_* - \frac{F(q_*)}{\frac{dF}{dq}(q_*)} = q_* - \frac{q_* + \frac{\gamma_k}{\gamma} q_*^{\frac{2}{3}} - f}{1 + \frac{2}{3} \frac{\gamma_k}{\gamma} \frac{1}{q_*^{\frac{1}{3}}}}. \quad (21)$$

Величину q_* можно принять в виде

$$q_* = \frac{f}{1 + \frac{\gamma_k}{\gamma}}.$$

Формула (21) обычно дает достаточно точное решение, при необходимости подобным образом уточняют значение корня. Определив значения $q_{(2)}(z)$ можно найти следующее приближение $q_{(3)}(z)$. При вычислении $K(q_{(2)})$ по формуле (14) целесообразно использовать численное интегрирование по правилу трапеций. Расчет заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений.

В большинстве практических задач достаточно ограничиться вторым приближением. Подобным образом можно решить уравнение (17), заменив q_{cp} на q_0 .

Приближенное решение. Если величина q не очень мала, приближенно можно считать

$$q^{\frac{2}{3}} = a + bq, \quad (22)$$

где a и b — постоянные коэффициенты.

Уравнение (12) с учетом равенства (22) приведем к виду

$$q = \frac{\beta}{\gamma + \gamma_k b} \left[\int_0^z \int_0^{z_1} q(z_2) dz_2 dz_1 - \frac{1}{H} \int_0^H \int_0^{z_1} q(z_2) dz_2 dz_1 \right] + q_{cp}, \quad (23)$$

Отметим, что величина a в формуле (22) не оказывает влияния на распределение нагрузки. Если выбрать коэффициент b таким, что аппроксимирующая прямая становится касательной при $q = q_{cp}$, то

$$b = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{q_{cp}}}.$$

Дифференцируя уравнение (23) дважды по z , находим

$$\frac{d^2 q}{dz^2} - m^2 q(z) = 0, \quad (24)$$

где

$$m^2 = \frac{\beta}{\gamma + \gamma_k b} = \frac{\beta}{\gamma + \frac{2}{3} \frac{\gamma_k}{\sqrt[3]{q_{cp}}}}.$$

Из уравнения (24) с учетом известных граничных условий для соединения типа болт — гайка получаем закон распределения нагрузки в обычной резьбе:

$$q(z) = \frac{Qm}{shmH} \operatorname{chmz},$$

где m — параметр, зависящий от контактной деформации.

Для расчета необходимо знать упруго-геометрические параметры β , γ и γ_k . Параметр β определяется по формуле (7). Выведем соотношения для определения величин λ_i^* и θ_i необходимых для вычисления γ и γ_k .

Представим общую податливость витка винта и гайки в виде

$$\delta_i = \delta_i^{(1)} + \delta_i^{(2)} + \delta_i^{(3)} + \delta_i^{(k)} \quad (i = 1, 2),$$

где $\delta_i^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) — податливость витка в результате деформаций изгиба, сдвига и радиального смещения основания; $\delta_i^{(k)}$ — контактная податливость. Первые два слагаемых обычно малы и в расчетах ими можно пренебречь.

Податливость витков винта в осевом направлении в результате радиального смещения основания

$$\delta_1^{(3)} = u_1 \operatorname{ctg} \alpha_k \cos \psi_1 = \frac{p_1 \cos \alpha_k \operatorname{ctg} \alpha_k d_1 \cos \psi_1}{2SE_1} \left(\frac{d_1^2 + D_B^2}{d_1^2 - D_B^2} - \nu_1 \right),$$

податливость витков гайки

$$\delta_2^{(3)} = u_2 \operatorname{ctg} \alpha_k \cos \psi_2 = \frac{p_2 \cos \alpha_k \operatorname{ctg} \alpha_k d_2 \cos \psi_2}{2SE_2} \left(\frac{d_2^2 + D_B^2}{D_2^2 - d_2^2} + \nu_2 \right),$$

где u_1, u_2 — радиальные смещения основания витка винта и гайки; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона материала винта и гайки.

В соответствии с равенством (3)

$$\delta_i^{(3)} = \lambda_i^* \frac{p_i}{E_i} \cos \psi_i, \quad (25)$$

что позволяет определить значение λ_i^* .

Перемещение в результате контактной деформации (в осевом направлении) можно представить в виде

$$\delta_i^{(k)} = K_{i\delta} \sin \alpha_k \cos \psi \sqrt[3]{\left(\frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_{ш}^2}{E_{ш}} \right)^2 \sum \rho_i P_{ш}^3}, \quad (26)$$

где $\sum \rho_i = \frac{2}{r_{ш}} - \frac{1}{R_i} = \frac{4R_i - d_{ш}}{R_i d_{ш}}$ — сумма главных кривизн (приближенно рассматривается контакт шарика и цилиндрического желоба); $P_{ш} = p_i S_{iш}$ — усилие на шарик; $E_{ш}$ — модуль упругости материала шарика; $K_{i\delta}$ — безразмерный коэффициент, зависящий от параметра

$$\xi = \frac{d_{ш}}{4R_i - d_{ш}}. \quad (27)$$

Сопоставляя формулы (3) и (26), находим

$$\theta_i = K_{i\delta} \sin \alpha_k \sqrt[3]{\left[(1 - \nu_i^2) + \frac{E_i}{E_{ш}} (1 - \nu_{ш}^2) \right] \left(\frac{4R_i - d_{ш}}{R_i} \right)}.$$

Максимальное контактное напряжение

$$\sigma_{i \max} = K_{i\sigma} \sqrt[3]{\left[\frac{\sum \rho_i}{(1 - \nu_i^2) + \frac{E_i}{E_{ш}} (1 - \nu_{ш}^2)} \right]^2 P_{ш}} \quad (i = 1, 2), \quad (28)$$

где $K_{i\sigma}$ — безразмерный коэффициент, зависящий от параметра ξ . Значения коэффициентов $K_{i\delta}$ и $K_{i\sigma}$ даны в табл. 1.

1. Значения коэффициентов $K_{i\delta}, K_{i\sigma}$

ξ	$K_{i\delta}$	$K_{i\sigma}$	ξ	$K_{i\delta}$	$K_{i\sigma}$	ξ	$K_{i\delta}$	$K_{i\sigma}$
0,7385	0,5478	0,3070	0,8165	0,5094	0,2873	0,9042	0,4411	0,2537
0,7470	0,5442	0,3051	0,8273	0,5029	0,2841	0,9149	0,4291	0,2477
0,7538	0,5413	0,3036	0,8355	0,4976	0,2814	0,9225	0,4199	0,2434
0,7627	0,5374	0,3016	0,8439	0,4919	0,2786	0,9344	0,4039	0,2356
0,7696	0,5341	0,2999	0,8259	0,4859	0,2756	0,9425	0,3912	0,2295
0,7767	0,5308	0,2981	0,8617	0,4793	0,2722	0,9510	0,3762	0,2224
0,7862	0,5260	0,2958	0,8679	0,4745	0,2699	0,9502	0,3578	0,2137
0,7936	0,5222	0,2938	0,8774	0,4667	0,2660	0,9697	0,3339	0,2024
0,8012	0,5181	0,2918	0,8871	0,4582	0,2618	0,9804	0,2997	0,1863
0,8088	0,5139	0,2897	0,8972	0,4483	0,2571	0,9924	0,2345	0,1555

Пример. Определим распределение нагрузки по виткам передач типа болт — гайка и типа стяжки. Дано $d_0 = 100$ мм; $S = 12$ мм; $d_{ш} = 7$ мм; $R = 3,64$ мм; $D_{1к} = 95,05$ мм; $D_{2к} = 104,95$ мм; $\alpha_k = 45^\circ$; $D_B = 70$ мм; $D_2 = 130$ мм; $H = 72$ мм; $Q = 7200$ кгс. Материал винта, гайки и шариков сталь ШХ6 ($E = 2,1 \cdot 10^4$ кгс/мм²; $\nu = 0,3$). Твердость контактирующих поверхностей $HRC 60$.

Для определения упруго-геометрических параметров передачи предварительно находим внутренние диаметры резьбы винта и гайки (см. рис. 3):

$$d_1 = d_0 - 2 \left[R - \left(R - \frac{d_{ш}}{2} \right) \right] \cos \alpha_k = 9,29 \text{ см};$$

$$d_2 = d_0 + 2 \left[R - \left(R - \frac{d_{ш}}{2} \right) \right] \cos \alpha_k = 10,71 \text{ см}.$$

Площади поперечных сечений $F_1 = 29,32$ см²; $F_2 = 42,67$ см². Параметр $\xi_1 = \xi_2 = 0,9259$. По табл. 1 находим $K_{1\delta} = K_{2\delta} = 0,4153$; $K_{1\sigma} = K_{2\sigma} = 0,2412$. Далее вычисляем $\beta = 0,027 \cdot 10^{-6}$ 1/кгс; $\lambda_1^* = 9,37$; $\lambda_2^* = 17,68$; $\gamma = 0,687 \cdot 10^{-6}$ см²/кгс; $\theta_1 = \theta_2 = 0,55$; $\gamma_k = 8,62 \cdot 10^{-6}$ см^{5/3}/кгс^{-2/3}.

Для соединения типа болт — гайка получаем уравнение

$$q + 12,56q^{\frac{2}{3}} = 0,04 \int_0^z \int_0^{z_1} q(z_2) dz_2 dz_1 - 0,14 \int_0^z \int_0^0 \int_0^0 q(z_2) dz_2 dz_1 dz + 1,74 \int_0^z q^{\frac{2}{3}}(z) dz + 1000.$$

Для соединения типа стяжки

$$q + 12,56q^{\frac{2}{3}} = 0,04 \int_0^z \int_0^{z_1} q(z_2) dz_2 dz_1 - 0,14 \int_0^z \int_0^0 \int_0^0 q(z_2) dz_2 dz_1 dz + 1,74 \int_0^z q^{\frac{2}{3}}(z) dz + 116,96(3,6 - z) + 1000.$$

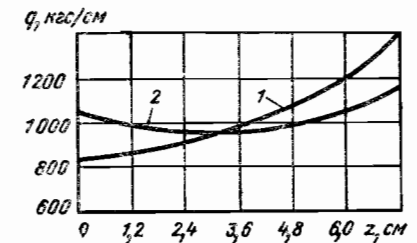


Рис. 6. Изменение q по длине свинчивания соединения:
1 — болт-гайка; 2 — стяжка

На рис. 6 показано изменение q по длине свинчивания (кривые построены по решениям последних уравнений).

Отметим, что в результате контактных деформаций распределение нагрузки по виткам в шариковинтовых передачах более равномерное, чем в обычных резьбовых соединениях.

Максимальное усилие, действующее на шарик

$$P_{ш \max} = q(z)_{\max} \frac{S d_{ш}}{\pi D_{1к} \sin \alpha_k \cos \psi_1}. \quad (29)$$

Для соединения типа болт — гайка $P_{ш \max} = 55,1$ кгс, $\sigma_{\max} = 208,7$ кгс/мм²; для соединения типа стяжки $P_{ш \max} = 45,6$ кгс, $\sigma_{\max} = 195,6$ кгс/мм².

В длительно работающих передачах (детали из стали ШХ15), воспринимающих осевые усилия 4—70 тс и имеющих параметры $D_2 = 99 + 166$ мм, $D_B = 50 + 100$ мм,

$d_{ш} = 7,938$ или $10,319$ мм с числом витков 2—6 и количеством шариков в витке 22—36, контактные напряжения $\sigma_{к\max} = 210 \div 350$ кгс/мм².

При проектировании шариковинтовых передач, предназначенных для длительной эксплуатации, допускаемые контактные напряжения при твердости контактирующих поверхностей деталей $HRC 62-64$ принимают равными $[\sigma]_к = 300 \div 350$ кгс/мм², а при $HRC 60 \div 62$ — $[\sigma]_к = 250 \div 300$ кгс/мм². При кратковременной работе передачи $[\sigma]_к = 500$ кгс/мм².

При более низкой твердости ($HRC < 60$) контактирующих поверхностей величину допускаемых контактных напряжений понижают, т. е.

$$[\sigma]_к^* = K_{ш} [\sigma]_к.$$

Значения коэффициента $K_{ш}$ зависят от твердости контактирующих поверхностей детали передачи из хромистой стали:

HRC	62	58	54	49	45	40	35	29
$K_{ш}$	1,0	0,89	0,79	0,69	0,6	0,5	0,415	0,38

РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Ременные передачи широко применяют для передачи вращательного движения от электродвигателей (большой и средней мощности) к различным агрегатам, а также для передачи мощности на сравнительно большие расстояния (в строительных и дорожных машинах, текстильных станках и т. п.).

Преимущества ременных передач: простота конструкции и низкая стоимость; высокая гибкость ремня, допускающая различное взаимное расположение осей шкивов; плавность и бесшумность работы.

Недостатки: большие габариты; наличие скольжения ремня; ограниченная мощность и низкая долговечность.

Наиболее широко применяют открытую передачу между параллельными валами (рис. 1), включающую в себя ведущий и ведомый шкивы и гибкую связь — ремень в виде кольца.

По форме сечения ремня различают *плоско-, кругло- и клиноременные* передачи. В настоящее время в основном применяют клиновые ремни (рис. 1, в).

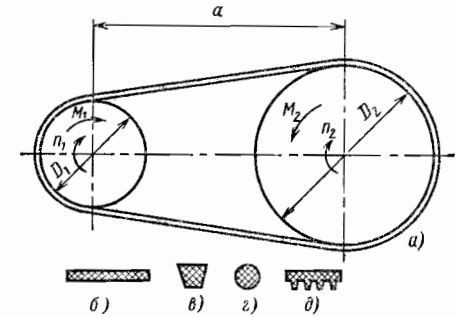


Рис. 1. Схема ременной передачи (а) и сечения ремней:

б — прямоугольное, в — трапециевидное, г — круглое, д — поликлиновое

МАТЕРИАЛЫ И КОНСТРУКЦИИ ПРИВОДНЫХ КЛИНОВЫХ РЕМНЕЙ

Ремни изготовляют с кордом из нескольких слоев вискозной или капроновой ткани (кордтканевые ремни) или одного ряда анидных шнуров (кордшнуровые ремни), намотанных по винтовой линии и заключенных в слой мягкой резины. Кордшнуровые ремни имеют большую гибкость и применяются в нагруженных передачах.

Для работы на шкивах малых диаметров используют клиновые ремни с гофрами на внутренней, а иногда на внутренней и наружной сторонах.

Клиновые ремни изготовляют бесконечными с углом клина $\beta = 40^\circ$ и отношением большего основания трапециевидного сечения к высоте $\frac{b_0}{h} \approx 1,6$ (нормальные ремни) и $\frac{b_0}{h} \approx 1,2$ (узкие ремни).

Основные размеры клиновых ремней даны в табл. 1. Узкие ремни передают в 1,5—2 раза большие мощности, чем нормальные и допускают работу при скорости 50 м/с. Это дает возможность уменьшить число ремней в комплекте и ширину шкивов. Четыре сечения этих ремней (см. табл. 1) полностью заменяют семь сечений нормальных ремней.

В последние годы получили распространение *поликлиновые* ремни — бесконечные плоские ремни (с высокопрочным полиэфирным кордом) и рабочими ребрами на нижней стороне (см. рис. 1, д). Ремень также работает на шкиве с клиновыми канавками. Благодаря высокой гибкости допускается применение шкивов меньших диаметров, чем в клиноременной передаче, большая быстроходность (до 40—50 м/с) и большие передаточные числа. Передача обладает высокой демпфирующей способностью.

Корд и рабочая поверхность расположены по всей ширине ремня, поэтому при одинаковой мощности ширина такого ремня в 1,5—2 раза меньше ширины комплекта нормальных ремней.

1. Основные размеры и области применения клиновых ремней

Ремень	Сечение	b_p , мм	b_0 , мм	h , мм	y_0 , мм	$L_{пр}$, мм	F , см ²	D_{min} , мм	W в кВт при v , м/с		
									До 5	5—10	Св. 10
Клинов- вой	О	8,5	10	6	2,1	400—2500	0,47	63	2	4	4
	А	11	13	8	2,8	560—4000	0,81	90	4	7,5	7,5
	Б	14	17	10,5	4,0	800—6300	1,38	125	7,5	15	15
	В	19	22	13,5	4,8	1300—10600	2,30	200	15	30	60
	Г	27	32	19	6,9	3150—15000	4,76	315	—	60	200
Клино- вой узкий	Д	32	38	23,5	8,3	4500—18000	6,92	500	—	120	200
	Е	42	50	30	11,0	6300—18000	11,70	800	—	—	200
	УО	8,5	10	8	2,0	630—3550	0,56	63	—	—	—
	УА	11	13	10	2,8	800—4500	0,93	90	—	—	—
	УБ	14	17	13	3,5	1250—8000	1,59	140	—	—	—
	УВ	19	22	18	4,8	2000—8000	2,78	224	—	—	—

Обозначения: b_p — ширина ремня по нейтральному слою; b_0 — ширина большего основания трапеции; h — высота сечения; y_0 — расстояние от большего основания до нейтрального слоя; $L_{пр}$ — предельная расчетная длина; F — площадь сечения; D_{min} — минимальный диаметр шкива; W — передаваемая мощность; v — скорость ремня

Клиновые ремни нормального сечения располагают по ряду предпочтительных чисел R40 (ГОСТ 8032—56*) с предпочтением длин по ряду R20, а узкие и поликлиновые ремни — по ряду R20.

МЕХАНИКА РЕМЕННОЙ ПЕРЕДАЧИ

Усилия в ремне. При движении ремень передает энергию с ведущего шкива на ведомый за счет сил сопротивления на поверхностях контакта. Поэтому натяжение ремня, создающее контактные давления между ремнем и шкивом, является необходимым условием работы передачи в эксплуатации.

Если ремень надет на шкивы с натягом, то натяжение его ветвей T_0 будет одинаковым во всех сечениях. Поверхность контакта ремня со шкивами определяется углами обхвата α_i ($i = 1, 2$; рис. 2).

Под действием движущего момента M_1 в ведущей ветви передачи натяжение достигнет некоторого значения T_1 вследствие появления момента сопротивления M_2 , а усилие в ведомой ветви уменьшится до величины T_2 . При этом окружное усилие (полезная нагрузка ремня)

$$P = \frac{2M_1}{D_1} = T_1 - T_2 \tag{1}$$

будет передаваться по всей дуге обхвата.

На первом участке AB — дуге сцепления — за счет нарастающих тангенциальных сил сцепления (меньших полных сил трения) передается малая часть нагрузки, а сдвиговые деформации ремня приводят к небольшому относительному снижению его скорости.

В точке B силы сцепления становятся равными силам трения, происходит срыв, и начинается скольжение ремня по дуге BC — дуге скольжения. На этой дуге с углом $\alpha_{ск}$ за счет нарастающих от точки B к точке C сил трения передается основная часть окружного усилия и имеет место значительное снижение окружной скорости.

Если использовать модель ремня в виде гибкой нити, то усилие (или напряжение) в ведущей ветви передачи можно связать с усилием в ведомой ветви соотношением Л. Эйлера. Условие равновесия (без учета центробежных сил) в радиальном направлении элемента нити, огибающей цилиндр (рис. 3),

$$-(T + dT) \frac{d\alpha}{2} - T \frac{d\alpha}{2} + dN = 0;$$

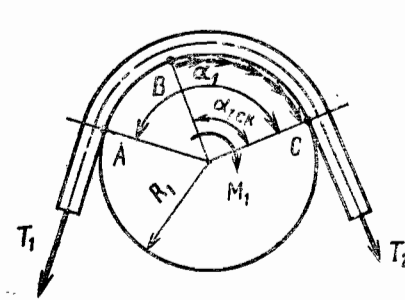


Рис. 2. Схема взаимодействия ремня со шкивом

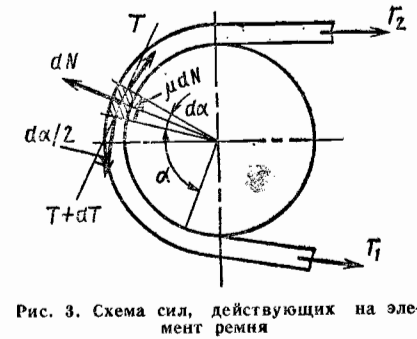


Рис. 3. Схема сил, действующих на элемент ремня

и условие равновесия сил в окружном направлении

$$T + \mu dN - T - dT = 0,$$

где $dN = qdS$ — нормальная сила, действующая на элемент ремня от шкива; q — нормальное давление на единицу длины; T — натяжение ремня; μ — коэффициент трения.

Из последнего соотношения

$$\mu dN = dT,$$

откуда (с учетом первого условия) $dT/T = \mu d\alpha$.

Если скольжение ремня происходит по всей дуге обхвата (граница буксования), то после интегрирования получим формулу Эйлера

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\alpha_{ск}} = \kappa. \tag{2}$$

Усилия в ветвях нагруженной передачи связаны с усилием начального натяжения T_0 и рабочей окружной силой P соотношениями

$$T_1 = T_0 + \frac{P}{2}; \quad T_2 = T_0 - \frac{P}{2}, \tag{3}$$

которые можно получить из условия, что удлинение ведущей ветви ремня равно укорочению ведомой ветви.

Из соотношений (3) следует

$$T_1 + T_2 = 2T_0. \tag{4}$$

Учитывая, что $T_1 - T_2 = P$ и $M_1 = P \frac{D_1}{2}$, найдем

$$M_1 = T_0 D_1 \frac{e^{\mu\alpha_{ск}} - 1}{e^{\mu\alpha_{ск}} + 1}. \tag{5}$$

Из соотношения (5) следует, что нагрузочная способность передачи будет возрастать при увеличении предварительного натяжения ремня T_0 , угла обхвата α и связанного с ним угла скольжения $\alpha_{ск}$ (в расчетах принимают $\alpha_{ск} \approx 0,7\alpha$) и коэффициента трения между ремнем и шкивами.

Коэффициент трения μ в формулах (2) и (5) соответствует передаче с плоским ремнем. В клиноременной передаче

$$\mu_{\kappa} = \frac{\mu}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

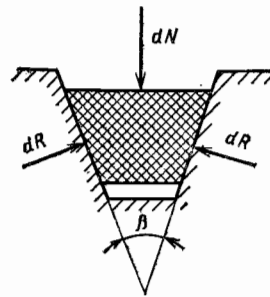


Рис. 4. Схема сил в сечении клинового ремня

Это соотношение несложно получить, положив, что вследствие натяжения ремня его элемент прижат к шкиву усилием dN (рис. 4). Тогда сила трения в окружном направлении

$$dF_T = 2\mu dR = \frac{\mu}{\sin \frac{\beta}{2}} dN = \mu_k dN.$$

Если учесть, что для стандартных ремней $\beta = 40^\circ$, то $\mu_k \approx 3\mu$. Отсюда следует, что в клиноременной передаче сцепление ремня со шкивом почти в 3 раза выше, чем в передаче с плоским ремнем. Существенно, что при уменьшении угла β можно повысить приведенный коэффициент трения μ_k . Однако при этом возникает опасность самоаклинивания ремня, которое приводит к быстрому его разрушению.

Благодаря высокому сцеплению ремня со шкивом клиноременные передачи хорошо работают при углах обхвата $\alpha \geq 120^\circ$ (в некоторых конструкциях допускается $\alpha = 80 + 100^\circ$). В передачах с плоским ремнем рекомендуется обеспечивать $\alpha \geq 150^\circ$.

Для увеличения угла обхвата на малом шкиве в передачах с большим передаточным числом применяют натяжные ролики.

Для увеличения тяговой способности передачи необходимо стремиться к использованию более прочных ремней, допускающих высокие начальные напряжения (например, капрон, нейлон и др.). Однако в этом случае возрастают нагрузки на опоры.

Менее эффективным оказывается использование ремней из материалов с высоким коэффициентом трения, что связано с возрастанием потерь на трение и перегрев ремня при упругом скольжении.

Кинематика передачи. Снижение скорости от v_1 (для ведущей ветви) до v_2 (для ведомой ветви) характеризуют относительным скольжением

$$\xi = \frac{v_1 - v_2}{v_1} \tag{6}$$

Передаточное число

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1(1-\xi)} \tag{7}$$

В расчетах передач принимают следующие значения ξ :

Ремень	
Прорезиненный, текстильный, синтетический	0,01
Клиновой:	
кордшнуровый	0,01
кордканевый	0,02

Тяговая способность передачи. На практике работу передачи принято оценивать по кривым скольжения, которые строят в координатах: относительное скольжение ξ — коэффициент тяги $\varphi = P/(T_1 + T_2) = P/2T_0$ (рис. 5).

По мере увеличения относительной нагрузки до некоторого значения φ_0 наблюдается линейное нарастание скольжения ремня от упругих деформаций, сопровождаемое ростом КПД передачи из-за уменьшения влияния потерь холостого хода.

Дальнейшее повышение нагрузки приводит к более интенсивному снижению скорости, что связано с увеличением дуги скольжения и ростом потерь скорости при набегании ремня на шкивы. Однако передача устойчиво (без буксования) работает и в этой области, хотя КПД снижается из-за нарастания потерь энергии на трение. Лишь при значении $\varphi = \varphi_{max}$ начинается буксование передачи.

Оптимальным считают нагружение, соответствующее наибольшему КПД и некоторому запасу по сцеплению или перегрузке ($\varphi_0 = 0,6 \div 0,75$ — для клино-

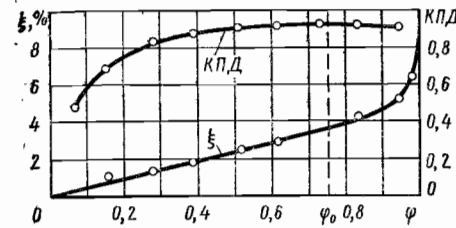


Рис. 5. Кривая скольжения и зависимость КПД от коэффициента тяги φ в клиноременной передаче

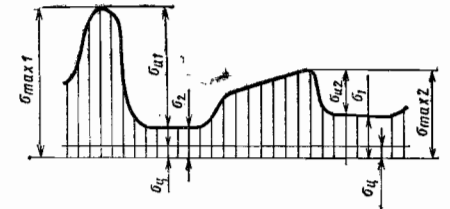


Рис. 6. Изменение напряжений в точке ремня за один пробег

ременных передач, $\varphi_0 = 0,4 \div 0,5$ — для плоскоременных передач), либо нагружение, соответствующее некоторой допустимой величине относительного скольжения.

Быстроходность передачи. Если положить, что ремень является вращающимся со скоростью v кольцом, то окружные растягивающие напряжения в нем от центробежных сил

$$\sigma_{окр} = \rho v^2$$

При $\sigma_{окр} = \sigma_0$ давление на всей дуге обхвата будет равно нулю, и передача не сможет передавать нагрузку. Окружная скорость на шкиве при этом

$$v_{1кр} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho}} \tag{8}$$

где ρ — плотность материала ремня. Для ремня из капрона можно принять напряжение от начального натяжения $\sigma_0 = 500$ кгс/см² и $v_{1кр} = 150$ м/с.

С увеличением быстроходности передачи возрастают потери энергии на трение. Расчеты показывают [3], что при окружной скорости на ведущем шкиве

$$v_{1н} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{5\rho}} \tag{9}$$

потери энергии на трение будут наибольшими. Режимов работы передачи со скоростью $v_{1н}$ следует избегать из-за опасности перегрева ремня.

Наивыгоднейшая скорость ремней обычно составляет 20—25 м/с, а наибольшая допустимая 30—35 м/с. Узкие клиновые ремни с улучшенным кордом могут работать при скоростях до 40—60 м/с.

Напряжения в ремнях. Изменение напряжений в точке ремня за один пробег показано на рис. 6.

При обегании шкива ремнем наибольшие напряжения испытывают наружные волокна:

$$\sigma_{max} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \sigma_P + \sigma_n + \sigma_{и} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P}{F} + \sigma_n + \sigma_{и} \tag{10}$$

где $\kappa = e^{\mu\alpha_{ск}}$; σ_P , σ_n , $\sigma_{и}$ — напряжения соответственно от полезной нагрузки, центробежных сил и от изгиба ремня,

$$\sigma_n = \rho v^2; \tag{11}$$

$$\sigma_{и} = E \frac{h}{D}, \tag{12}$$

здесь h и D — толщина ремня и диаметр меньшего шкива; E — приведенный модуль упругости ремня, для прорезиненных ремней $E = 2000 \div 3000$ кгс/см², для капро-

новых ремней $E = 6000$ кгс/см², для клиновых кордтаневых ремней $E = 2500 \div 4000$ кгс/см², для клиновых кордшнуровых ремней $E = 5000 \div 6000$ кгс/см².

Следует отметить, что в передаче с передаточным числом $u \neq 1$ на протяжении одного пробега в ремне будут действовать два максимума напряжений разной длительности (см. рис. 6), а в передаче с $u = 1$ — два одинаковых максимума напряжений.

РАСЧЕТ РЕМЕННЫХ ПЕРЕДАЧ

Расчет на выносливость. Наиболее часто ременные передачи выходят из строя из-за усталостного повреждения ремня. Экспериментальные исследования показали, что для ремней не удается установить предела неограниченной выносливости, а ресурс * ремня N (в циклах) связан с наибольшим переменным напряжением соотношением **

$$N = \left(\frac{C}{\sigma_{\max}} \right)^m. \quad (13)$$

Если ввести в рассмотрение число пробегов ремня в секунду $\nu = v/L$ (v — скорость ремня, м/с, L — длина ремня, м), то при постоянном режиме нагружения и $u = 1$

$$N = 3600 \nu z_{\text{ш}} T,$$

где $z_{\text{ш}}$ — число шкивов; T — срок службы ремня, ч.
Отсюда

$$T = \frac{1}{3600 \nu z_{\text{ш}}} \left(\frac{C}{\sigma_{\max}} \right)^m. \quad (14)$$

В передачах с $\sigma_0 = 12$ кгс/см² при $u = 1$ принимают для плоских прорезиненных ремней $m = 5 \div 6$; $C = 600 \div 700$ кгс/см², для клиновых кордтаневых $m = 9 \div 11$; $C = 210$ кгс/см²; для клиновых кордшнуровых $m = 6 \div 11$; $C = 300$ кгс/см².

Значение σ_{\max} вычисляют по формуле (10).

На долговечность ремней влияют напряжения от предварительного натяжения. Если срок службы ремня при напряжении в ремне от начального натяжения $\sigma_0 = 12$ кгс/см² принять за 100%, то при других значениях σ_0 и прочих равных условиях он в среднем составит (по экспериментальным данным):

σ_0 , кгс/см ²	9	10	12	15	18
T , %	420	250	100	33	13

Для обеспечения высокой долговечности и работоспособности передач ответственного назначения целесообразно контролировать σ_0 и применять автоматические способы натяжения.

Значительное влияние на долговечность ремня оказывает диаметр меньшего шкива, от которого зависят напряжения изгиба в ремне. Если срок службы клиновых ремней сечения B при работе на шкивах с $D = 200$ мм принять за 100%, то при других значениях D и прочих равных условиях срок службы по опытным данным составит:

D , мм	160	180	200	225	250	280
T , %	30	56	100	200	370	600

Существенно, что при уменьшении диаметра шкива температура ремня резко возрастает (из-за увеличения внутренних потерь), что также способствует снижению долговечности.

* В передачах с $u \neq 1$ под N понимают эквивалентное число циклов от действия двух максимальных напряжений.

** Получено из известного соотношения $\sigma^m N = \text{const}$.

Таким образом, целесообразно стремиться к использованию в конструкциях шкивов больших диаметров. Минимально допустимые диаметры шкивов ограничены (см. табл. 1). Для клиновых ремней наименьшие допустимые диаметры шкивов D_{\min} можно выбрать по ГОСТ 1284—68.

Если по конструктивным соображениям приходится использовать шкив малого диаметра, то для обеспечения долговечности ремня следует уменьшить предварительное его натяжение.

Повышение скорости и уменьшение межосевого расстояния (длины ремня) сокращает срок службы ремня. Последнее вытекает из соотношения (14) и подтверждается опытными данными. Переменность нагружения ремней учитывают в настоящее время поправками к расчету тяговой способности и введением ограничений на частоту пробегов ремня ν . Для обеспечения нормальных сроков службы приводных ремней в открытой плоскопеременной передаче назначают $[\nu] \leq 3 \div 5$, в клиноременной передаче — $[\nu] \leq 10 \div 15$. Используя эти значения ν , можно определить при данной скорости минимальную длину ремня.

Расчет на тяговую способность клиноременных передач *. Общую мощность передачи W (в кВт) и полезную нагрузку P (в кгс) определяют по формулам

$$W = W_0 \frac{K_z}{K_d}; \quad (15)$$

$$P = \frac{102 W K_d}{v z K}, \quad (16)$$

где W_0 — мощность, передаваемая одним ремнем при $\alpha = 180^\circ$, спокойной работе и $\sigma_0 \approx 16$ кгс/мм² (табл. 2); z — число ремней; K_d — коэффициент динамичности (табл. 3); $K = K_\alpha K_L K_z$ — корректирующий коэффициент; K_α — коэффициент угла обхвата:

α , °	70	90	110	130	150	180
K_α	0,56	0,68	0,73	0,83	0,92	1

$K_L = \sqrt{\frac{L_0}{L_p}}$ — коэффициент, учитывающий влияние длины ремня на его ресурс, здесь L_p и L_0 — соответственно расчетная и условная длины ремня, m — показатель степени уравнения кривой усталости ремня ($m = 6 \div 9$). Значения L_0 для ремней различных сечений:

Сечение	О	А	Б	В	Г	Д	Е
L_0 , мм	1320	1700	2240	3750	—	6000	7100

K_z — коэффициент, учитывающий неравномерное распределение нагрузки между одновременно работающими ремнями и зависящий от числа ремней z :

z	2—3	4—6	Св. 6
K_z	0,95	0,9	0,85

Значения мощности, приведенные в табл. 2, даны для ремней с тяговым слоем на основе искусственных волокон (вискозы). Для синтетических волокон величины W_0 можно повысить на 10%.

Для обеспечения нормальной работы клиноременных передач непараллельность осей вращения назначают не более 1 мм на длине 100 мм, а допуск на смещение канавок шкивов — не более 2 мм на 1000 мм межосевого расстояния и увеличивают не более чем на 0,02 мм на каждые 100 мм межцентрового расстояния свыше 1 м.

В «многооручевой» передаче из-за разной длины ремней и различных упругих свойств нагрузка между ремнями распределяется неравномерно. В связи с этим не рекомендуется в передаче использовать более 8—12 ремней. При точном подборе длин ремней на жестких валах в исключительных случаях устанавливают до 16—18 ремней.

* Расчет плоскоременных передач см. в работе [5].

2. Мощность W_0 (в кВт), передаваемая одним ремнем

Сечение ремня	Расчетный диаметр меньшего шкива, мм	Скорость ремня, м/с															
		1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
O	63	0,08	0,15	0,29	0,42	0,56	0,69	0,82	0,96	1,09	1,18	1,26	1,26	1,32	—	—	—
	71	0,10	0,17	0,32	0,47	0,63	0,78	0,93	1,07	1,22	1,30	1,38	1,38	1,46	—	—	—
	80	0,11	0,20	0,37	0,53	0,69	0,85	1,00	1,15	1,27	1,39	1,51	1,51	1,58	—	—	—
	90 и более	0,12	0,21	0,41	0,58	0,76	0,93	1,11	1,27	1,40	1,55	1,67	1,67	1,78	—	—	—
A	90	0,22	0,37	0,66	0,88	1,10	1,33	1,47	1,62	1,77	1,84	1,84	1,84	1,91	—	—	—
	100	0,22	0,37	0,66	0,96	1,18	1,40	1,62	1,84	1,91	1,99	1,99	1,99	2,04	—	—	—
	112	0,22	0,37	0,66	0,96	1,25	1,47	1,69	1,99	2,12	2,29	2,41	2,41	2,41	—	—	—
	125 и более	0,29	0,44	0,74	1,10	1,40	1,69	1,99	2,20	2,33	2,50	2,65	2,65	2,65	—	—	—
B	125	—	0,59	0,96	1,33	1,69	2,06	2,42	2,70	2,94	2,94	2,94	2,94	2,80	—	—	—
	140	—	0,66	1,03	1,40	1,84	2,33	2,65	3,02	3,32	3,54	3,54	3,54	3,40	—	—	—
	160	—	0,74	1,18	1,62	1,99	2,50	2,94	3,40	3,76	4,05	4,35	4,35	4,35	—	—	—
	180 и более	—	0,81	1,33	1,77	2,20	2,72	3,16	3,60	4,05	4,42	4,71	4,71	4,94	—	—	—
B	200	—	1,03	1,77	2,50	3,10	3,68	4,35	4,94	5,52	6,00	6,25	6,19	6,05	—	—	—
	224	—	1,10	2,06	2,88	3,54	4,27	5,00	5,67	6,25	6,78	7,15	7,15	6,85	—	—	—
	250	—	1,25	2,20	3,10	3,90	4,64	5,45	6,12	6,63	7,15	7,50	7,73	7,73	—	—	—
	280 и более	—	1,33	2,36	3,32	4,20	5,00	5,90	6,70	7,29	7,93	8,10	8,02	8,10	—	—	—
Г	315	—	—	—	5,45	7,00	8,45	9,70	10,70	11,40	11,78	11,90	11,62	11,10	—	—	—
	355	—	—	—	5,96	7,65	9,20	10,44	11,54	12,50	13,30	13,72	13,82	13,60	—	—	—
	400	—	—	—	6,48	8,24	10,08	11,54	12,88	14,11	15,00	15,72	16,19	16,03	—	—	—
	450 и более	—	—	—	6,94	8,90	10,93	12,50	13,90	15,14	16,19	17,00	17,25	17,45	—	—	—
Д	500	—	—	—	8,75	11,56	14,00	15,98	17,65	19,00	19,85	20,46	20,46	20,46	—	—	—
	560	—	—	—	9,87	12,60	15,25	17,45	19,20	20,80	22,40	23,60	24,30	24,30	—	—	—
	630	—	—	—	10,75	13,40	16,08	18,70	21,20	23,20	24,80	26,50	27,50	27,50	—	—	—
	710 и более	—	—	—	11,48	14,90	18,00	21,00	22,90	25,20	27,20	29,00	30,20	30,80	—	—	—
E	800	—	—	—	13,30	17,90	21,80	25,60	29,30	32,40	35,00	36,80	38,20	39,80	—	—	—
	900	—	—	—	15,45	20,20	25,20	29,10	32,90	36,00	38,40	40,60	42,60	44,10	—	—	—
	1000	—	—	—	16,50	22,10	27,20	32,00	36,40	40,10	42,70	44,90	47,10	48,60	—	—	—
	и более	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

3. Значения коэффициента динамичности

Нагрузка	Машины	K_d
Спокойная; пусковая нагрузка до 120% от нормальной	Электрические генераторы, центробежные насосы и компрессоры; станки с непрерывным процессом резания; вентиляторы; ленточные транспортеры	1
Умеренные колебания нагрузки; пусковая нагрузка до 150% от нормальной	Поршневые насосы и компрессоры с тремя и более цилиндрами; станки — автоматы; пластинчатые транспортеры	1,1
Значительные колебания нагрузки; пусковая нагрузка до 200% от нормальной	Реверсивные приводы; поршневые насосы и компрессоры с одним и двумя цилиндрами; строгальные и долбежные станки; винтовые и скребковые транспортеры; элеваторы; эксцентриковые и винтовые прессы с тяжелыми маховиками	1,25
Ударная и резконеверная нагрузка; пусковая нагрузка до 300% от нормальной	Молоты, мельницы, ножницы, подъемники, экскаваторы, драги; эксцентриковые и винтовые прессы с легкими маховиками	1,5—1,6
<p>Примечания: 1. При частых и резких пусках двигателя с большими пусковыми моментами значение K_d следует повышать на 0,15.</p> <p>2. При двухсменной работе значение K_d необходимо повышать на 0,15, а при трехсменной работе — на 0,35.</p>		

Тяговую способность узких ремней рассчитывают так же, как и нормальных. Значения W_0 и L_0 для этих ремней приведены в табл. 4 [4].

В заключение отметим, что передачи с клиновыми ремнями могут вызывать крутильные колебания ведомой системы из-за неизбежного различия ширины ремня по его длине и, как следствие, изменения передаточного отношения за один пробег ремня.

Передачи с поликлиновыми ремнями не имеют недостатков, присущих клиновым передачам. Расчет передач с поликлиновыми ремнями и основные размеры ремней даны в работе [2].

ПЕРЕДАЧИ С ЗУБЧАТЫМИ РЕМНЯМИ

Зубчатый ремень представляет собой по форме бесконечную плоскую ленту с зубцами трапециевидальной формы на внутренней поверхности (рис. 7), входящими в зацепление с зубцами на шкивах. Ремни выполняют в основном из армированного металлопромом неопрена или режее — полиуретана. Спирально навитый по длине ремня трос служит несущим элементом при передаче окружного усилия и обеспечивает неизменяемость шага ремня. Предел прочности проволоки троса $\sigma_B = 300 \text{ кгс/мм}^2$, относительное удлинение $\delta = 4 + 5\%$.

Каркас кинематических зубчатых ремней (применяются в контрольной и измерительной аппаратуре) изготавливают из стекловолкна или полиамидного шнура, а ремень — из резины, покрытой для повышения износостойкости тканым нейлоном.

Основной конструктивный параметр ремня — модуль $m = t/\pi$, где t — шаг ремня.

Значения модуля принимают по табл. 5 с учетом передаваемой мощности и числа оборотов. В зависимости от модуля выбирают ширину ремня:

m , мм	s	b , мм
2	10;	12,5; 16
3	12,5;	16; 20; 25
4	20;	25; 32; 40
5	25;	32; 40; 50
7,10	50;	63; 80

4. Мощность W_0 (в кВт), передаваемая узким клиновым ремнем при $\alpha = 180^\circ$ и спокойной нагрузке

Диаметр малого шкива, мм	n_1 , об/мин		
	950	1450	2800
Ремень УО ($L_0 = 1,6$ м)			
63	0,78—0,88	1,08—1,23	1,74—2,02
71	0,99—1,10	1,40—1,55	2,29—2,58
80	1,24—1,33	1,74—1,90	2,90—3,19
90	1,50—1,60	2,13—2,28	3,55—3,84
Ремень УА ($L_0 = 2,5$ м)			
90	1,70—1,92	2,35—2,69	3,64—4,29
100	2,11—2,33	2,94—3,28	4,64—5,28
112	2,60—2,82	3,65—3,98	5,79—6,44
125	3,12—3,34	4,39—4,73	6,99—7,65
Ремень УБ ($L_0 = 3,55$ м)			
140	4,29—4,75	5,90—6,61	8,54—9,86
160	5,47—5,93	7,58—8,24	10,9—12,3
180	6,62—7,09	9,20—9,86	13,0—14,4
200	7,80—8,24	10,70—11,40	14,8—16,1
Ремень УВ ($L_0 = 5,6$ м)			
224	11,3—12,4	14,9—16,7	15,2—18,6
250	13,6—14,8	18,0—19,7	16,9—20,3
280	16,3—17,4	21,2—22,9	17,4—20,8
315	19,1—20,3	24,6—26,3	—

Примечание. Меньшие значения W_0 соответствуют $u = 1$; 2, большие — $u \geq 3$.

5. Рекомендуемые значения модуля для передачи с зубчатым ремнем

W , кВт	Частота вращения быстроходного вала n , об/мин					W , кВт	Частота вращения быстроходного вала n , об/мин				
	3500	1750	1200	850	650		3500	1750	1200	850	650
0,05	2	2	2; 3	2; 3		2,2	3; 4		4		
0,08		2; 3			3	4,0		4	4	4; 5	
0,12						5,5				4; 5	
0,18	2; 3			3		7,0	4			5; 7	
0,27		3				10		5; 7	5; 7		
0,4					3; 4	13				7	
0,8	3					17					
1,5		3; 4	3; 4		4	22	5; 7				
				4		30		7	7	7; 10	

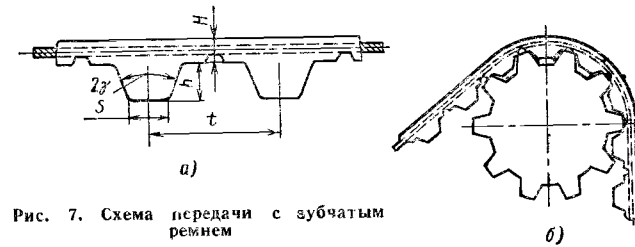


Рис. 7. Схема передачи с зубчатым ремнем

и определяют другие параметры: высоту зубьев $h = 0,6 m$, наименьшую толщину $S = m$; толщину ремня по впадинам $H = m + 1$; расчетную длину ремня $L = \pi m z_p$ (z_p — число зубьев ремня); диаметры делительных окружностей звездочек (рис. 7, б) $D_1 = m z_1$, $D_2 = m z_2$; наружные диаметры шкивов зубчатых ремней $D_{н1} = m z_1 - 2\Delta$, $D_{н2} = m z_2 - 2\Delta$, где $\Delta = 0,6$ мм при диаметре троса 0,3—0,4 мм и $\Delta = 1,3$ при диаметре троса 0,65—0,8 мм. Шаг зубьев на наружном диаметре

$$t_{ш} = \frac{\pi D_{н}}{z} \quad (17)$$

Минимальное число зубьев меньшего шкива принимают равным $z_{мин} = 16 \div 20$ при $m = 2 \div 5$ мм и $z_{мин} = 20 \div 25$ при $m = 7 \div 10$ мм, большие значения назначают при больших скоростях. Число зубьев ремня, находящегося в зацеплении с меньшим шкивом, должно быть не меньше 6.

Наибольшая скорость ремня ограничена:

m , мм	2	3	4—10
v_{max} , м/с	25	35	40

Расчетное удельное (на единицу ширины ремня) окружное усилие (в кгс/см) на ремне

$$p = [p]_0 C_H C_N C_K$$

где $[p]_0$ — допустимое удельное окружное усилие, зависящее от модуля:

m , мм	2	3	4	5	7	10
$[p]_0$, кгс/см	5	10	25	35	45	60

C_H — коэффициент передаточного числа, вводится только для ускоряющей передачи (при $u \geq 1$ $C_H = 1$):

u	1—0,8	0,8—0,6	0,6—0,4	0,4—0,3	< 0,3
C_H	1	0,95	0,9	0,85	0,8

C_N — коэффициент, учитывающий влияние начального натяжения на нагрузочную способность ремня; $C_N = 0,9$ при одном ролике и $C_N = 0,8$ при двух роликах; C_K — коэффициент, учитывающий неравномерное распределение нагрузки между витками троса и зависящий от ширины ремня:

b , мм	8	10	12,5	16	20	25	40	63	100
C_K	0,67	0,77	0,83	0,91	0,94	1	1,04	1,09	1,2

Необходимая ширина ремня

$$b = \frac{P}{p - qv^2} \quad (18)$$

где q — масса (в кг) 1 м ремня шириной 1 см.

m , мм	2	3	4	5	7	10
q , кг	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,11

v — скорость ремня, м/с; P — окружное усилие, передаваемое ремнем,

$$P = \frac{102WK_d}{v}, \quad (19)$$

здесь K_d — коэффициент динамичности (см. табл. 3). Окружное усилие P часто ограничивается удельным давлением на зубья в зацеплении с малым шкивом.

После определения ширины ремня рекомендуется проверять удельные давления на зубья

$$p_z = \frac{P\psi}{z_0 b h} \leq [p]_z, \quad (20)$$

где ψ — коэффициент неравномерности распределения нагрузки между зубьями ремня и шкива на дуге обхвата, $\psi = 1,7 \div 2,0$; z_0 — число зубьев в зацеплении,

$$z_0 = z_{ш1} \frac{\alpha_1}{360},$$

где α_1 — угол обхвата на малом шкиве, градусы; $[p]_z$ — допускаемое давление на зубья ремня, зависящее от частоты вращения быстроходного вала:

n , об/мин	200	400	1 000	2 000	5 000	10 000
$[p]_z$, кгс/см ²	20	15	10	7,5	5	3,5

В передаче с зубчатым ремнем не требуется значительное натяжение. Для обеспечения зацепления ремня со шкивом назначают небольшое удельное натяжение S_0/b в зависимости от модуля:

m , мм	2	3	4	5	7	10
S_0/b , кгс/см	0,4	0,6	0,8	1,0	1,4	2,0

Усилия на валы передачи

$$Q = (1 \div 1,2) P.$$

ПОРЯДОК РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЕМЕННЫХ ПЕРЕДАЧ

Рассмотрим порядок расчета и проектирования на примере клиноременной передачи от электродвигателя мощностью 3 кВт; $n = 3000$ об/мин; $u = 2$; работа двухсменная; желательное межосевое расстояние $a_{ж} \approx 600$ мм. Пусковая нагрузка составляет 150% от нормальной.

1. По табл. 1 принимаем сечение ремня A (возможны варианты сечений O , B); $F = 0,81$ см², $D_{1min} = 90$ мм, $h = 8$ мм.

2. Используя значение желательного межосевого расстояния и рекомендация по выбору межосевого расстояния в клиноременных передачах, принимаем $a_{min} = 0,55(D_1 + D_2) + h$; $a_{max} = 2(D_1 + D_2) = 2D_1[1 + u(1 - \xi)]$; $a_{ж} = a_{max}$ и при $\xi = 0,01$ для кордшнуровых ремней находим

$$D_1 = \frac{a_{ж}}{2[1 + u(1 - \xi)]} = \frac{600}{2[1 + 2(1 - 0,01)]} \approx 100 \text{ мм},$$

3. По формуле (7) вычисляем диаметр второго шкива

$$D_2 = D_1 u (1 - \xi) = 100 \cdot 2 (1 - 0,01) = 198 \text{ мм}.$$

4. Определяем наибольшую скорость ремня

$$v = \frac{\pi D_1 n_1}{60 \cdot 1000} = \frac{3,14 \cdot 100 \cdot 3000}{60 \cdot 1000} = 15,7 \text{ м/с}.$$

Это значение скорости допустимо для передачи такого типа.

5. Находим длину ремня по формуле

$$L \approx \pi D_{cp} + a \left[2 + \left(\frac{\Delta}{a} \right)^2 \right],$$

где

$$D_{cp} = \frac{D_1 + D_2}{2}; \quad \Delta = \frac{D_2 - D_1}{2},$$

т. е.

$$L = 3,14 \cdot 149 + 600 \left[2 + \left(\frac{49}{600} \right)^2 \right] = 1668 \text{ мм}.$$

Полученное значение длины ремня округляем до стандартного $L = 1600$ мм.

6. Вычисляем окончательное межосевое расстояние

$$a \approx \frac{L - \pi D_{cp}}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(L - \pi D_{cp})^2 - 8\Delta^2} =$$

$$= \frac{1600 - 3,14 \cdot 149}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(1600 - 3,14 \cdot 149)^2 - 8(49)^2} = 564 \text{ мм}.$$

7. Определяем угол обхвата на малом шкиве

$$\alpha = 180 - \frac{2\Delta}{a} 57 = 180 - \frac{2 \cdot 49 \cdot 57}{564} \approx 170^\circ > 120^\circ.$$

8. По табл. 2 при $D_1 = 100$ мм и $v = 15,7$ м/с находим мощность, передаваемую одним ремнем $W_0 = 1,9$ кВт и вычисляем требуемое число ремней ($K_d = 1,1$ по табл. 3, $K_\alpha \approx 0,98$, $K_z \approx 1$, $K_L = 0,99$)

$$z = \frac{WK_d}{W_0 K} = \frac{3 \cdot 1,1}{1,9 \cdot 0,89} \approx 1,9.$$

Принимаем два ремня.

При необходимости можно оценить долговечность ремня, приняв начальное напряжение натяжения $\sigma_0 = 12$ кгс/см².

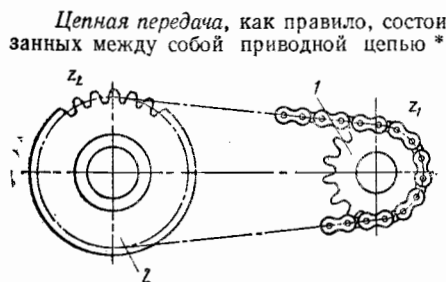


Рис. 1. Схема цепной передачи

Цепная передача, как правило, состоит из ведущей 1 и ведомой 2 звездочек, связанных между собой приводной цепью* (рис. 1). Применяют также передачи с несколькими ведомыми звездочками.

КОНСТРУКЦИИ ЦЕПЕЙ И МАТЕРИАЛЫ

В качестве приводных применяют роликовые, втулочные и зубчатые цепи.

Роликовая цепь (рис. 2) состоит из последовательно чередующихся внутренних 1 и внешних 2 звеньев, которые шарнирно соединены между собой. Каждое звено выполнено из двух пластин, напрессованных на втулки (внутреннее звено) или оси — валики (наружное звено). Для уменьшения износа зубьев звездочек перед сборкой звена на втулку надевают ролик 3, свободно вращающийся на ней. Концы цепи соединяют с помощью соединительного звена со шплинтами (рис. 3, а) или штифтами, если цепь имеет четное число шагов. Цепь с нечетным числом шагов соединяется через переходное звено (рис. 3, б). Переходное звено слабее обычного, поэтому стремятся использовать цепи с четным числом шагов.

Основным параметром цепей является шаг t — расстояние между осями двух смежных роликов наружного или внутреннего звена.

В зависимости от отношения шага цепи t к диаметру ролика d_1 (см. рис. 2) различают цепи легкой (ПРЛ) и нормальной (ПР) серии (при $\frac{t}{d_1} \leq 2$) и длиннозвенные (ПРД) цепи (при $\frac{t}{d_1} > 2$).

Приводные роликовые однорядные цепи нормальной серии согласно ГОСТ 13568—75 изготовляют с шагом 8 — 63,5 мм; разрушающая нагрузка** равна 460 — 35 380 кгс. Эти цепи широко применяют в различных машинах и механизмах.

Приводные роликовые длиннозвенные цепи (ГОСТ 13568—75) изготовляют с шагом 31,75 — 76,2 мм; разрушающая нагрузка равна 2270 — 10 000 кгс. Они отличаются от нормальных цепей меньшей массой и прочностью и применяются в основном в сельскохозяйственных машинах.

При больших нагрузках и скоростях в передачах применяют многорядные роликовые цепи (двухрядные 2ПР, трехрядные 3ПР и четырехрядные 4ПР). Основные размеры и разрушающие нагрузки (пропорциональные числу рядов) для этих цепей регламентированы ГОСТ 13568—75. Многорядные цепи набирают из тех же элементов, что и однорядные, однако их валики имеют увеличенную длину.

* В машиностроении наряду с приводными применяют грузовые и тяговые цепи.

** Разрушающая нагрузка служит характеристикой прочности цепи и устанавливается заводом-изготовителем экспериментально.

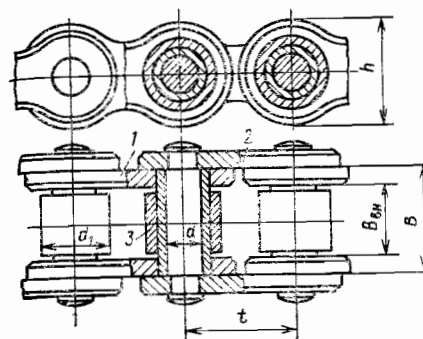


Рис. 2. Роликовая цепь

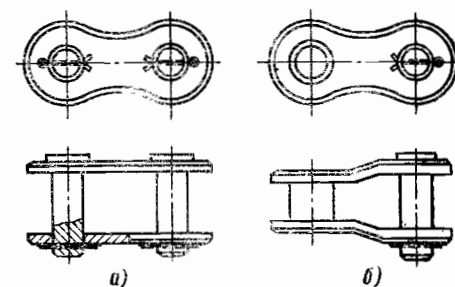


Рис. 3. Соединительные и переходные звенья цепи

В экскаваторах, кранах и других машинах, эксплуатируемых при тяжелых режимах работы, применяют роликовые цепи с изогнутыми пластинами (ПРИ), подобными переходным звеньям обычных цепей. Благодаря высокой осевой податливости звеньев такие цепи лучше работают при ударных нагрузках, частых реверсах и т. п. Согласно ГОСТ 13568—75 эти цепи изготовляют с шагом 78,1 — 140 мм, разрушающая нагрузка равна 36 000 — 120 000 кгс.

В машиностроении наряду с роликовыми цепями применяют так называемые втулочные цепи. Выпускаются втулочные однорядные цепи (ПВ) с шагом 9,525 мм и разрушающей нагрузкой 1200 кгс и двухрядные (2ПВ) с шагом 9,525 мм и разрушающей нагрузкой 1800 кгс.

Зубчатые цепи (рис. 4) обеспечивают плавную работу с меньшим шумом, чем роликовые. Они имеют большую допускаемую скорость и повышенную прочность.

Цепь собирают из рабочих и направляющих пластин, соединяемых между собой сегментными призмами. В рабочей пластине 1 зубообразной формы имеются два фасонных отверстия для призм. Направляющая пластина 2 предохраняет цепь от смещения вдоль оси звездочек во время работы.

Рабочими поверхностями зубьев цепи являются боковые наружные стороны зубчатых выступов пластин, очерченные плоскостями. Этими плоскостями каждое звено садится на два зуба звездочки, имеющих трапециевидную форму.

Основные размеры цепей приведены в табл. 1 и 2. Пластины роликовых и зубчатых цепей изготовляют из среднеуглеродистых и легированных сталей 45, 50, 40Х, 40ХН, 30ХН3А и затем закалывают до HRC 40—50. Оси, втулки и призмы изготовляют из сталей 15, 15Х, 20, 20Х, 12ХН3А, 20ХН3А, 20Х2Н4А, 30ХН3А, цементуют и подвергают закалке до HRC 50—65. Износостойкость цепей можно повысить диффузионным хромированием деталей шарниров.

Технические требования, контроль и испытания роликовых и втулочных цепей регламентированы ГОСТ 13568—75.

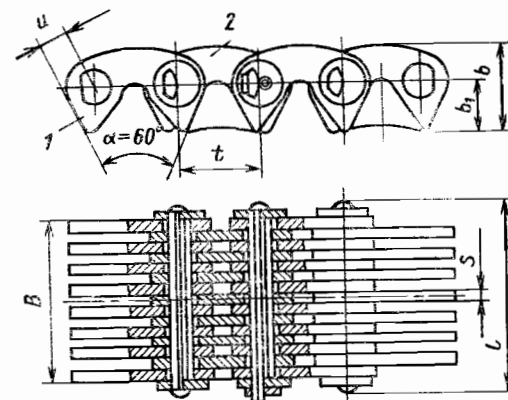


Рис. 4. Зубчатая цепь

1. Приводные роликовые цепи по ГОСТ 13568—75 (размеры в мм, см. рис. 2)

Обозначение цепи	t	$B_{\text{вн}}$, не более	d	d_1	h , не более	$F_{\text{оп}}$, мм ²	Разрушающая нагрузка Q_{min} , кгс	Масса 1 м цепи, кг
ПР-8-460	8,00	3,00	2,31	5,00	7,5	11	460	0,20
ПР-9,525-910	9,525	5,72	3,28	6,35	8,5	28	910	0,45
ПР-12,7-900-1	12,7	2,40	3,66	7,75	10	18	900	0,30
ПР-12,7-900-2	12,7	3,30	3,66	7,75	10	21	900	0,35
ПР-12,7-1820-1	12,7	5,4	4,45	8,51	11,8	40	1 820	0,65
ПР-12,7-1820-2	12,7	7,75	4,45	8,51	11,8	50	1 820	0,75
ПР-15,875-2270-1	15,875	6,48	5,08	10,16	14,8	55	2 270	0,80
ПР-15,875-2270-2	15,875	9,65	5,08	10,16	14,8	71	2 270	1,00
ПР-19,05-3180	19,05	12,70	5,96	11,91	18,2	105	3 180	1,9
ПР-25,4-5670	25,4	15,88	7,95	15,88	24,2	180	5 670	2,6
ПР-31,75-8850	31,75	19,05	9,55	19,05	30,2	260	8 850	3,8
ПР-38,1-12700	38,1	25,4	11,1	22,23	36,2	395	12 700	5,5
ПР-44,45-17240	44,45	25,4	12,70	25,70	42,4	475	17 240	7,5
ПР-50,8-22680	50,8	31,75	14,29	28,58	48,3	645	22 680	9,7
ПР-63,5-35380	63,5	38,10	19,84	39,68	60,4	1000	35 380	16,0

2. Приводные зубчатые цепи с шарнирами качения по ГОСТ 13552—68 (размеры в мм, см. рис. 4)

t	B	b	b_1	S	u	Q_{min}^* , кгс
12,7	22,5—52,5**	13,4	7	1,5	4,76	1000
15,875	30—70**	16,7	8,7	2	5,95	1250
19,05	45—93**	20,1	10,5	3	7,14	1500
25,4	57—105**	26,7	14,0	3	9,52	2000
37,75	69—117**	33,4	17,5	3	11,91	2500

* На 1 см ширины.
** Через 6 мм.
*** Через 8 мм.
**** Через 12 мм.

УСИЛИЯ В ПЕРЕДАЧЕ

Окружное усилие в передаче передается за счет давления зубьев ведущей звездочки на звенья цепи и давления звеньев ведущей ветви на зубья ведомой звездочки. Усилия между зубьями звездочек, как и усилия в ветвях, распределяются неравномерно в пределах угла обхвата.

При холостом ходе передачи натяжение в ветвях цепи вызвано ее провисанием от собственного веса. Если ветвь цепи расположена горизонтально и длина ее приблизительно равна межосевому расстоянию, то натяжение от собственного веса (в кгс)

$$S_0 = \frac{qa^2}{8f} = \xi qa,$$

где q — масса 1 м цепи; a — расстояние между осями звездочек; f — стрела провисания; $\xi = \frac{a}{8f}$ — коэффициент.

Наличие провисания обеспечивает более плавную работу передачи, меньший износ в шарнирах цепи. Минимальное значение стрелы провисания ведомой ветви в начале работы новой цепи в горизонтальной передаче принимают $f_{\text{min}} =$

$= 0,02 a$. В этом случае $\xi = 6,25$. Если угол наклона ветви к горизонту составляет 40° , то $\xi \approx 3$. Для вертикальной передачи $\xi = 1$.

В процессе работы передачи под нагрузкой ведущая ветвь растягивается с усилием $S_1 = P + S_0 + P_{\text{ц}} + P_{\text{д}}$, где P — полезная сила в передаче; $P = 102 \frac{W}{v_{\text{ц}}}$ (здесь W — мощность, кВт, $v_{\text{ц}}$ — скорость цепи, м/с); S_0 — натяжение в ведомой ветви от собственного веса; $P_{\text{ц}}$ — натяжение цепи от действия центробежных сил, $P_{\text{ц}} = qv_{\text{ц}}^2$; $P_{\text{д}}$ — динамическая нагрузка в передаче от неравномерности хода цепи [1]. В расчетах цепных передач влияние $P_{\text{д}}$ на работоспособность учитывают с помощью специальных коэффициентов [1].

Ведомая ветвь под нагрузкой растягивается с усилием $S_2 = S_0 + P_{\text{ц}}$.

На рис. 5 показана типичная осциллограмма нагрузки на звено цепи за полный оборот вокруг звездочек (участок 1—2 соответствует прохождению звеном ведомой ветви, 2—3 — ведомой звездочки, 3—4 — ведущей ветви, 4—1 — ведущей звездочки).

При средних скоростях движения цепи ($v_{\text{ц}} < 15$ м/с) нагрузка на валы цепной передачи $Q = kP$, где k — коэффициент для горизонтальной и вертикальной передачи, соответственно равный 1,15 и 1,05.

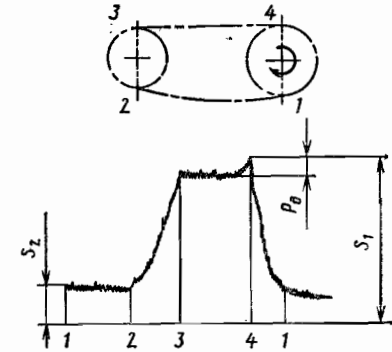


Рис. 5. Осциллограмма нагрузки в передаче

ВЫБОР ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕДАЧИ

Передачное число передачи (см. рис. 1)

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

где n_1 и z_1 — частота вращения и число зубьев ведущей звездочки; n_2 и z_2 — то же, для ведомой звездочки. Для понижающих передач в машинах общего назначения $u < 7$ ($u_{\text{max}} = 7$). В тихоходных передачах ($v_{\text{ц}} < 2$ м/с) при отсутствии толчков и ударов допускается $u_{\text{max}} = 10$.

Число зубьев звездочек z_1 и z_2 выбирают из условия обеспечения минимальных размеров передачи и более плавного хода цепи. Для получения наименьших размеров передачи z_1 должно быть минимальным. Однако с уменьшением z_1 увеличивается неравномерность хода цепи, динамические нагрузки, шум в передаче и снижается долговечность. На основании экспериментальных исследований и опыта эксплуатации передач во многих странах принято $z_{1\text{min}} = 19$ при $v_{\text{ц}} > 2$ м/с. В тихоходных передачах ($v_{\text{ц}} < 2$ м/с) допускается $z_{1\text{min}} = 13 \div 15$. В передачах, работающих с ударными нагрузками, $z_{1\text{min}} = 23$.

Для обеспечения плавности работы, высокой долговечности, ограничения шума в передачах со средними и высокими скоростями рекомендуется принимать $z_{1\text{min}} = 29 - 2u \geq 19$.

Излишне большие значения z_1 вызывают повышенный износ шарниров и увеличение шага цепи (вытяжку цепи). Для всех роликовых цепей (кроме ПРП)

$$z_{1\text{max}} = \frac{200K}{\delta t},$$

где $K = 2 \frac{h}{t}$ — коэффициент высоты зуба (здесь h — хордальная высота зуба звездочки, ГОСТ 591—69), обычно $K = 0,3 \div 0,5$; δt — допускаемое относительное увеличение шага цепи, %.

Для более равномерного износа цепи рекомендуется применять малые звездочки с нечетным числом зубьев и большие звездочки с четным.

Шаг цепи является основным параметром, от которого зависит несущая способность передачи. С увеличением шага цепи уменьшается быстрходность и несущая способность передачи. Обычно

$$\frac{a}{80} \leq t \leq \frac{a}{25}.$$

В табл. 3 приведены рекомендуемые $n_{дз}$ и предельные $n_{пр}$ частоты вращения малой звездочки в зависимости от шага цепи.

3. Наибольшие рекомендуемые $n_{пр}$ и предельные $n_{пр}$ частоты вращения малой звездочки роликовых и зубчатых передач

Шаг цепи	Роликовые ПР, ПРЛ, ПРД		Зубчатые		Шаг цепи	Роликовые ПР, ПРЛ, ПРД		Зубчатые	
	$n_{пр}$	$n_{пр}$	$n_{пр}$	$n_{пр}$		$n_{пр}$	$n_{пр}$	$n_{пр}$	$n_{пр}$
8	3000	6000	—	—	31,75	630	1000	1320	1500
9,525	2500	5000	—	—	33,1	500	900	—	—
12,7	1250	3100	3300	4000	44,45	400	600	—	—
15,875	1000	2300	2650	3300	50,8	300	450	—	—
19,05	900	1800	2200	2700	63,5	200	300	—	—
25,4	800	1200	1650	2000	73,1	150	210	—	—

Примечания: 1. При частоте вращения $n_{пр} z_{1\min} \geq 15$, а при $n_{пр} z_{1\min} \geq 20$.
2. При работе передачи с частотой вращения $n_{пр}$ необходимы повышенная точность изготовления звездочек и монтажа передачи, обильная смазка. Цепи ПР применять нецелесообразно.

Расстояние между осями звездочек a (см. рис. 1) существенно влияет на работоспособность цепи. При малом значении a цепь быстро изнашивается; при большом значении ведомая ветвь сильно провисает, что приводит к ее колебаниям. Нормальная работа передачи обеспечивается при $a = (25 \div 80)t$. Обычно принимают $a = (30 \div 50)t$. Минимальное значение a (в мм) определяется углом охвата цепи ($\varphi_{\min} \geq 120^\circ$):

$$\text{при } u \leq 3 \quad a_{\min} = \frac{D_1 + D_2}{2} + (30 \div 50)t;$$

$$\text{при } u > 3 \quad a_{\min} = \frac{D_1 + D_2}{2} \frac{9 + u}{10}.$$

Потребное число звеньев цепи определяют по предварительно выбранным значениям a , t , z_1 и z_2 :

$$w \approx 2 \frac{a}{t} + \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2 \frac{t}{a}. \quad (1)$$

В равенстве (1) два первых слагаемых равны потребному числу звеньев при $z_1 = z_2$, третье слагаемое учитывает наклон ветви при $z_1 \neq z_2$. Полученное значение округляют до ближайшего целого числа. При этом рекомендуется принимать w равным четному числу, так как при нечетном числе звеньев приходится использовать соединительные звенья.

Окончательное значение расстояния между осями звездочек получим из уравнения (1):

$$a = \frac{t}{4} \left[w - \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{\left(w - \frac{z_1 + z_2}{2} \right)^2 - 8 \left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2} \right].$$

Для обеспечения нормального провисания ведомой ветви цепи межосевое расстояние уменьшают на $(0,2-0,4)\%$.

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ПЕРЕДАЧИ

Тяговая способность цепи. Цепные передачи часто испытывают в процессе работы (кратковременно или длительно) значительные статические нагрузки. Для предотвращения чрезмерной вытяжки цепи или ее обрыва полезная окружная сила должна быть равна

$$P_{\max} = \frac{Q_{\min}}{k},$$

где Q_{\min} — минимальная разрушающая нагрузка (см. табл. 1, 2); k — коэффициент запаса, обычно $k = 3 \div 5$.

Полезная окружная сила в момент пуска машины

$$P_{\max} = \frac{2M_{кп}}{d_d},$$

при движении цепи со скоростью v_c (м/с)

$$P_{\max} = 102 \frac{W}{v_c},$$

где $M_{кп}$ — крутящий момент пусковой; d_d — диаметр делительной окружности ведущей звездочки; W — передаваемая мощность, кВт.

Износостойкость. Основной причиной выхода из строя закрытых и полузакрытых цепных передач общего машиностроения является износ шарниров звеньев цепи, приводящий к увеличению шага цепи (вытяжке цепи), неправильному зацеплению со звездочками и, как следствие, к сползанию цепи со звездочек. Шарнирные соединения работают в условиях граничного трения даже при непрерывной смазке.

Степень износа передача принимают оценивать по относительному увеличению шага цепи $\delta t = \frac{\Delta t}{t} \%$. Норма предельного износа и связанная с ней продолжительность работы передачи зависит от профиля и числа зубьев большей звездочки, а также требований, предъявляемых к машине по точности перемещений, неравномерности вращения и уровню вибраций и шума.

В приводах полиграфических машин допускается предельная вытяжка не свыше $(0,5-0,6)\%$. Предельная вытяжка цепей в машинах общего машиностроения, имеющих, как правило, $z_2 = 40 \div 45$, ограничена $(2-2,5)\%$.

С увеличением нормы износа до 3% часто ослабевают прессовые соединения и снижается прочность изношенных элементов. При невысоком качестве изготовления прессовых соединений возможно проворачивание осей и втулок в пластинах.

В основу расчета работоспособности изнашиваемой цепи положено предположение, что цепь обладает достаточной износостойкостью, если давление p в шарнире не превышает допускаемого значения $[p]_и$:

$$p_{и} = \frac{PK_3}{F_{оп}K_m} \leq [p]_и, \quad (2)$$

где P — полезная окружная нагрузка, передаваемая цепью; $K_3 = k_d k_a k_n k_{рег} k_{см} k_{реж}$ — коэффициент эксплуатации (здесь $k_d, \dots, k_{реж}$ — частные коэффициенты, учитывающие условия работы передачи и ее конструкцию, см. табл. 4); $F_{оп}$ — проекция опорной поверхности шарнира (см. табл. 1), $F_{оп} = Bd \approx 0,28t^2$ (d — диаметр оси, B — ширина внутреннего звена для втулочных и роликовых цепей (см. рис. 2) $B = (1,4 + 1,75)B_{вн}$).

Если передача работает при нестационарных нагрузках, то в формулу (2) вместо P следует подставлять значение эквивалентной нагрузки $P_{экв}$.

4. Значения частных коэффициентов

Наименование коэффициента	Обозначение	Условия работы передачи	Значение коэффициента
Коэффициент динамичности нагрузки	k_d	Спокойная нагрузка Нагрузка с толчками Сильные удары	1 1,2—1,5 1,8
Коэффициент влияния длины цепи (на износ)	k_a	$a = (60 \div 80) t$ $a = (30 \div 50) t$ $a < 25t$	0,9 1 1,25
Коэффициент расположения передачи	k_n	Наклон линии центров звездочек к горизонталю: < 70° > 70°	1 1,25
Коэффициент монтажа передачи	$k_{рег}$	Передвигающиеся опоры Наличие нажимного ролика или оттяжных звездочек (не более двух) Нерегулируемое натяжение	1 1,15 1,25
Коэффициент смазки	$k_{см}$	Непрерывная смазка в масляной ванне ($v_{ц} = 2 \div 9$ м/с) и циркуляционно-струйная смазка ($v_{ц} \geq 6$ м/с) Регулярная капельная или внутришарнирная смазка Периодическая смазка	0,8 1 1,5
Коэффициент режима работы	$k_{рег}$	Односменная Двухсменная Трехсменная	1 1,25 1,45

Из соотношения (2) можно определить предельную полезную нагрузку (в кгс), передаваемую цепью,

$$P = \frac{[p]_н F_{оп} K_m}{K_э} \quad (3)$$

и предельную мощность (в кВт)

$$W = \frac{[p]_н F_{оп} K_m v_{ц}}{102 K_э}, \quad (4)$$

где $v_{ц} = z_1 n_1 t_1 = z_2 n_2 t_2$ — расчетная скорость движения цепи, м/с; $[p]_н$ — допускаемое давление (табл. 5); K_m — коэффициент, учитывающий число рядов цепи m :

$$K_m \dots \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dots & 1,7 & 2,5 & 3 \end{matrix}$$

С учетом соотношения (4) определим шаг (в мм) роликовой цепи при $F_{оп} = 0,28 t^2$:

$$t = 280 \sqrt[3]{\frac{W K_э}{[p]_н z_1 n_1 K_m}}, \quad (5)$$

где n_1 и z_1 — соответственно частота вращения и число зубьев ведущей звездочки.

Следует принимать цепь с наименьшим шагом, допустимым для заданной нагрузки. Допускаемые давления, установленные на основе многолетнего опыта эксплуатации передач, гарантируют срок службы цепей ~15 000 ч при норме предельного износа $\delta t = 3\%$, если передача эксплуатируется в нормальных условиях ($K_э = 1$).

5. Допускаемое давление в шарнирах в зависимости от частоты вращения малой звездочки (в об/мин)

t , мм	$[p]_н$ (в кгс/мм ²) при частоте вращения											
	< 50	200	400	600	800	1000	1200	1600	2000	2400	2800	3200
12,7—15,875 19,05—25,4 30—38,1 40—50,8	3,5	3,15	2,85	2,6	2,4	2,25	2,1	1,85	1,65	1,5	1,4	—
	3,5	3	2,6	2,35	2,1	1,9	1,75	1,5	—	—	—	—
	3,5	2,9	2,4	2,1	1,85	1,65	1,5	—	—	—	—	—
	3,5	2,6	2,1	1,75	1,5	—	—	—	—	—	—	—
12,7—15,875 19,05—25,4 31,75	2	1,8	1,65	1,5	1,4	1,3	1,2	1,05	0,95	0,85	0,8	0,7
	2	1,7	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0	0,85	0,75	—	—	—
	2	1,65	1,4	1,2	1,05	0,95	0,7	—	—	—	—	—

Роликовые цепи при $z_1 = 15 \div 30$

Зубчатые цепи

6. Предельная частота вращения (об/мин) и давление (кгс/мм²) при расчете на выносливость

Число зубьев малой звездочки	Шаг цепи t , мм											
	9,525	12,7	15,875	19,05	25,4	31,75	38,1	44,75	50,8			
15 20 25 30 35 40 45	$n_{пр}$	1850	1930	2010	2090	2170	2240	2300	2350	2400	2450	2500
	$[p]_н$	2,13	2,18	2,22	2,25	2,27	2,29	2,31	2,33	2,35	2,37	2,39
	$n_{пр}$	1500	1550	1600	1650	1700	1750	1800	1850	1900	1950	2000
	$[p]_н$	2,2	2,25	2,27	2,29	2,31	2,33	2,35	2,37	2,39	2,41	2,43
	$n_{пр}$	1300	1350	1400	1450	1500	1550	1600	1650	1700	1750	1800
50,8	$n_{пр}$	800	840	870	900	920	940	950	960	970	980	990
	$[p]_н$	2,24	2,29	2,31	2,33	2,35	2,37	2,39	2,41	2,43	2,45	2,47
	$n_{пр}$	680	710	730	760	780	800	810	820	830	840	850
	$[p]_н$	2,2	2,25	2,27	2,29	2,31	2,33	2,35	2,37	2,39	2,41	2,43
	$n_{пр}$	530	550	570	590	610	630	650	670	690	710	730

Примечание. Срок службы цепи $15 \cdot 10^3$ ч. Данные таблицы получены при условии, что внутренняя пластина и ролики имеют одинаковую усталостную прочность.

При расчете зубчатых цепей с шарнирами качения по заданной полезной нагрузке P (в кгс) или мощности W (в кВт), а также по шагу и скорости определяют ширину цепи (для $v_{ц} < 10$ м/с)

$$B = \frac{2,5P\sqrt[3]{v_{ц}}K_{\sigma}}{t} = \frac{250WK_{\sigma}}{t\sqrt[3]{v_{ц}^2}} \quad (6)$$

Если $v_{ц} \geq 10$ м/с, то расчетную силу или мощность в формуле (6) следует умножить на коэффициент, равный $1 + \frac{0,1qv_{ц}}{W}$, где q — масса 1 м цепи. При расчете передач принимают $K_{\sigma} = k_{\sigma}$, так как информация о значениях других частных коэффициентов, входящих в формулу для определения K_{σ} , пока не накоплена.

Усталостная прочность. Высоконагруженные и обильно смазываемые передачи, работающие при низких и средних скоростях ($v_{ц} < 15$ м/с) и переменных нагрузках, часто выходят из строя вследствие усталостного разрушения пластин по проушинам, что объясняется высоким коэффициентом концентрации напряжений в этой области и фреттинг-коррозией в прессовых соединениях валиков с пластинами.

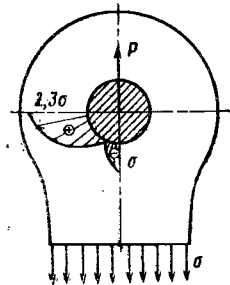


Рис. 6. Схема распределения напряжений в пластине

При высоких скоростях цепи ($v_{ц} > 15$ м/с) существенно возрастают ударные нагрузки при входе в зацепление звена с зубом звездочки. В результате даже при небольших нагрузках наблюдаются разрушения звеньев от раскалывания роликов, ослабления прессовых соединений валиков и пластин. Элементы цепи рассчитывают на усталость по общепринятой методике. Запас прочности по переменным напряжениям определяют из соотношения

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{k_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma}} + \psi_{\sigma} \sigma_m}$$

где σ_{-1} — предел выносливости материала при симметричном цикле; ϵ_{σ} — коэффициент, учитывающий влияние масштаба эффекта, для цепей $\epsilon_{\sigma} = 1$; β_{σ} — коэффициент, характеризующий состояние поверхности, для пластин с неупрочненными отверстиями $\beta = 1$, для пластин с упрочненными дорнованием отверстиями $\beta = 1,2 \div 1,4$; ψ_{σ} — коэффициент, характеризующий чувствительность материала к асимметрии цикла.

В цепных передачах обычно натяжение цепи невелико, $\sigma_m = 0,5 \sigma_a$, а $\psi_{\sigma} = 0,1 \div 0,12$. В связи с этим запас прочности можно определять, не учитывая влияния среднего напряжения, по формуле

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}\beta_{\sigma}}{\sigma_a k_{\sigma}} \quad (7)$$

Эффективный коэффициент концентрации напряжений

$$k_{\sigma} = 1 + q(\alpha_{\sigma} - 1),$$

где q — коэффициент, характеризующий чувствительность материала к концентрации напряжений, принимают $q = 0,4 \div 0,6$; α_{σ} — теоретический коэффициент концентрации напряжений. Для пластин с отверстием при $\frac{d}{h} = 0,3 \div 0,5$ (см. рис. 2) $\alpha_{\sigma} = 2,15 \div 2,35$ (рис. 6). С учетом посадки пластин на втулки и валики, а также изгиба пластин принимают $\alpha_{\sigma} = 2,8 \div 3$.

Амплитуда переменных напряжений в сечении пластины по проушинам (см. рис. 6)

$$\sigma_a = \frac{P_{\max}}{4S(h-d)} \quad (8)$$

где P_{\max} — максимальная полезная окружная нагрузка; S — толщина пластины; h — ширина пластины; d — диаметр втулки или валика (см. табл. 1 и рис. 2).

Запас прочности $n_{\sigma} > 3$.

В ряде стран усталостную прочность цепей оценивают по допускаемому (в условиях переменных нагрузок) давлению в шарнире — критерию подобия, отражающему опыт эксплуатации цепных передач. С учетом соотношения (8) давление в шарнире

$$p_y = \frac{P_{\max}}{F_{оп}} = \sigma_a \frac{4S(h-d)}{F_{оп}} \leq [p]_y'$$

Принимая во внимание равенство (7), получаем

$$[p]_y' = \frac{\sigma_{-1}\beta_{\sigma}}{k_{\sigma}n_{\sigma}} \frac{4S(h-d)}{F_{оп}} \quad (9)$$

Усталостная прочность роликов зависит от контактных давлений между роликами и зубьями звездочек, распределения нагрузки между зубьями звездочки и других факторов. Для обеспечения усталостной прочности значения допускаемых давлений уточняют с учетом этих факторов. В табл. 6 приведены значения $[p]_y'$, используемые в расчетах.

Для обеспечения прочности динамически нагруженных передач необходимо

$$p_y = \frac{P_{\max}K_{\sigma}}{F_{оп}K_{\sigma}K_m} \leq [p]_y' \quad (10)$$

где K_{σ} — коэффициент качества цепи, для цепей ПРЛ $K_{\sigma} = 1$, для цепей ПР $K_{\sigma} = 0,85$.

При нестационарных нагрузках в выражение (10) вместо P_{\max} следует подставлять $P_{\text{экв}}$.

Для повышения усталостной прочности пластин отверстия упрочняют дорнованием, путем обжатия в специальных матрицах и т. п.

ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ЭКСПЛУАТАЦИИ ПЕРЕДАЧ

Звездочки к приводным роликовым и втулочным цепям рекомендуется изготавливать в соответствии с ГОСТ 591—69.

Звездочки тихоходных передач ($v_{ц} \leq 2$ м/с) можно изготавливать из чугуна СЧ 21—40 с закалкой. В сельскохозяйственном машиностроении используют антифрикционный и высокопрочный чугун с закалкой.

В общем машиностроении звездочки или венцы изготавливают из углеродистых и легированных сталей 45, 40X, 40XH, 35XГСА с последующей общей или поверхностной закалкой до HRC 45—55, а также из низкоуглеродистых сталей 15, 20X, 12XН3А с последующей цементацией на 1—1,5 мм и закалкой до HRC 55—60. Венцы малонагруженных передач иногда изготавливают из полиамидов.

Расположение передач в вертикальной плоскости может быть произвольным. Наиболее целесообразным является горизонтальное или наклонное (под углом 40—45°) расположение линии, соединяющей оси звездочек. Если вертикальное расположение передачи вызвано конструктивными соображениями, то следует обеспечить небольшое взаимное смещение звездочек в горизонтальном направлении для обеспечения некоторого самонатяжения цепи.

Ведущей может быть верхняя или нижняя ветвь. Верхняя ветвь должна быть ведущей в горизонтальных передачах с большим межосевым расстоянием ($a > 60 t$) и малыми числами зубьев звездочек во избежание соприкосновения ветвей, а также в передачах с $a < 30 t$ при $u < 2$ и в вертикальных передачах для предотвращения захвата провисающей верхней ветвью дополнительных зубьев звездочки.

Регулирование натяжения цепей является эффективным средством повышения долговечности передачи. Предварительное натяжение устанавливают по стреле провисания f ($f \approx 0,02 a$ для горизонтальных и наклонных передач; $f = (0,01 + 0,015) a$ для передач, близких к вертикальным).

Для устранения вредного влияния вытяжки цепей и сохранения предварительного натяжения и провисания в процессе эксплуатации необходимо периодически регулировать натяжение. С этой целью предусматривают либо возможность перемещения опор, либо использование натяжных роликов или звездочек. Натяжные ролики и звездочки рекомендуется устанавливать на ведомой ветви в месте ее наибольшего провисания. Для уменьшения вибраций используют ролики оттяжные, которые устанавливают на ведущей ветви с внутренней стороны.

При монтаже передачи необходимо обеспечить параллельность валов, установку и надежное закрепление звездочек в одной плоскости без перекосов (с помощью линейки и уровней). Максимальное отклонение (в мм) звездочек от плоскости принимают равным $(0,04-0,08) \sqrt{a}$, а предельный угол смещения (в градусах) $\approx \frac{(2,3-4,6)}{\sqrt{a}}$ (a — межосевое расстояние, мм). После монтажа цепи проверяют правильность хода передачи.

Смазка может быть периодической (с помощью ручной масленки или капельным способом), а также непрерывной (окунанием в масляную ванну, циркуляционной струей от насоса и т. п.). Периодическая смазка обеспечивает нормальную работу тихоходных передач (скорость цепи $v_{ц} < 2$ м/с). При капельной смазке и тех же условиях допускается скорость цепи $v_{ц} < 6$ м/с. Масляная ванна обеспечивает хорошую работу передачи при $v_{ц} = 6 \div 8$ м/с. При скорости $v_{ц} > 8$ м/с передачи должны работать в условиях циркуляционной смазки, которая снижает интенсивность развития фреттинг-коррозии и обеспечивает эффективное охлаждение цепи.

ПОРЯДОК РАСЧЕТА ПЕРЕДАЧИ

Рассмотрим следующий пример. Рассчитать горизонтальную цепную передачу при $W = 10$ кВт, $n_1 = 760$ об/мин, $n_2 = 365$ об/мин, $\delta t = 3\%$; нагрузка спокойная.

1. Выбираем числа зубьев звездочек;

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{760}{365} = 2,08;$$

$$z_1 = 29 - 2u = 29 - 2 \cdot 2,04 \approx 25;$$

$$z_2 = uz_1 = 25 \cdot 2,04 \approx 52.$$

2. По табл. 5 принимаем ориентировочно $[p]_{н} \approx 2,10$ кгс/мм². Для однорядной цепи $K_m = 1$. По табл. 4 принимаем $k_d = 1$, $k_a = 1$, $k_n = 1$, $k_{рег} = 1,25$, $k_{см} = 1$, $k_{реж} = 1$. При этих условиях $K_B = 1,25$. Затем определяем шаг цепи

$$t = 280 \sqrt[3]{\frac{WK_B}{[p]_{н} z_1 n_1 K_m}} = 280 \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 1,25}{2,10 \cdot 25 \cdot 760 \cdot 1}} \approx 19,1 \text{ мм.}$$

3. По табл. 1 выбираем цепь ПР-19,05-3180; $t = 19,05$ мм, $F_{оп} = 105$ мм², $Q_{мин} = 3180$ кгс; $q = 1,9$ кг.

Для этой цепи по табл. 5 находим $[p]_{н} \approx 2,2$ кгс/мм². Так как предварительно принятое значение $[p]_{н}$ меньше допускаемого, то выбранная цепь будет удовлетворять условию износостойкости (5).

4. Определяем скорость цепи

$$v_{ц} = \frac{z_1 n_1 t}{60 \cdot 1000} = \frac{25 \cdot 760 \cdot 19,05}{60 \cdot 1000} = 6 \text{ м/с.}$$

При этой скорости передача должна работать в условиях циркуляционной смазки.

5. Определяем полезную нагрузку

$$P_{max} = 102 \frac{W}{v_{ц}} = 102 \frac{10}{6} = 155 \text{ кгс.}$$

Проверяем статическую грузоподъемность цепи. По табл. 1 находим $Q_{мин} = 3180$ кгс. Следовательно, $P_{max} < \frac{Q_{мин}}{k}$.

6. Определяем амплитуду переменных напряжений

$$\sigma_a = \frac{P_{max}}{4S(h-d)} = \frac{155}{4 \cdot 2,2(18,2-5,96)} \approx 1,9 \text{ кгс/мм}^2.$$

7. Находим запас прочности по переменным напряжениям при $k_{\sigma} = 2,8$ и $\sigma_{-1} = 20$ кгс/мм²:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a k_{\sigma}} = \frac{20}{1,9 \cdot 2,8} \approx 3,8 > 3.$$

8. Определяем давление в шарнире при $K_{д} = 1$ и $K_m = 1$:

$$p_y = \frac{P_{max} K_B}{F_{оп} K_{д} K_m} = \frac{155 \cdot 1,25}{105 \cdot 0,1 \cdot 1} \approx 1,83 \text{ кгс/мм}^2.$$

Полученное значение $p_y < [p]_y = 2,31$ кгс/мм² (см. табл. 6). Работоспособность цепи обеспечена.

9. Предварительно определяем межосевое расстояние $a = 50t = 50 \cdot 19,05 = 952,5$ мм.

10. Находим потребное число звеньев:

$$\omega \approx 2 \frac{a}{t} + \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2 \frac{t}{a} = 2 \cdot 50 + \frac{25 + 52}{2} + \left(\frac{52 - 25}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{50} = 138,87.$$

Это значение округляем до ближайшего четного числа и принимаем $\omega = 138$.

11. Определяем окончательное расстояние между звездочками;

$$a = \frac{t}{4} \left[\omega - \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{\left(\omega - \frac{z_1 + z_2}{2} \right)^2 - 8 \left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2} \right] =$$

$$= \frac{19,05}{4} \left[138 - 38,5 + \sqrt{(138 - 38,5)^2 - 8 \left(\frac{27}{2 \cdot 3,14} \right)^2} \right] = 952 \text{ мм.}$$

12. Рассчитываем стрелу предварительного провисания ветви $f = 0,02 a = 0,02 \cdot 952 \approx 19$ мм.

РАСЧЕТ ДЕТАЛЕЙ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

РАСЧЕТ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ

Коленчатые валы разрушаются от усталости в местах наибольшей концентрации напряжений, обычно у выхода отверстия для смазки на коренных и шатунных шейках вала и у галтелей в сопряжениях шеек со щеками.

Нагрузки. Основными нагрузками являются усилия от давления газа в цилиндре двигателя, передающиеся через поршень и шатун на вал, нагрузки от инерционных сил движущихся деталей кривошипно-шатунного механизма и вибрационные нагрузки, возникающие при колебаниях вала.

Давление газа в цилиндре p_r для различных углов поворота коленчатого вала α задается индикаторной диаграммой. Сила давления газа на поршень

$$P_r = (p_r - p_0) F_p, \quad (1)$$

где p_0 — давление в картере двигателя; F_p — площадь поршня.

Эта сила передается через шатун на шатунную шейку коленчатого вала. Из условия равновесия шатуна следует (рис. 1):

$$N_r = P_r \operatorname{tg} \beta; \quad (2)$$

$$K_r = \frac{P_r}{\cos \beta}; \quad (3)$$

$$T_r = P_r \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}; \quad (4)$$

$$Z_r = P_r \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (5)$$

В опорах вала возникает реакция K'_r , которую также можно разложить на P'_r , N'_r или T'_r , Z'_r .

Крутящий момент от окружного усилия T_r

$$M_k = T_r R = P_r R \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (6)$$

Такой же момент, но с обратным знаком, который создают силы N_r и N'_r , передается на подmotorную раму двигателя.

В движущихся деталях кривошипно-шатунного механизма возникают силы и моменты сил инерции

$$P_j = -m \frac{dv}{dt}; \quad M_j = -J \frac{d\omega}{dt}, \quad (7)$$

где m , J — масса и момент инерции детали; $\frac{dv}{dt}$ — линейное ускорение центра тяжести; $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение.

Массу шатуна $m_{ш}$, совершающего сложное движение, при расчетах условно заменяют двумя эквивалентными массами, расположенными на осях головок шатуна (рис. 2):

$$m_{шв} = m_{ш} \frac{L_H}{L}; \quad m_{шн} = m_{ш} \frac{L_B}{L}. \quad (8)$$

Для автотракторных двигателей $L_H/L = 0,2 + 0,3$; для стационарных двигателей $L_H/L = 0,3 + 0,4$.

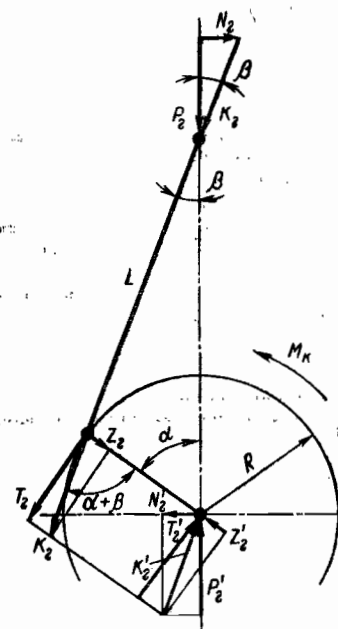


Рис. 1. Схема сил, действующих на кривошипно-шатунный механизм

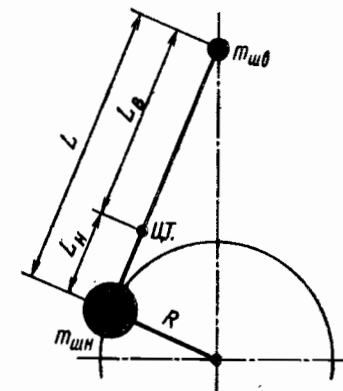


Рис. 2. К определению эквивалентных масс шатуна

Это позволяет считать, что к верхней головке шатуна приложена сила инерции

$$P_j = -(m_{шв} + m_n) \frac{dv_n}{dt}, \quad (9)$$

где m_n , v_n — соответственно масса и скорость движения поршня.

Ускорение поршня

$$\frac{dv_n}{dt} \approx R\omega^2 \left(\cos \alpha + \frac{R}{L} \cos 2\alpha \right). \quad (10)$$

Сила P_j вызывает в деталях кривошипно-шатунного механизма усилия N_j , K_j , T_j , Z_j и момент M_j , которые определяют по формулам (2) — (6), если заменить в них P_r на P_j .

На шатунную шейку действует центробежная сила инерции

$$P_{ш} = (m_{шн} + m_{шш}) R\omega^2, \quad (11)$$

где $m_{шш}$ — масса шатунной шейки.

Центробежную силу щеки

$$P_{щ} = m_{щ} R_{щ} \omega^2 \quad (12)$$

для простоты считают приложенной на радиусе шатунной шейки. Противовесы также вызывают центробежную силу инерции $P_{пр}$, плоскость действия которой может не совпадать с плоскостью колена.

Вибрационные нагрузки, связанные с колебаниями вала, определяют экспериментально; они не входят в проектный расчет.

Просуммировав для каждого значения угла поворота коленчатого вала α нагрузки от газовых и инерционных сил, например $Z = Z_r + Z_j - P_{ш}$, $N = N_r + N_j$, $T = T_r + T_j$ и т. д., строят графики изменения сил за полный цикл двигателя.

При расчете коленчатые валы считают для простоты разрезными, т. е. каждое колено рассматривают как отдельную двухопорную балку, на которую со стороны соседних колен передаются только крутящие моменты, причём

$$M_{k(i)} = M_{k(i-1)} + TR; \quad M_{k1} = 0. \quad (13)$$

Расчетная схема колена и действующие нагрузки показаны на рис. 3, а типичные эпюры изгибающих и крутящих моментов — на рис. 4—6.

Номинальные напряжения. В коренных шейках изгибающими напряжениями обычно пренебрегают и вычисляют только напряжения кручения.

В шатунных шейках определяют напряжения кручения и напряжения изгиба. Напряжения изгиба в плоскости колена

$$\sigma'_{иш} = - \frac{0,5Za + (P_{пр} - P_{ш})b}{W_{иш}}, \quad (14)$$

где a, b — см. рис. 3; $W_{иш}$ — момент сопротивления изгибу сечения шейки. Напряжение изгиба в перпендикулярной плоскости

$$\sigma''_{иш} = \frac{Ta}{2W_{иш}}. \quad (15)$$

Номинальное напряжение у отверстия

$$\sigma_{иш} = \sigma'_{иш} \cos \gamma + \sigma''_{иш} \sin \gamma, \quad (16)$$

где γ — угол между плоскостью колена и плоскостью Π , проходящей через масляное отверстие (рис. 3).

В щеках наиболее опасными являются точки перехода щек в шейки вала (точки 1 и 2 на рис. 3 и 7). В этих местах действуют напряжения изгиба

$$\sigma_{иш1,2} = \pm \frac{(0,5Z + P_{пр} - P_{ш})b}{W_{иш1,2}} \quad (17)$$

(плюс относится к точке 2, минус — к точке 1) и напряжения растяжения (сжатия)

$$\sigma_{рщ} = - \frac{0,5Z - P_{ш}}{F_{щ}}. \quad (18)$$

Здесь $W_{иш1,2}$ — момент сопротивления изгибу сечения щеки в точке i ; $F_{щ}$ — площадь ее сечения.

Разрушение щек реже начинается с угловых точек, где складываются напряжения $\sigma_{рщ} + \sigma_{иш1,2}$, определяемые по формулам (17) и (18), и напряжения

$$\sigma_{иш3,4} \approx \pm \frac{M_{к(i+1)}}{W_{иш3,4}}, \quad (19)$$

где плюс относится к точке 4, минус — к точке 3. Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении щеки показано на рис. 7. Напряжение кручения в щеке обычно бывает незначительным.

Подставляя в формулы (14) — (19) наибольшие и наименьшие (с учетом знака) значения силовых факторов в течение цикла, определяют амплитуды σ_a, τ_a , по которым ведут расчет вала на выносливость. Влияние средних напряжений обычно невелико.

Коэффициенты неравномерности и концентрации напряжений. Из-за сложной конфигурации коленчатого вала фактическое распределение напряжений в шейках значительно отличается от номинального, что учитывают экспериментальными коэффициентами β [6]. Основную роль играют коэффициенты, значения которых принимают в соответствии с табл. 1 и рис. 8—10.

Величина перекрытия диаметров определяется формулой

$$\Delta = 0,5 (d_k + d_{ш}) - R, \quad (20)$$

а коэффициенты $\beta_{и1}, \beta_{и2}, \beta_{и3}$ — приближенно принимают (см. рис. 3);

$$\beta_{и1} = 1,0 - 0,5 \frac{\Delta}{d}; \quad \beta_{и2} = 1,9 - 3 \frac{B}{d}; \quad \beta_{и3} = 1,7 - 0,4 \frac{h}{d}. \quad (21)$$

Непосредственно у масляного отверстия возникает местная концентрация напряжений, которую учитывают эффективными коэффициентами концентрации:

$$\left. \begin{aligned} \text{при изгибе} \quad k_{\sigma} &= 1,85 + 0,0057 (\sigma_B - 40); \\ \text{при кручении} \quad k_{\tau} &= 1,70 + 0,0035 (\sigma_B - 40). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

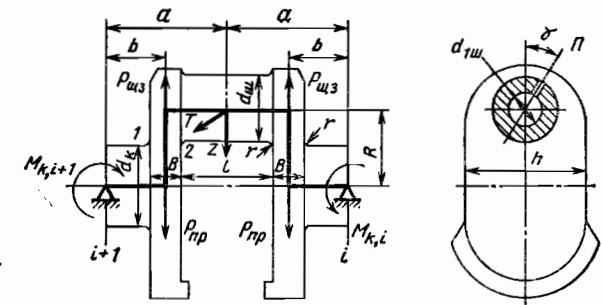


Рис. 3. Расчетная схема коленчатого вала

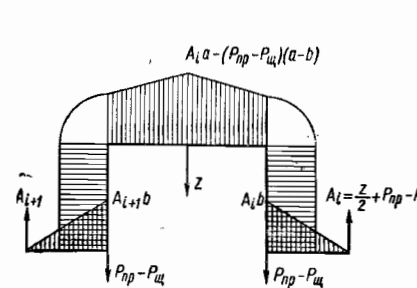


Рис. 4. Эпюра изгибающих моментов в плоскости колена

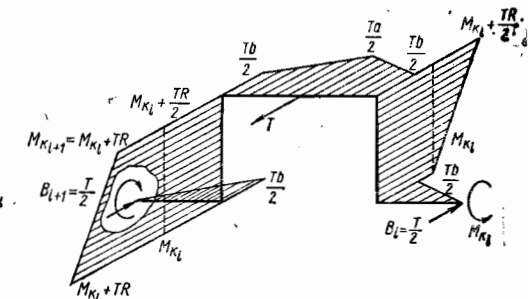


Рис. 5. Эпюра изгибающих моментов в плоскостях, перпендикулярных к плоскости колена

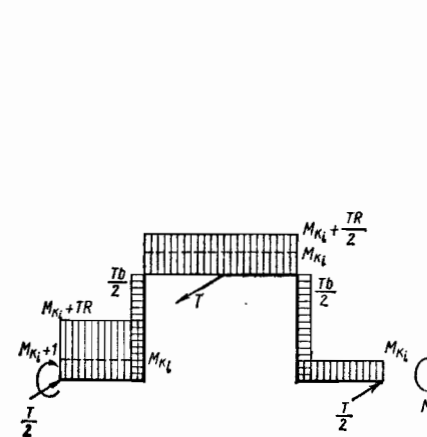


Рис. 6. Эпюра крутящих моментов

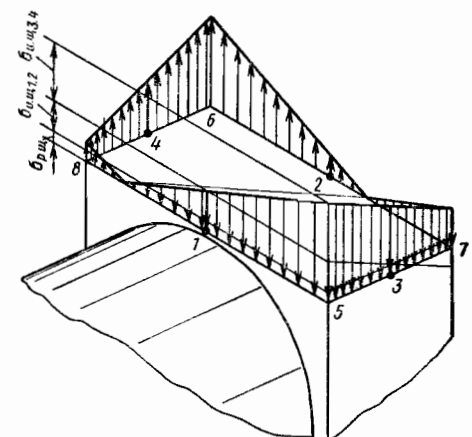


Рис. 7. Характер распределения нормальных напряжений в поперечном сечении щеки коленчатого вала

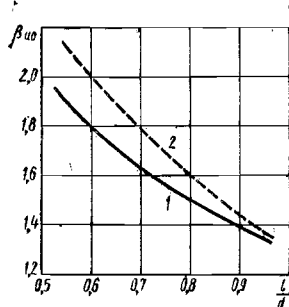


Рис. 8. Зависимость коэффициента β_{10} от отношения длины шейки l к ее диаметру d :
1 — изгиб в плоскости колена;
2 — изгиб в перпендикулярной плоскости

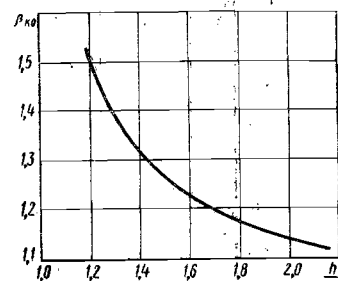


Рис. 9. Зависимость коэффициента β_{k0} от отношения ширины щеки h к диаметру шейки d

где σ_v в кгс/мм². Коэффициент влияния абсолютных размеров определяют по рис. 13, гл. 2.

1. Коэффициенты неравномерности напряжений в шейках β и концентрации напряжений в галтели α

Изгиб	Кручение
$\beta_n = \beta_{10}\beta_{11}\beta_{12}\beta_{13}\beta_{отн}$	$\beta_k = 1 + (\beta_{k0} - 1)\beta_{отн}$
β_{10} — по рис. 8 $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}$ — по формулам (21)	β_{k0} — по рис. 9
$\beta_{отн}$ — по рис. 10	
$\alpha_n = \alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}$	$\alpha_k = \alpha_{k0}\alpha_{k1}$
α_{10} — по рис. 11, а α_{11} — по рис. 11, б α_{12} — по формуле (23)	α_{k0} — по рис. 12, а α_{k1} — по рис. 12, б

Теоретические коэффициенты концентрации напряжений в галтели сопряжения щеки с шейками (рис. 3) принимают в соответствии с табл. 1 и рис. 11, 12 и относят их при изгибе к номинальным напряжениям изгиба в середине широкой стороны щеки, а при кручении — к номинальным напряжениям в шейке. Коэффициент

$$\alpha_{12} = 0,6 + 0,25 \frac{h}{d} \quad (23)$$

При радиусе галтели $r \geq 3$ мм коэффициент чувствительности материала валов обычно достигает значений $q = 0,9 \div 0,95$.

Материалы и запасы прочности. Для коленчатых валов применяют стали 35, 45, 40Х, 35ХМ, 18Х2Н4МА и др. Литые валы изготавливают из модифицированных чугунов, а также из стали. Шейки подвергают поверхностной закалке до твердости HRC 50—60.

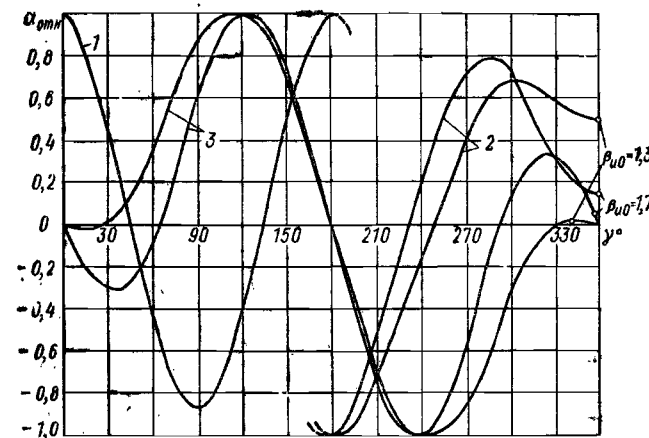


Рис. 10. Диаграмма зависимости коэффициента $\alpha_{отн}$ от угла γ :
1 — для кручения; 2 — для изгиба в плоскости колена; 3 — для изгиба в перпендикулярной плоскости

Запасы усталостной прочности для высокооборотных двигателей составляют $n = 1,5 \div 3,0$, для средне- и низкооборотных $n = 2 \div 6$.

Пример. В соответствии с расчетной схемой на рис. 3 вал имеет следующие размеры: $a = 300$ мм, $b = 150$ мм, $B = 100$ мм, $h = 380$ мм, $d_k = d_{ш} = 240$ мм, $d_{1к} = d_{1ш} = 130$ мм, $R = 235$ мм, $r = 25$ мм, $\gamma = 0$. Материал — сталь 45, частота вращения $n = 470$ об/мин, порядок работы цилиндров 1—4—2—6—8—5—7—3. Центробежные силы шек $P_{ш} = 3625$ кгс, $P_{пр} = 0$.

Кривые изменения усилий T и Z по углу поворота вала показаны на рис. 13. Расчет показывает, что наибольшая разность $M_{кmax} - M_{кmin}$ имеет место на шестой коренной шейке между пятым и шестым коленами (рис. 14). Результаты расчета сведены в табл. 2 (см. [1], гл. 4).

В рассматриваемом примере наиболее нагруженной точкой является середина щеки у галтели, причем расчетный запас прочности незначителен.

2. Расчетные значения напряжений и запасов прочности в сечениях вала

Расчетное сечение	Номинальные амплитуды напряжений, кгс/см ²	Коэффициенты концентрации с учетом неравномерности	Запасы прочности
6-я коренная шейка	$\tau_a = 244$	3,47	$n_\tau = 1,65$
6-я шатунная шейка	$\tau_a = 224$	3,47	$n_\tau = 1,80$
	$\sigma_a = 520$	0,90	$n_\sigma = 5,55$ } $n = 1,76$
Щека между ними (в точках 1 и 5, см. рис. 7)	$\sigma_{a1} = 566$	3,46	$n_{\sigma 1} = 1,33$ } $n_1 = 1,13$
	$\tau_{a1} = 244$	2,71	$n_{\tau 1} = 2,12$ }
	$\sigma_{a5} = 817$	1,59	$n_5 = 2,00$

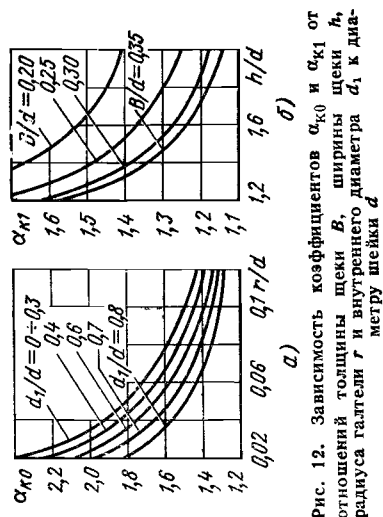


Рис. 12. Зависимость коэффициентов α_{40} и α_{41} от отношения толщины щеки B , ширины щеки h , радиуса галтели r и внутреннего диаметра d_1 к диаметру шейки d

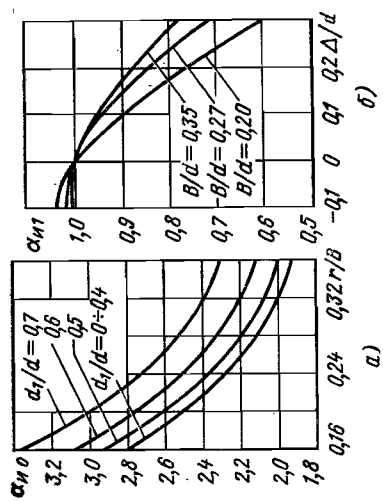


Рис. 11. Зависимость коэффициентов α_{40} и α_{41} от отношения толщины щеки B , перекрытия Δ , радиуса галтели r и внутреннего диаметра d_1 к диаметру шейки d

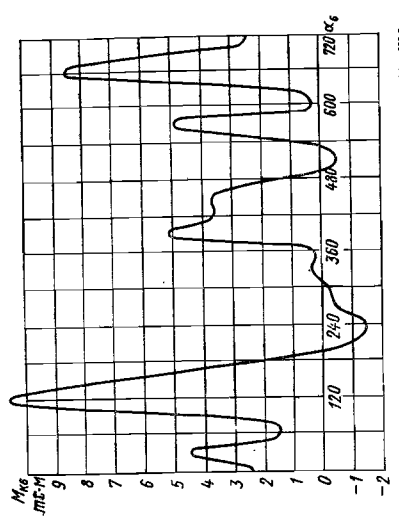


Рис. 14. Изменение крутящего момента на шейке коренной шейки вала по углу поворота

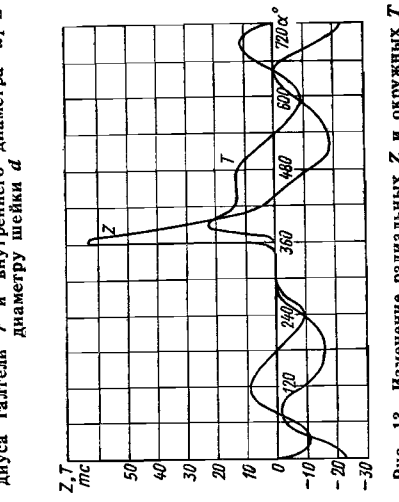


Рис. 13. Изменение радиальных Z и окружных T усилий в зависимости от угла поворота коленчатого вала

РАСЧЕТ ШАТУНОВ

Поршневая головка шатуна. На головку действует переменная по времени сила $K = K_r + K_j$ и постоянное давление от запрессовки втулки. Сила K достигает максимального значения в начале рабочего такта, когда поршень находится у верхней мертвой точки:

$$K_{\max} \approx (\rho_{\Gamma \max} - p_0) F_{\Pi} - (m_{\Pi} + m_{\text{шв}}) R \omega^2 \left(1 + \frac{R}{L}\right). \quad (24)$$

Минимальной (алгебраически) величины K достигает в начале такта всасывания

$$K_{\min} = - (m_{\Pi} - m_{\text{шв}}) R \omega^2 \left(1 + \frac{R}{L}\right). \quad (25)$$

На участке AA (рис. 15) поршневая головка жестко связана со стержнем шатуна, поэтому распределение в ней напряжений носит различный характер в зависимости от направления действия силы. Тензометрирование показывает, что когда сила K сжимает стержень ($K > 0$), нагрузка на нижнюю половину головки распределяется примерно по косинусoidalному закону (рис. 16, а), а когда растягивает ($K < 0$), то нагрузка на верхнюю половину головки распределяется почти равномерно (рис. 16, б). В обоих случаях опасным является сечение вблизи заделки, положение которого определяется углом α ; обычно $\alpha = 90 \pm 140^\circ$.

Рассматривая головку как кривую балку, заделанную в сечении AA и нагруженную, как показано на рис. 16, можно определить изгибающий момент M_α и нормальную силу N_α в заделке (рис. 17).

Напряжение в заделке

$$\sigma = \frac{1}{ah} \left(N_\alpha + \frac{6M_\alpha}{h} \right), \quad (26)$$

где α — ширина; h — толщина стенки головки.

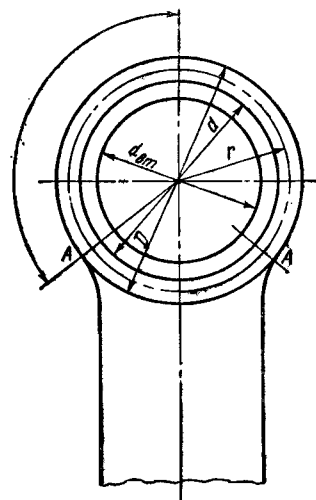


Рис. 15. Схема поршневой головки шатуна

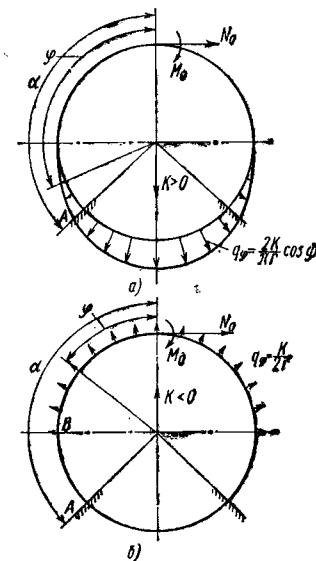


Рис. 16. Расчетные схемы нагружения поршневой головки шатуна: а — при силе K , сжимающей шатуна; б — при силе K , растягивающей шатуна

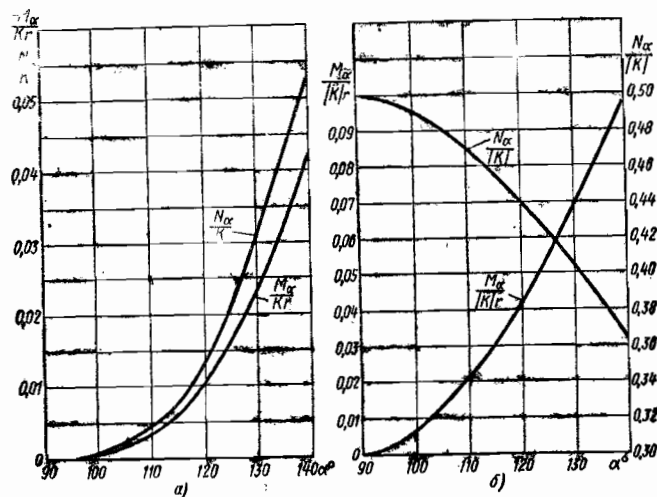


Рис. 17. Зависимость силовых факторов M_α и N_α в сечении заделки от угла α при нагружении поршневой головки шатуна: а — по схеме рис. 16, а; б — по схеме рис. 16, б

На поршневую головку действует также внутреннее давление со стороны запрессованной в нее головки

$$p \approx \frac{E_r [\Delta + (\alpha_{вт} - \alpha_r) T_r d]}{d \left[\frac{D^3 + d^3}{D^2 - d^2} + \nu + \frac{E_r}{E_{вт}} \left(\frac{d^3 + d_{вт}^3}{d^2 - d_{вт}^2} - \nu \right) \right]} \quad (27)$$

где E_r , $E_{вт}$ — модули упругости материалов головки и втулки; Δ — величина натяга при посадке втулки в головку (в холодном состоянии); $\alpha_{вт}, \alpha_r$ — коэффициенты линейного расширения материалов втулки и головки (для бронзы $\alpha_{вт} \approx 18 \cdot 10^{-6} 1^\circ C$, для стали $\alpha_r \approx 10 \cdot 10^{-6} 1^\circ C$); T_r — температура нагрева головки при работе двигателя; ν — коэффициент Пуассона ($\nu \approx 0,3$). Обозначения диаметров D , d и $d_{вт}$ см. рис. 15.

Постоянное напряжение растяжения от внутреннего давления

$$\sigma_p \approx \frac{pr}{h} \quad (28)$$

Материал головки нагружается асимметричным циклом с амплитудой

$$\sigma_a = 0,5 (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (29)$$

и средним напряжением

$$\sigma_m = \sigma_p + 0,5 (\sigma_1 + \sigma_2),$$

где σ_1 — напряжение, соответствующее силе K_{min} , а σ_2 — то же, при силе K_{max} . Рекомендуется иметь запас усталостной прочности не ниже $n = 3$.

Для повышения прочности поршневой головки следует по возможности уменьшать угол α и не располагать масляные отверстия в области заделки.

Стержень шатуна обычно разрушается от усталости по среднему или по минимальному сечению. При расчете минимального сечения принимают

$$\sigma = \frac{K}{F_{min}} \quad (30)$$

где F_{min} — площадь минимального сечения стержня.

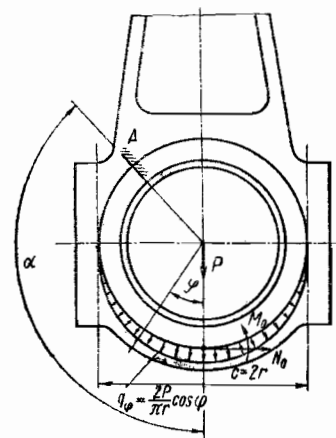


Рис. 18. Расчетная схема кривошипной головки шатуна

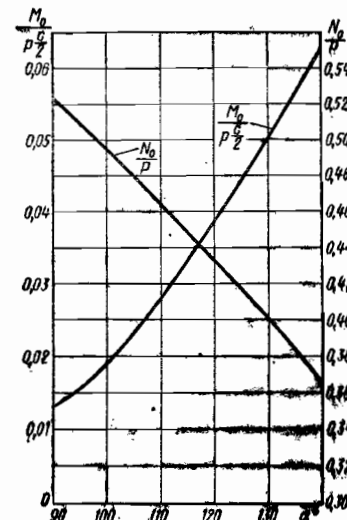


Рис. 19. Зависимость силовых факторов в среднем сечении нижней крышки кривошипной головки шатуна от угла заделки α

В среднем сечении кроме сжатия происходит изгиб, связанный с эксцентриситетом сжимающей нагрузки и прогибом от центробежных сил, перпендикулярных к оси стержня. На сжатие стержень шатуна рассчитывают по полуэмпирическим формулам [4]

$$\sigma_{min} = -\frac{K_{max}}{F_{cp}} \left[1 + 0,000526 \left(\frac{L}{r_x} \right)^2 \right], \quad (31)$$

где F_{cp} — площадь среднего сечения стержня

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F_{cp}}, \quad (32)$$

J_x — момент инерции сечения относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения шатуна, или

$$\sigma_{min} = -\frac{K_{max}}{F_{cp}} \left[1 + 0,000132 \left(\frac{L_1}{i_y} \right)^2 \right], \quad (33)$$

$$L_1 = L - 0,5 (d_1 + d_2), \quad (34)$$

d_1 и d_2 — диаметры отверстий поршневой и кривошипной головки шатуна;

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F_{cp}}; \quad (35)$$

J_y — момент инерции сечения относительно оси, лежащей в плоскости движения шатуна.

Растягивающие напряжения

$$\sigma_{max} = -\frac{K_{min}}{F_{cp}} \quad (36)$$

Запас прочности определяют по наибольшей абсолютной величине σ_{\min} . Рекомендуется иметь $n = 1,8 \div 2,0$.

Кривошипная головка шатуна. Расчет кривошипных головок, которые обычно разрушаются от усталости, носит сравнительный характер. Значения силовых факторов для расчетной схемы, показанной на рис. 18, в среднем (опасном) сечении нижней крышки головки приведены на рис. 19. Здесь P — сила давления на крышку в начале такта всасывания,

$$P \approx (m_{\Pi} + m_{\text{шв}}) R\omega^2 \left(1 + \frac{R}{L}\right) + m_{\text{шв}} R\omega^2. \quad (37)$$

В сравнительных расчетах, приняв $\alpha = 130^\circ = \text{const}$ и учитывая, что часть усилий воспринимает вкладыш, считают

$$\sigma = P \left[\frac{0,025c}{W \left(1 + \frac{J_{\text{вкл}}}{J}\right)} + \frac{0,4}{F + F_{\text{вкл}}}\right], \quad (38)$$

где c — расстояние между болтами ($c \approx 2r$); W — момент сопротивления изгибу крышки; F , $F_{\text{вкл}}$ и J , $J_{\text{вкл}}$ — площади и моменты инерции среднего сечения соответственно для крышки и вкладыша головки.

Напряжения меняются по пульсирующему циклу и при расчете по формуле (38) достигают $\sigma_{\max} = 1000 \div 3000$ кгс/см².

РАСЧЕТ ПОРШНЕВОГО ПАЛЬЦА

Поршневой палец испытывает сложную деформацию, которую условно расчлениют на изгиб, срез и овализацию (рис. 20).

В плавающих пальцах напряжения меняются почти по симметричному циклу. Расчетная нагрузка [5]

$$P = (p_{\Gamma \max} - p_0) F_{\Pi} - m_{\Pi} R\omega^2 \left(1 + \frac{R}{L}\right). \quad (39)$$

Расчетные напряжения в пальце определяют согласно рис. 21. Напряжения при изгибе в продольном направлении

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{P(l + 2b - 1,5a)}{1,2d^3(1 - \alpha^4)}, \quad (40)$$

где d и d_1 — соответственно наружный и внутренний диаметр пальца; $\alpha = d_1/d$.

Напряжение среза в сечении между бобышкой поршня и головкой шатуна

$$\tau = 0,85 \frac{P}{d^2} \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 - \alpha^4}. \quad (41)$$

Если напряжения овализации условно считать равномерно распределенными по длине пальца, то при схеме нагружения по рис. 21, б

$$\left. \begin{aligned} M_{\varphi} &= \frac{Pr}{2} \left[\cos \varphi + \frac{2}{\pi} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) - \frac{8}{\pi^2} \right]; \\ N_{\varphi} &= -\frac{P}{2} \left[\cos \varphi + \frac{2}{\pi} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \right], \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

а напряжения на внутренних волокнах

$$\sigma_i = \frac{1}{lh} \left(N - \frac{2M}{h} \frac{6r - h}{2r - h} \right), \quad (43)$$

где h — толщина стенки пальца.

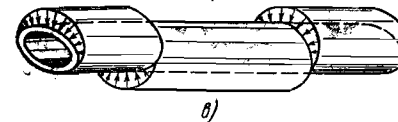
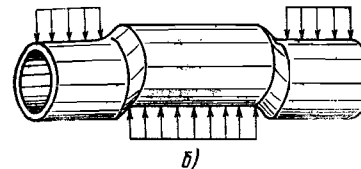
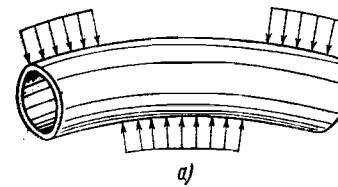
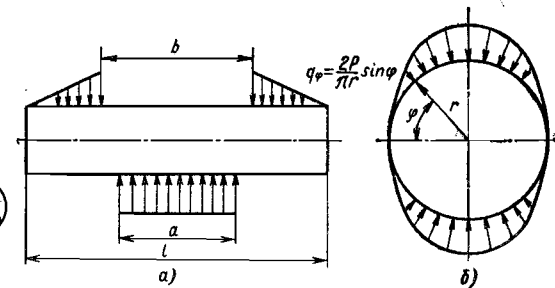


Рис. 20. Виды деформаций поршневого пальца: а — изгиб в продольном направлении; б — срез; в — овализация

Рис. 21. Расчетные схемы нагружения поршневого пальца:

а — при расчете на изгиб и срез; б — при расчете на овализацию



Максимальные напряжения от овализации возникают при $\varphi = 90^\circ$.

Действительное распределение нагрузки на палец учитывают экспериментальным поправочным коэффициентом

$$\lambda = 1,5 - 15(\alpha - 0,4)^3, \quad (44)$$

который можно считать действительным при $0,4 \leq \alpha \leq 0,8$.

Тогда расчетная формула для максимальных напряжений овализации принимает вид [5]

$$\sigma_{i \max} = \sigma_i \lambda = \frac{P}{ld} \left[\frac{0,174(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)}{\alpha(1 - \alpha)^2} - \frac{0,636}{1 - \alpha} \right] [1,5 - 15(\alpha - 0,4)^3]. \quad (45)$$

Рекомендуемые запасы усталостной прочности $n \geq 2$.

В транспортных двигателях $\sigma_{\text{и}} = 2500 \div 5000$ кгс/см²; $\tau = 1200 \div 2000$ кгс/см²; $\sigma_{i \max} = 1200 \div 2000$ кгс/см².

Прочность пальца можно повысить химико-термической обработкой его поверхностей. Азотирование повышает прочность пальца на 35—45%, цементация на — 15—20%. Недостаточная чистота обработки внутренней поверхности пальца может существенно понизить его прочность.

РАСЧЕТ ПОРШНЕВЫХ КОЛЕЦ

Материалом для поршневых колец обычно служит серый чугун.

Для возможности сборки и большей податливости кольца делают разрезными. Чтобы обеспечить плотное прилегание кольца к цилиндру во время работы, кольцо в свободном состоянии делают большего диаметра, чем цилиндр. Поэтому при владывании колец в цилиндр в них возникают напряжения σ , величина которых ограничивается условием, чтобы при длительной работе не возникла ползучесть материала, которая может привести к уменьшению давления колец на цилиндр. При надевании кольца на поршень оно упруго разгибается и в нем одновременно возникают напряжения обратного знака σ' , которые не должны приводить к значительным остаточным деформациям.

Распределение давлений по кольцу носит сложный характер и зависит от формы кольца в свободном состоянии и от соотношений жесткости кольца и цилиндра.

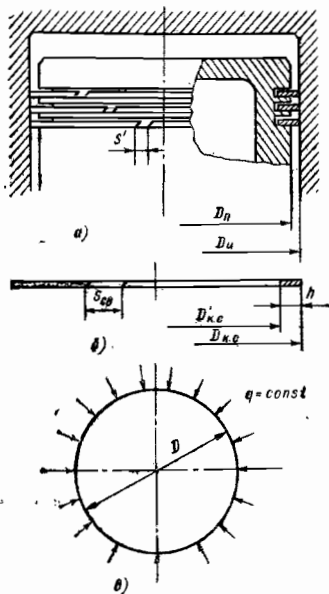


Рис. 22. К расчету поршневого кольца: а — кольца вставлены в цилиндр; б — кольцо в свободном состоянии; в — схема нагружения кольца

Специальным выбором начальной формы кольца можно добиться, чтобы при работе оно прижималось к цилиндру достаточно равномерно по всей поверхности.

Для приближенной оценки напряжений σ в кольце можно принять схему нагружения, показанную на рис. 22, в.

Горизонтальное перемещение свободного конца под действием равномерно распределенной нагрузки q

$$f = \frac{3\pi D^4 q}{32 EJ} \quad (46)$$

Полагая $f = \frac{\Delta s}{2}$, где Δs — разность зазоров кольца в свободном состоянии и после установки в цилиндр, и учитывая, что максимальный изгибающий момент $M = 0,5 D^2 q$, получим

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{8EJ \Delta s}{3\pi D^2 W} \quad (47)$$

Для кольца прямоугольного сечения толщиной h в радиальном направлении имеем

$$\sigma = \frac{4Eh \Delta s}{3\pi D^2} \quad (48)$$

Если цилиндр достаточно жесткий, то $\Delta s \approx \pi (D_{к.с} - D_{ц})$, (49)

где $D_{к.с}$ — наружный диаметр кольца в свободном состоянии; $D_{ц}$ — внутренний диаметр цилиндра.

По формуле (48) можно также определять напряжения при надевании кольца на поршень σ' , если считать $\Delta s \approx \pi (D_{п} - D'_{к.с} + \delta)$, где $D_{п}$ — наружный диаметр поршня; $D'_{к.с}$ — внутренний диаметр кольца в свободном состоянии; δ — необходимый монтажный зазор.

Напряжения в чугунных кольцах обычно $\sigma = 15 + 25$ кгс/мм².

Для обеспечения герметичности среднее давление между кольцом и цилиндром $q = \frac{16EJ \Delta s}{3\pi D^2}$ или (для кольца прямоугольного сечения) $q = \frac{4Eh^3 \Delta s}{9\pi D^4}$ не должно быть слишком мало. Обычно $q = 0,5 + 1,5$ кгс/см².

РАСЧЕТ ДНИЩА ПОРШНЯ

В приближенных расчетах днище поршня рассматривают как круглую пластину постоянной толщины δ , заделанную по внешнему радиусу цилиндра r . Наибольшие напряжения от силы давления газов $p_{г\max}$ возникают у заделки на внешней (огневой)

поверхности днища $\sigma_{\max} = 0,75 \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 p_{г\max}$

Допускают напряжения $\sigma_{\max} = 5 + 7$ кгс/мм² для чугунных и алюминиевых поршней и до 10—12 кгс/мм² для стальных поршней.

С учетом радиальной и осевой неравномерности температур, вызывающей в поршне дополнительные напряжения, приведенные значения допускаемых напряжений увеличиваются в 2—2,5 раза.

РАСЧЕТ ДЕТАЛЕЙ ТУРБОМАШИН

РАСЧЕТ ЛОПАТОК НА РАСТЯЖЕНИЕ ОТ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Напряжения от центробежных сил. Центробежные силы, связанные с вращением колес турбомашин, вызывают растяжение лопаток. При определении растягивающих напряжений лопатку рассматривают как консольный стержень переменного поперечного сечения (рис. 1). На малый элемент лопатки объемом $F(r_1) dr_1$ действует центробежная сила

$$dC = \rho \omega^2 r_1 F(r_1) dr_1, \quad (1)$$

где ρ — плотность материала лопатки; ω — угловая скорость вращения; $F(r_1)$ — площадь поперечного сечения на расстоянии r_1 от оси вращения колеса.

Полная сила, растягивающая лопатку в сечении на радиусе r

$$C(r) = \rho \omega^2 \int_r^R r_1 F(r_1) dr_1, \quad (2)$$

где R — наружный радиус лопаточного венца.

В незакрученных (или слабо закрученных) лопатках напряжения распределяются по поперечному сечению равномерно, поэтому

$$\sigma(r) = \frac{C(r)}{F(r)} = \rho \omega^2 \frac{\int_r^R r_1 F(r_1) dr_1}{F(r)}. \quad (3)$$

Напряжение растяжения определяется только законом распределения площадей сечений по длине лопатки, но не зависит от абсолютной величины площади сечения. Лопатка постоянного сечения. В этом случае $F(r) = F$ и из формулы (2) получаем

$$C(r) = 0,5 \rho \omega^2 F (R^2 - r^2),$$

$$\sigma(r) = 0,5 \rho \omega^2 (R^2 - r^2), \quad (4)$$

Распределение напряжений по длине лопатки постоянного сечения показано на рис. 2.

Наибольшее напряжение испытывает корневое сечение лопатки.

Обозначая это напряжение через σ_0 , получаем

$$\sigma_0 = 0,5 \rho \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) = 0,5 \rho u_R^2 (1 - \xi_0^2), \quad (5)$$

где $u_R = \omega R$ — окружная скорость на конце лопатки, $\xi_0 = \frac{r_0}{R}$ — относительный радиус втулки.

Значения ρu_R^2 для разных материалов и окружных скоростей u_R приведены в табл. 1.

Равенство (5) иногда применяют в форме, более удобной при проведении газодинамического расчета:

$$\sigma_0 = 2 \frac{\rho u_{ср}^2}{\lambda}, \quad (6)$$

где $u_{ср} = 0,5 \omega (R + r_0)$ — окружная скорость на среднем радиусе; λ — коэффициент длины;

$$\lambda = \frac{D_{ср}}{l}, \quad (7)$$

здесь $D_{ср} = R + r_0$ — средний диаметр; $l = R - r_0$ — длина лопатки.

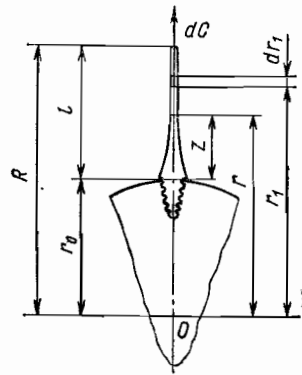


Рис. 1. Определение растягивающих напряжений в лопатке

Из формулы (5) также следует

$$\sigma_0 = \frac{\rho \omega^2}{2\pi} S, \quad (8)$$

где $S = \pi (R^2 - r_0^2)$ — площадь проточной части рабочего колеса.

1. Значения ρu_R^2 в зависимости от окружной скорости u_R и плотности материала ρ

Материал	$\rho, \text{ г/см}^3$	ρu_R^2 (в кгс/см ²) при $u_R, \text{ м/с}$								
		100	150	200	250	300	350	400	450	500
Алюминиевые сплавы	2,75	280	630	1 120	1 750	2 520	3 430	4 480	5 670	7 000
Титановые сплавы . . .	4,5	460	1 035	1 840	2 880	4 150	5 640	7 350	9 320	11 500
Стали	7,85	800	1 800	3 200	5 000	7 200	9 800	12 800	16 200	20 000
Жаропрочные сплавы	8,15	830	1 875	3 320	5 190	7 480	10 170	13 280	16 800	20 700

Лопатки постоянного сечения проще в изготовлении, чем лопатки переменного сечения. Однако им свойственны более высокие напряжения растяжения и меньшая вибропрочность из-за нерационального использования материала. Для сильно нагруженных ступеней лопатки постоянного сечения не применяются.

Лопатки с изменением площади поперечного сечения по степенному закону. Площадь поперечного сечения такой лопатки на текущем радиусе r

$$F(r) = F(R) + [F(r_0) - F(R)] \left(\frac{R-r}{l} \right)^n,$$

или

$$\frac{F(r)}{F(r_0)} = \chi + (1-\chi) \left(1 - \frac{r-r_0}{l} \right)^n, \quad (9)$$

где $F(r_0)$ и $F(R)$ — площади корневого и конечного сечений лопатки и $\chi = \frac{F(R)}{F(r_0)}$.

График изменения площади $F(r)$ по длине лопатки для различных значений n при $\chi = 0,25$ показан на рис. 3. При $n = 1$ получается лопатка с линейным изменением площади.

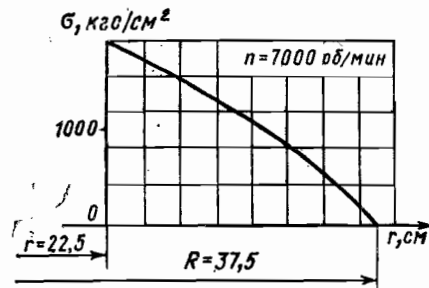


Рис. 2. Распределение напряжений растяжения в лопатке постоянного сечения

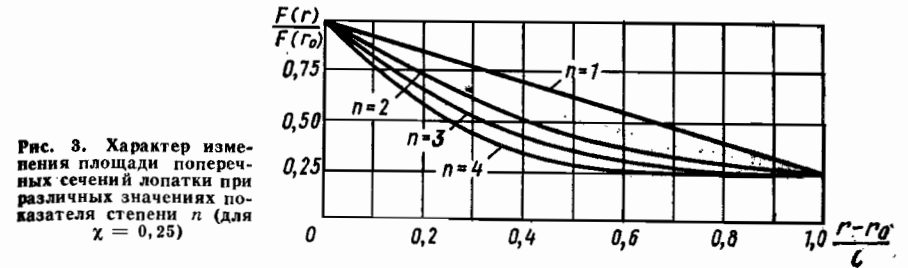


Рис. 3. Характер изменения площади поперечных сечений лопатки при различных значениях показателя степени n (для $\chi = 0,25$)

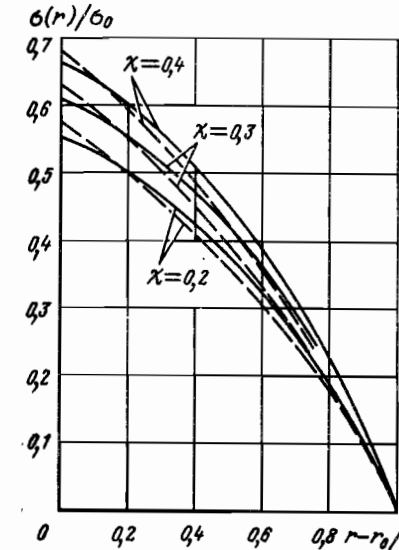


Рис. 4. Растягивающие напряжения в лопатке с линейным изменением площади сечений ($n = 1$):
— $\xi_0 = 0,5$; - - - $\xi_0 = 0,7$

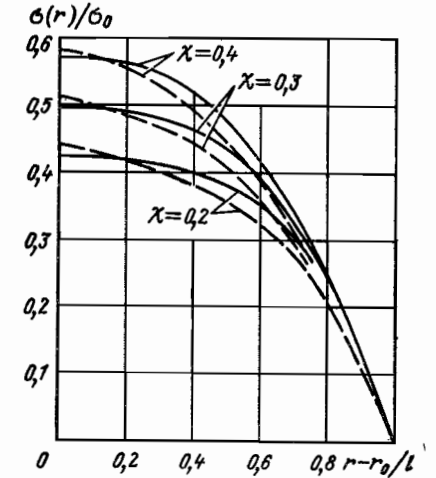


Рис. 5. Растягивающее напряжение в лопатке с изменением площади сечений по параболе ($n = 2$):
— $\xi_0 = 0,5$; - - - $\xi_0 = 0,7$

Отношение χ лежит в пределах $0,2 \leq \chi \leq 1$. Кривые растягивающих напряжений при различных значениях n , отнесенные к величине напряжения в корневом сечении лопатки постоянного сечения (при одинаковых значениях параметра ρu_R^2 и относительного радиуса втулки $\xi_0 = r_0/R$), приведены на рис. 4—6. При резком возрастании площади сечений лопатки у заделки ($n > 2$) наибольшие растягивающие напряжения находятся не в корневом сечении, а ближе к середине длины лопатки (рис. 6). В приближенных расчетах при $\chi = 0,3 \div 0,4$ можно считать наибольшее напряжение растяжения в лопатке $\sigma_{\max} = (0,5 \div 0,6) \sigma_0$.

В табл. 2 приведены отношения объемов V лопатки при данных значениях n и χ к объему лопатки постоянного сечения: $V_0 = F(r_0) l$.

Если лопаточный венец имеет бандажное кольцо, антивибрационные полки или проволочные связи, следует определить центробежную силу от этих дополнительных масс, приходящуюся на каждую лопатку, и при расчете растягивающих напряжений в сечениях, расположенных на меньших радиусах, чем соответствующие массы, включить добавочную центробежную силу в выражение для $S(r)$. Обязательно проверяют напряжения в ослабленном из-за отверстия под проволоку сечении.

2. Относительный объем лопаток переменного сечения V/V_0

n	1			2			3		
	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
$\frac{V}{V_0}$	0,60	0,65	0,70	0,47	0,53	0,60	0,40	0,47	0,55

Вытяжка лопаток. Упругое удлинение лопаток от центробежных сил

$$\Delta l_y = \int_{r_0}^R \frac{\sigma(r)}{E} dr$$

или с учетом формулы (2)

$$\Delta l_y = \rho \omega^2 \int_{r_0}^R \frac{1}{EF(r)} \int_r^R r_1 F(r_1) dr_1 dr \quad (10)$$

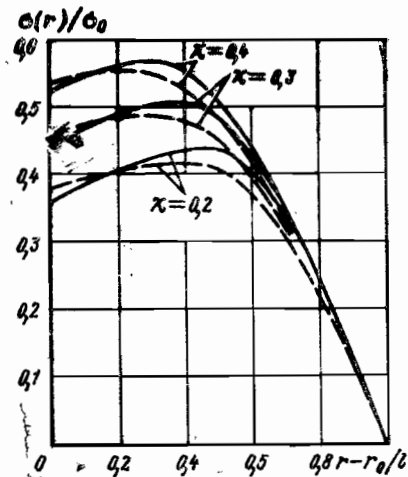
Для лопатки постоянного сечения при модуле упругости $E = \text{const}$

$$\frac{\Delta l_y}{l} = \frac{\rho \omega^2 R^2}{3E} (1 - \xi_0) (1 + 0,5 \xi_0) \quad (11)$$

Лопатка удлиняется также из-за теплового расширения на величину

$$\Delta l_T = \int_{r_0}^R \alpha [T(r) - T_0] dr \approx \alpha (T_{cp} - T_0) l \quad (12)$$

где α — коэффициент температурного линейного расширения материала лопатки; $T(r)$ — изменение температуры по длине лопатки в рабочих условиях, °C; T_{cp} — ее среднее значение; $T_0 = 20^\circ \text{C}$.



Для турбинных лопаток величина Δl_T обычно значительно превосходит величину Δl_y .

При высокой температуре лопатка удлиняется с течением времени из-за ползучести материала. Если скорость ползучести v_p связана с напряжением σ степенным законом $v_p = k\sigma^n$ (где k, n — экспериментальные постоянные материала), то удлинение лопатки за время t под действием постоянных напряжений σ составит

$$\Delta l_p = kt \int_{r_0}^R [\sigma(r)]^n dr \quad (13)$$

Рис. 6. Растягивающее напряжение в лопатке с изменением площади сечений по кубической параболы ($n = 3$):

— $\xi_0 = 0,5$; --- $\xi_0 = 0,7$

Вытяжка приводит к уменьшению радиального зазора между концом лопатки и корпусом и может привести к недопустимому цеплянию лопаток за корпус. Уменьшение зазора может быть вызвано также вытяжкой диска (см. ниже).

РАСЧЕТ ЛОПАТОК НА ИЗГИБ

Изгибающие моменты от газовых сил. При расчете лопаток на изгиб удобно пользоваться системой координат, показанной на рис. 7. Здесь x, y, r — оси, связанные с вращающимся диском и проходящие через центр тяжести корневого сечения лопатки O . Ось x параллельна оси вращения и направлена по потоку. Ось r направлена вдоль радиуса, ось y лежит в плоскости вращения. Координаты центра тяжести поперечных сечений (выносы) обозначены $x(r), y(r)$. В общем случае линия, соединяющая центры тяжести сечений (ось лопатки), не является прямой, но отношения $x/r \ll 1, y/r \ll 1$. Поэтому можно считать, что поперечные сечения лопатки перпендикулярны оси r .

Через центры тяжести сечений O_1 проходят оси x_1, y_1 , соответственно параллельные осям x, y . Главные центральные оси сечений обозначены как ξ, η , причем ξ — ось наименьшей жесткости. Угол α между осями ξ и x_1 определяет установку профилей.

Различают роторы правого и левого вращения. На рис. 7. показан ротор правого вращения, который вращается по часовой стрелке, если смотреть по направлению потока газа. В этом случае угол $\alpha > 0$.

Газовые силы (в кгс/см), действующие на единицу длины рабочей лопатки (рис. 8), определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{2\pi\gamma}{z} [p_1 - p_2 + \rho_1 c_{1a} (c_{1a} - c_{2a})]; \\ p_y &= \frac{2\pi\gamma}{z} \rho_1 c_{1a} (c_{1a} - c_{2a}). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где r — радиус сечения, см; z — число лопаток; p_1, p_2 — давление перед и за рабочим колесом, кгс/см²; ρ_1 — плотность потока на входе в рабочее колесо, кгс·с²/см⁴

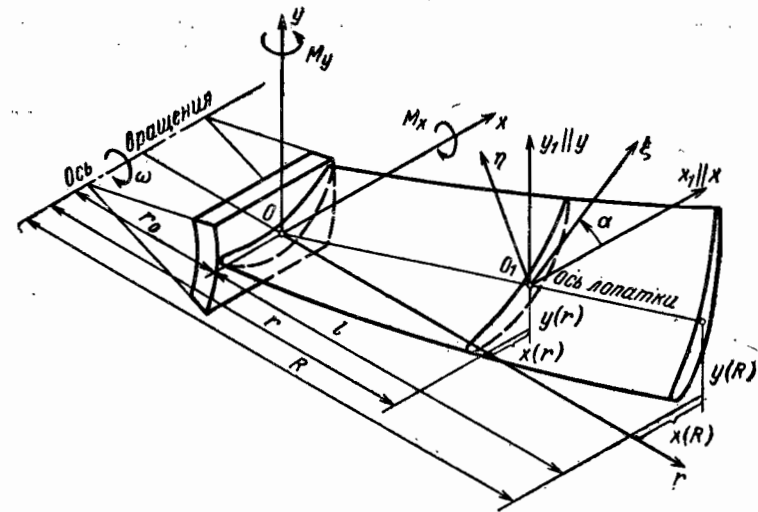


Рис. 7. Система координат при расчете лопаток

Рис. 8. Газовые силы, действующие на лопатку, и треугольники скоростей перед и за рабочим колесом

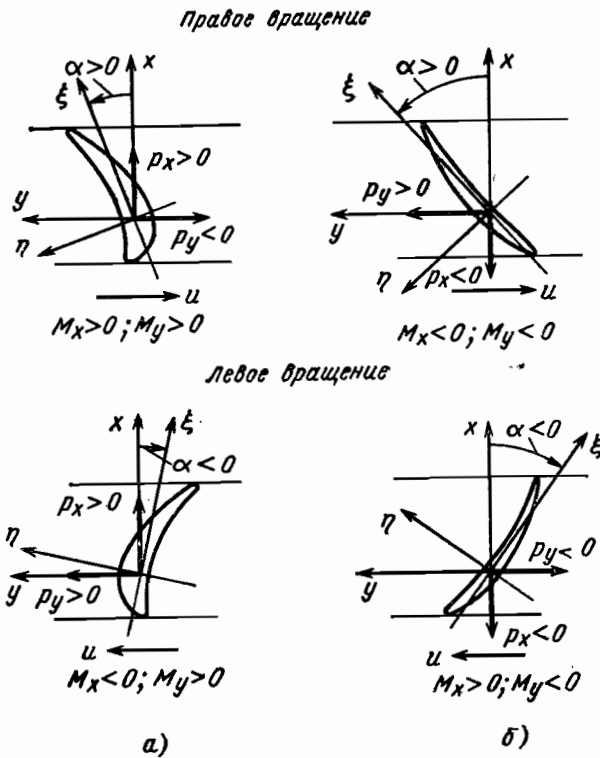
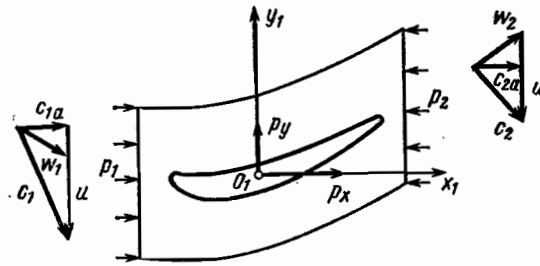


Рис. 9. Положение профилей и действительное направление газовых усилий: а — турбина; б — компрессор

(если ρ_1 в г/см³, то это число умножают на $1,02 \cdot 10^{-6}$); c_{1a}, c_{2a} — осевые составляющие скорости, см/с; c_{1u}, c_{2u} — окружные составляющие абсолютной скорости, см/с. Силы p_x, p_y и скорости c_a, c_u считают положительными, если их направления совпадают с направлением соответствующих осей x, y (на рис. 8 $c_a > 0, c_u < 0$, поэтому при $|c_{2u}| < |c_{1u}|$ сила p_y будет отрицательная). Фактическое направление газовых сил p_x, p_y для турбинных и компрессорных лопаток роторов правого и левого вращения показано на рис. 9. У лопаток турбины сила p_y всегда направлена по вращению, у лопаток компрессора — против вращения.

Равнодействующая газовых сил $p_\Sigma = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ во всех случаях направлена в сторону спинки (выпуклой части) профиля.

Для предварительного расчета определяют изгибающие моменты $M_x(r_0)$ и $M_y(r_0)$ и напряжения в корневом сечении лопатки, причем учитывают только изгиб относительно оси наименьшей жесткости (ось ξ). Моменты считают положительными, когда они направлены против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления соответствующей оси (см. рис. 7 и 8). При $p_x > 0$ момент $M_x > 0$, при $p_y > 0$ момент $M_x < 0$.

В приближенном расчете можно считать, что сила p_y вдоль радиуса постоянна. Изгибающий момент в корневом сечении относительно оси x

$$M_x(r_0) = -0,5 p_y l^2. \quad (15)$$

Величину $M_x(r_0)$ можно выразить через крутящий момент на валу в кгс·см:

$$M_k = 0,5 |p_y| l z D_{cp} = 97400 \frac{N}{n}, \quad (16)$$

где N — мощность, кВт; n — частота вращения, об/мин.

Исключив из формул (15), (16) силу p_y , получим

$$|M_x(r_0)| = \frac{M_k}{\lambda z}, \quad (17)$$

где $\lambda = D_{cp}/l$.

При определении изгибающего момента относительно оси y обычно можно считать

$$p_x \approx (p_1 - p_2) \frac{2\pi r}{z}. \quad (18)$$

Если величина $p_1 - p_2$ постоянна, то

$$M_y(r_0) = \frac{1}{3z} (p_1 - p_2) \pi R^3 (1 - \xi_0)^2 (2 + \xi_0), \quad (19)$$

где $\xi_0 = r_0/R$.

Для ступеней, профилированных по закону постоянной циркуляции ($rc_{1u} = \text{const}$), давление p_1 меняется вдоль радиуса. В этом случае изгибающий момент в корневом сечении $M_y(r_0)$ можно определять по кривой на рис. 10, где p_{1cp} — давление на входе на среднем радиусе.

Действительное направление моментов $M_x(r_0)$ и $M_y(r_0)$ определяют по рис. 9. Момент в корневом сечении относительно оси с наименьшим моментом инерции ξ

$$M_\xi(r_0) = M_x(r_0) \cos \alpha(r_0) + M_y(r_0) \sin \alpha(r_0). \quad (20)$$

В формулу (20) моменты и угол установки корневой сечения $\alpha(r_0)$ подставляют со своими знаками.

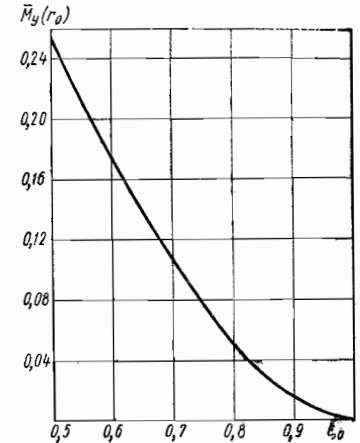


Рис. 10. Значение относительного изгибающего момента $\bar{M}_y(r_0) = \frac{M_y(r_0) z}{\pi(p_{1cp} - p_2) R^3}$ для лопаток ступеней с постоянной циркуляцией

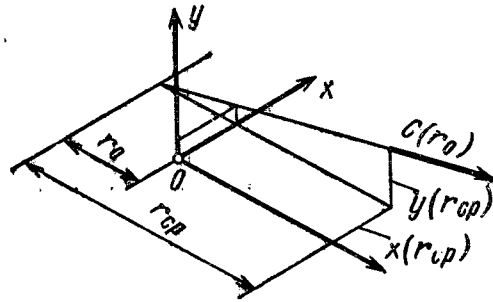


Рис. 11. К расчету изгибающих моментов от центробежных сил

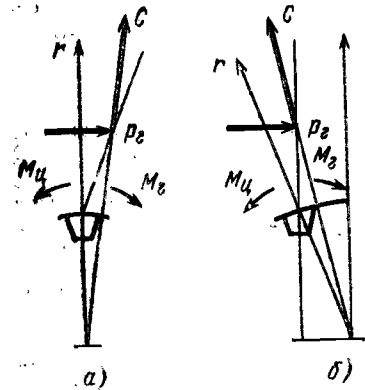


Рис. 12. Конструктивные способы разгрузки лопатки от изгиба газовыми силами p_g

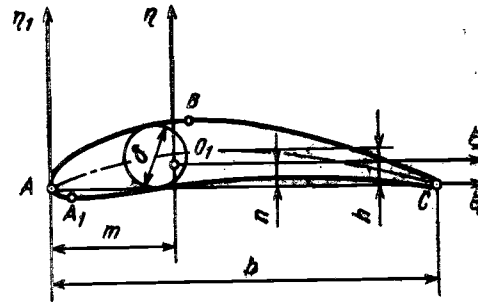


Рис. 13. К приближенному определению геометрических характеристик сечения лопатки

В уточненных расчетах находят распределение изгибающих моментов от газовых сил по всей длине лопатки (для ряда расчетных сечений, обычно от 3 до 10)

$$\left. \begin{aligned} M_{x1}(r) &= - \int_r^R \rho_y(r_1)(r_1-r) dr_1 = - \int_r^R \int_{r_1}^R \rho_y(r_2) dr_2 dr_1; \\ M_{y1}(r) &= \int_r^R \rho_x(r_1)(r_1-r) dr_1 = \int_r^R \int_{r_1}^R \rho_x(r_2) dr_2 dr_1, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $r \leq r_1 \leq R$, $r_1 \leq r_2 \leq R$, и моменты относительно главных осей инерции каждого расчетного сечения

$$\left. \begin{aligned} M_{\xi}(r) &= M_{x1}(r) \cos \alpha(r) + M_{y1}(r) \sin \alpha(r); \\ M_{\eta}(r) &= -M_{x1}(r) \sin \alpha(r) + M_{y1}(r) \cos \alpha(r). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Изгибающие моменты от центробежных сил. Отклонение оси лопатки от радиального направления (выносы центров тяжести сечений) могут быть связаны с технологией изготовления лопатки или специально предусмотрены для разгрузки лопатки от изгиба газовыми силами. Выносы центра тяжести приводят к появлению изгибающих моментов от центробежных сил, которые приближенно (для корневого сечения) могут быть оценены по формулам (рис. 11)

$$M_x(r_0) \approx \frac{r_0}{r_{cp}} y(r_{cp}) C(r_0); \quad M_y(r_0) \approx -x(r_{cp}) C(r_0), \quad (23)$$

где $x(r_{cp})$, $y(r_{cp})$ — выносы оси лопатки на среднем радиусе $r_{cp} = 0,5(r_0 + R)$; $C(r_0)$ — центробежная сила всей профильной части (пера) лопатки, определяемая по формуле (2) при $r = r_0$. Изгибающие моменты от технологических выносов следует учитывать при больших окружных скоростях ($u_R > 250$ м/с), если их отношение к длине лопатки превышает 1% (при $u_R = 250 \div 350$ м/с) и 0,3% при $u_R > 350$ м/с.

Для разгрузки лопатки от изгиба газовыми силами осуществляют наклон оси лопатки по отношению к замку в сторону спинки (рис. 12, а) или смещают ось лопатки вместе с замком в сторону вогнутой части профиля (рис. 12, б).

В уточненных расчетах находят распределение изгибающих моментов от центробежных сил по всей длине лопатки

$$\left. \begin{aligned} M_{x1}(r) &= \rho \omega^2 \int_r^R r_1 F(r_1) \left[y(r_1) \frac{r}{r_1} - y(r) \right] dr_1; \\ M_{y1}(r) &= - \rho \omega^2 \int_r^R r_1 F(r_1) [x(r_1) - x(r)] dr_1, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где $r \leq r_1 \leq R$.

Моменты относительно главных осей инерции находят по формулам (20) или (22). Изгибающие моменты от газовых и центробежных сил суммируют с учетом их знаков.

Напряжения от изгиба. Для определения напряжений от изгиба необходимо знать положение центра тяжести O_1 , главных осей инерции ξ , η и некоторые геометрические характеристики сечения лопатки (рис. 13). Прямую, соединяющую две крайние точки профиля на передней и задней кромках, называют хордой (отрезок $AC = b$). Ось наименьшей жесткости ξ проходит через центр тяжести сечения O_1 практически параллельно хорде.

Напряжения от изгиба определяют в точках профиля, расположенных на передней и задней кромках (точки А и С) и на спинке профиля (точка В). От действия газовых нагрузок на кромках профиля (в точках А и С) возникают напряжения растяжения, а на спинке профиля (в точке В) — напряжение сжатия. Наибольшее растягивающее напряжение обычно получается в точке A_1 , близкой к точке А.

Для предварительного расчета определяют только наибольшее растягивающее напряжение изгиба от газовых сил в корневом сечении лопатки:

$$\sigma_{и.г}(r_0) = \frac{M_{\xi}(r_0)}{W_{\xi \min}}, \quad (25)$$

где $M_{\xi}(r_0)$ находят по формуле (20) без учета знака, $W_{\xi \min}$ — минимальный момент сопротивления корневого сечения на изгиб (см. ниже).

При уточненных расчетах находят напряжения изгиба от суммарных изгибающих моментов $M_{\xi}(r)$, $M_{\eta}(r)$ во всех характерных точках профиля М для нескольких расчетных сечений r:

$$\sigma_{и.м}(r) = \frac{M_{\xi}(r) \eta_M(r)}{J_{\xi}(r)} - \frac{M_{\eta}(r) \xi_M(r)}{J_{\eta}(r)}, \quad (26)$$

где $\xi_M(r)$, $\eta_M(r)$ — координаты точек (А, В, С, A_1) сечения на радиусе r; $J_{\xi}(r)$, $J_{\eta}(r)$ — главные моменты инерции этого сечения. В формуле (26) $J_{\xi} > 0$, $J_{\eta} > 0$, а моменты и координаты подставляются со своими знаками; если $\sigma_{и.м} > 0$, то напряжение изгиба в точке М от газовых и центробежных сил растягивающее. Знак координат определяется в соответствии с изогнутостью профиля (см. рис. 9). На рис. 13 $\xi_A < 0$, $\eta_A < 0$; $\xi_B > 0$, $\eta_B > 0$ и т. д.

В длинных лопатках действительные напряжения изгиба от газовых сил получаются меньше, чем по приведенным формулам, благодаря разгружающему действию центробежных сил на упругих прогибах лопатки.

3. Значения коэффициента k для определения

Точки на рис. 13	$\bar{h} = \frac{h}{b}$	Относительная								
		0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
A_1, C A, B	0	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083
A_1, C A, B	0,01	0,089 1,133 0,085	0,088 0,177 0,081	0,087 0,226 0,080	0,086 0,276 0,080	0,085 0,327 0,080	0,084 0,380 0,080	0,084 0,432 0,080	0,084 0,484 0,080	0,083 0,537 0,080
A_1, C B, B	0,02	0,094 0,107 0,116	0,089 0,115 0,093	0,089 0,133 0,085	0,088 0,154 0,082	0,088 0,177 0,081	0,088 0,201 0,080	0,087 0,226 0,080	0,086 0,251 0,079	0,086 0,276 0,080
A_1, C B, B	0,03	0,109 0,116 0,163	0,094 0,107 0,116	0,090 0,111 0,098	0,089 0,121 0,089	0,089 0,133 0,085	0,089 0,147 0,083	0,088 0,162 0,081	0,088 0,177 0,081	0,088 0,193 0,080
A_1, C B, B	0,04	0,130 0,134 0,221	0,104 0,111 0,146	0,094 0,106 0,115	0,091 0,109 0,101	0,089 0,115 0,093	0,089 0,124 0,088	0,089 0,133 0,085	0,089 0,143 0,083	0,088 0,154 0,082
A_1, C A, B	0,05	0,152 0,155 0,287	0,116 0,121 0,181	0,101 0,110 0,138	0,094 0,107 0,116	0,091 0,108 0,103	0,090 0,113 0,096	0,089 0,119 0,091	0,089 0,125 0,087	0,089 0,134 0,086
A_1, C A, B	0,06	0,176 0,179 0,358	0,130 0,134 0,221	0,109 0,116 0,163	0,099 0,109 0,133	0,094 0,107 0,116	0,091 0,108 0,105	0,090 0,111 0,098	0,089 0,115 0,093	0,089 0,122 0,090
A_1, C A, B	0,08	0,226 0,228 0,512	0,160 0,163 0,310	0,130 0,134 0,221	0,113 0,119 0,174	0,104 0,111 0,146	0,098 0,108 0,128	0,094 0,107 0,116	0,092 0,107 0,107	0,091 0,109 0,101
A_1, C A, B	0,10	0,278 0,279 0,675	0,192 0,195 0,403	0,152 0,155 0,287	0,129 0,134 0,221	0,116 0,121 0,181	0,107 0,114 0,155	0,101 0,110 0,138	0,097 0,107 0,125	0,094 0,107 0,116
A_1, C A, B	0,15	0,410 0,410 1,000	0,278 0,279 0,675	0,213 0,215 0,472	0,176 0,179 0,358	0,152 0,155 0,287	0,136 0,140 0,240	0,124 0,129 0,206	0,116 0,121 0,181	0,109 0,116 0,163
A_1, C A, B	0,20	0,542 0,542 1,550	0,366 0,366 0,959	0,278 0,279 0,674	0,226 0,228 0,511	0,192 0,195 0,408	0,169 0,172 0,337	0,152 0,155 0,287	0,139 0,143 0,250	0,130 0,134 0,221

Таблица 3

Моментов сопротивления в точках сечения лопатки

толщина $\bar{\delta} = \frac{\delta}{b}$										
	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20
0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083	0,083 ∞ 0,083
0,083 0,590 0,081	0,083 0,642 0,081	0,083 0,695 0,081	0,083 0,748 0,081	0,083 0,801 0,081	0,082 0,854 0,081	0,082 0,907 0,081	0,082 0,960 0,081	0,082 1,012 0,081	0,082 1,066 0,082	0,082 1,120 0,082
0,085 0,302 0,080	0,085 0,328 0,080	0,085 0,354 0,080	0,084 0,380 0,080	0,084 0,406 0,080	0,084 0,432 0,080	0,084 0,458 0,080	0,084 0,484 0,080	0,083 0,511 0,080	0,083 0,537 0,080	0,083 0,563 0,080
0,087 0,209 0,080	0,087 0,226 0,080	0,087 0,243 0,080	0,086 0,259 0,080	0,086 0,276 0,080	0,086 0,293 0,080	0,085 0,311 0,080	0,085 0,328 0,080	0,085 0,345 0,080	0,085 0,362 0,080	0,085 0,380 0,080
0,088 0,166 0,081	0,088 0,177 0,081	0,088 0,189 0,080	0,088 0,201 0,080	0,087 0,214 0,080	0,087 0,226 0,080	0,087 0,238 0,080	0,086 0,251 0,080	0,086 0,264 0,080	0,086 0,276 0,080	0,086 0,289 0,080
0,089 0,141 0,084	0,089 0,150 0,082	0,088 0,159 0,082	0,088 0,168 0,081	0,088 0,177 0,081	0,088 0,187 0,080	0,088 0,196 0,080	0,087 0,206 0,080	0,087 0,216 0,080	0,087 0,226 0,080	0,087 0,236 0,080
0,089 0,127 0,087	0,089 0,133 0,085	0,089 0,140 0,084	0,088 0,147 0,083	0,088 0,154 0,082	0,088 0,162 0,081	0,088 0,169 0,081	0,088 0,177 0,081	0,088 0,185 0,080	0,087 0,193 0,080	0,087 0,201 0,080
0,090 0,112 0,096	0,089 0,115 0,093	0,089 0,119 0,090	0,089 0,124 0,088	0,089 0,128 0,086	0,089 0,133 0,085	0,089 0,138 0,084	0,089 0,143 0,083	0,088 0,149 0,083	0,088 0,154 0,082	0,088 0,160 0,082
0,092 0,107 0,109	0,091 0,108 0,103	0,090 0,110 0,099	0,090 0,113 0,096	0,089 0,115 0,093	0,089 0,118 0,091	0,089 0,122 0,089	0,089 0,125 0,087	0,089 0,129 0,086	0,089 0,133 0,085	0,089 0,137 0,085
0,104 0,112 0,149	0,101 0,110 0,138	0,098 0,108 0,129	0,096 0,107 0,122	0,094 0,107 0,116	0,093 0,107 0,111	0,092 0,107 0,107	0,091 0,108 0,103	0,091 0,110 0,100	0,091 0,111 0,098	0,091 0,112 0,098
0,122 0,127 0,199	0,116 0,121 0,181	0,111 0,117 0,167	0,108 0,114 0,155	0,104 0,111 0,146	0,101 0,110 0,137	0,099 0,108 0,131	0,097 0,107 0,125	0,095 0,107 0,120	0,094 0,107 0,115	0,094 0,110 0,115

а моменты инерции относительно главных осей

$$\left. \begin{aligned} J_{\xi} &= J_{x_1} \cos^2 \beta + J_{y_1} \sin^2 \beta - J_{x_1 y_1} \sin 2\beta; \\ J_{\eta} &= J_{x_1} \sin^2 \beta + J_{y_1} \cos^2 \beta + J_{x_1 y_1} \sin 2\beta. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Главные координаты характерных точек профиля M (A, B, C, A_1)

$$\left. \begin{aligned} \xi_M &= (\tilde{x}_M - \tilde{x}_{01}) \cos \beta + (\tilde{y}_M - \tilde{y}_{01}) \sin \beta; \\ \eta_M &= -(\tilde{x}_M - \tilde{x}_{01}) \sin \beta + (\tilde{y}_M - \tilde{y}_{01}) \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Формулы (33) — (41) удобны для расчета на ЭВМ. При ручном счете, особенно для тонких профилей, целесообразно определять минимальный момент инерции J_{ξ} по формуле (32).

Осевая сила, действующая на все лопатки,

$$P_{oc} = 2\pi \int_{r_0}^R (\rho_1 - \rho_2) r dr, \quad (42)$$

или, если величина $\rho_1 - \rho_2$ постоянна,

$$P_{oc} = \pi R^2 (\rho_1 - \rho_2) (1 - \xi_0^2). \quad (43)$$

Если давление p_1 меняется, то величину P_{oc} можно достаточно точно определить по значению давления p_{1cp} на среднем радиусе.

ЗАПАС ПРОЧНОСТИ ПРОФИЛЬНОЙ ЧАСТИ ЛОПАТКИ

Для компрессорных (холодных) лопаток запас статической прочности профильной части лопатки

$$n = \frac{\sigma_B}{\sigma}, \quad (44)$$

где σ — наибольшее суммарное растягивающее напряжение от растяжения и изгиба.

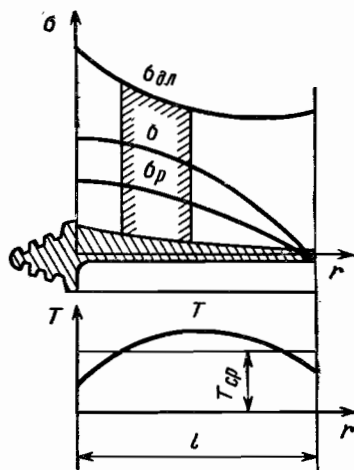


Рис. 16. Распределение температуры и напряжений по длине лопатки газовой турбины

Для турбинных лопаток, а также для компрессорных лопаток последних ступеней определяют запас длительной прочности

$$n = \frac{\sigma_{дл}}{\sigma}, \quad (45)$$

где $\sigma_{дл}$ — предел длительной прочности материала с учетом температуры данного сечения лопатки и длительности работы.

При работе на нескольких режимах эквивалентный запас прочности вычисляют по формуле (36) в гл. 2.

Типичное распределение напряжений и температур по длине лопатки газовой турбины показано на рис. 16. Минимальный запас прочности лопаток переменного сечения обычно находится в сечении, расположенном на расстоянии $(0,2 \div 0,5) l$ от корневого сечения (заштрихованная зона). В приближенных расчетах можно определять предел длительной прочности по средней (заторможенной по относительной скорости) температуре газа, а напряжение σ вычислять для корневого сечения.

Обычно средняя температура лопатки первой ступени турбины на $50-100^\circ \text{C}$ меньше температуры газа перед турбиной. Запас статической прочности в лопатках турбомашин обычно $n = 1,5 \div 2,5$.

Напряжения растяжения в лопатках газовых турбин в сильной степени зависят от типа и назначения турбины, температуры газа, окружной скорости и других параметров. Наибольшие напряжения растяжения обычно лежат в пределах $8-24 \text{ кгс/мм}^2$, напряжения изгиба только от газовых сил — в пределах $5-15 \text{ кгс/мм}^2$, суммарные напряжения (с учетом компенсации первоначальными выносами) — $10-30 \text{ кгс/мм}^2$. Напряжения растяжения в стальных лопатках компрессора составляют $15-20 \text{ кгс/мм}^2$ для первых ступеней и $8-12 \text{ кгс/мм}^2$ для последних.

Напряжения изгиба от аэродинамической нагрузки обычно равны $8-12 \text{ кгс/мм}^2$ для лопаток первых ступеней и $15-25 \text{ кгс/мм}^2$ для лопаток последних ступеней.

Для лопаток из алюминиевых сплавов суммарные напряжения не превосходят $10-12 \text{ кгс/мм}^2$.

РАВНОПРОЧНЫЕ ЛОПАТКИ

При проектировании рабочих лопаток для высокотемпературных газовых турбин целесообразно исходить из условия, чтобы на большей части длины пера лопатки запас длительной прочности n , определяемый формулой (45), был бы равен минимально допустимому запасу $[n]$. У конца лопатки, где напряжения малы, а в некоторых случаях и у замковой части, где температура значительно снижается, величина n может быть больше $[n]$:

$$n \geq [n].$$

Если известно изменение температуры $T(r)$ по длине пера лопатки, то, определив для каждого сечения значение предела длительной прочности материала $\sigma_{дл}$ при соответствующей температуре, найдем допускаемые напряжения

$$[\sigma(r)] = \frac{\sigma_{дл}(r)}{[n]}. \quad (46)$$

Действительные напряжения $\sigma(r)$ должны быть равны или меньше допускаемых, что можно обеспечить соответствующим выбором закона распределения площадей поперечных сечений $F(r)$ по длине лопатки (рис. 17). У конца лопатки (участок I) всегда есть область, где $\sigma < [\sigma]$. Здесь сечение может быть постоянным и равным периферийному сечению $F(R)$. Построив по уравнению (4) кривую $\sigma_c(r)$, где σ_c — напряжения в лопатке постоянного сечения, найдем границу участков I и II ($r = r_c$) как точку пересечения кривых $[\sigma]$ и σ_c .

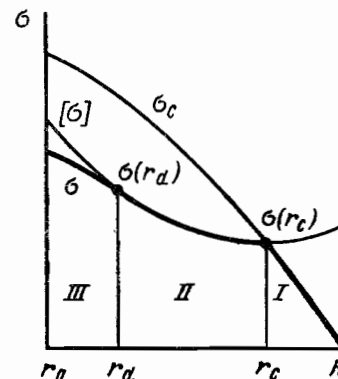


Рис. 17. К расчету напряжений в равнопрочной лопатке

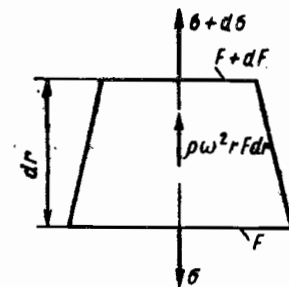


Рис. 18. Условия равновесия элемента лопатки

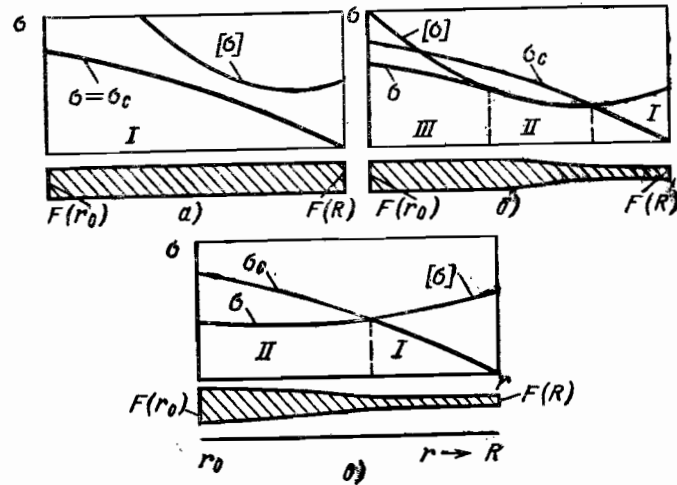


Рис. 19. Различные случаи равнопрочной лопатки:

а — $\sigma_c < [\sigma]$; б — общий случай; в — в области II $\sigma_c > [\sigma]$ и $\left| \frac{d\sigma_c}{dr} \right| > \left| \frac{d[\sigma]}{dr} \right|$

На участке II

$$\sigma(r) = [\sigma(r)].$$

Чтобы установить, как при этом должна меняться площадь сечения $F(r)$, рассмотрим условие равновесия элемента лопатки (рис. 18):

$$(\sigma + d\sigma)(F + dF) - \sigma F + \rho\omega^2 r F dr = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dr}(\sigma F) + \rho\omega^2 r F = 0. \tag{47}$$

Разделив переменные

$$\frac{dF}{F} + \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{\rho\omega^2 r dr}{\sigma} = 0 \tag{48}$$

и проинтегрировав в пределах от r до r_c с учетом условия $\sigma(r) = [\sigma(r)]$, получим

$$F(r) = F(R) \frac{\sigma(r_c)}{[\sigma(r)]} e^{-\rho\omega^2 \int_r^{r_c} \frac{r_1 dr_1}{[\sigma(r_1)]}}. \tag{49}$$

Температура лопатки у замковой части обычно значительно падает, величина $[\sigma]$ возрастает, и площадь, вычисленная по формуле (49), может с некоторого радиуса r_d начать уменьшаться, что недопустимо по условиям обеспечения вибрационной прочности лопатки. При $r < r_d$ (участок III, см. рис. 17), площадь F следует сохранять постоянной или несколько увеличивать. Значение точки $r = r_d$ определяется условием $\frac{dF}{dr} = 0$ и может быть найдено численно или графически.

Распределение напряжений на участке III (при $F = \text{const}$) определится как

$$\sigma(r) = \sigma(r_d) + 0,5\rho\omega^2 (r_d^2 - r^2); \quad r_0 \leq r \leq r_d.$$

Коэффициент уменьшения площади поперечного сечения

$$\chi = \frac{F(R)}{F(r_0)} = \frac{F(r_c)}{F(r_d)} = \frac{\sigma(r_d)}{\sigma(r_c)} e^{-\rho\omega^2 \int_{r_d}^{r_c} \frac{r dr}{[\sigma(r)]}}. \tag{50}$$

В отдельных случаях число участков может быть меньшим (рис. 19).

Полученный теоретический закон распределения площадей сечений по длине пера лопатки может служить исходным материалом для последующей конструкторской проработки.

ОХЛАЖДАЕМЫЕ ЛОПАТКИ

В высокотемпературных газовых турбинах используют рабочие и сопловые лопатки, охлаждаемые изнутри воздухом. В охлаждаемых лопатках температура и напряжения распределяются по поперечным сечениям неравномерно (рис. 20

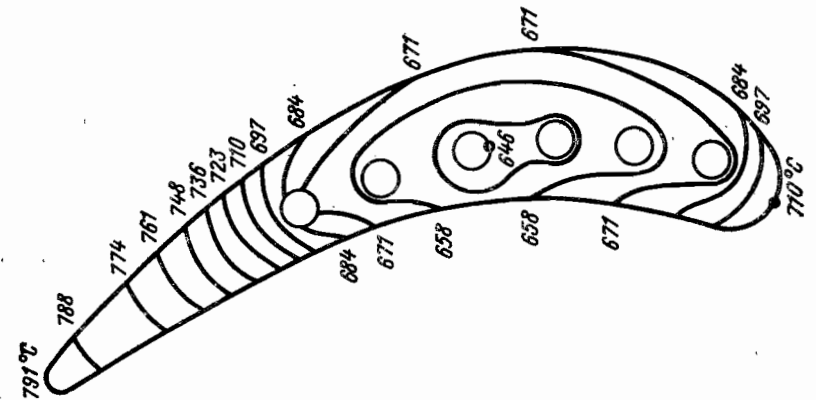


Рис. 20. Температурное поле охлаждаемой турбинной лопатки

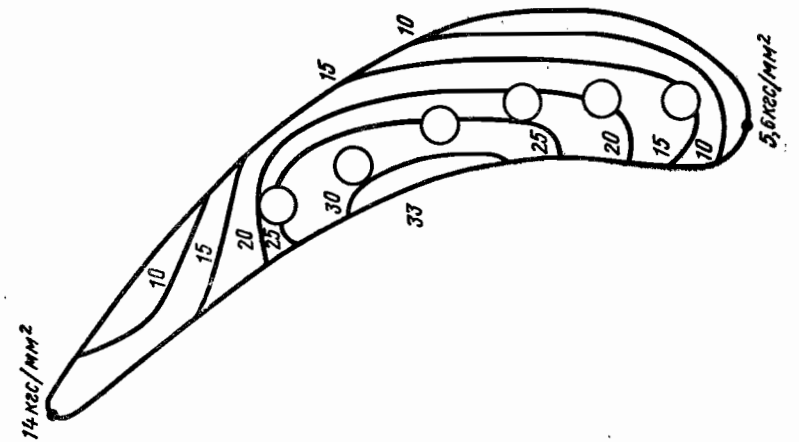


Рис. 21. Распределение напряжений в охлаждаемой турбинной лопатке

и 21). Упрощенный расчет на прочность охлаждаемых лопаток ведут по характеристикам длительной прочности, соответствующим средней температуре сечений.

При уточненных расчетах учитывают температурные напряжения, которые определяют по формулам, приведенным в гл. 17.

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК

Для обеспечения усталостной прочности лопаток уровень переменных напряжений в них должен быть достаточно низким. Повышенные переменные напряжения возникают в лопатках, в основном на резонансных режимах, когда частота внешних возбуждающих сил совпадает с одной из собственных частот колебаний лопатки. Практическое значение имеют частоты до 10 000—15 000 Гц. Для отстройки от резонансов важно уже на стадии проектирования правильно определять собственные частоты колебаний лопаток, особенно первую (низшую) частоту изгибных колебаний, связанную с деформацией лопатки относительно оси минимальной жесткости.

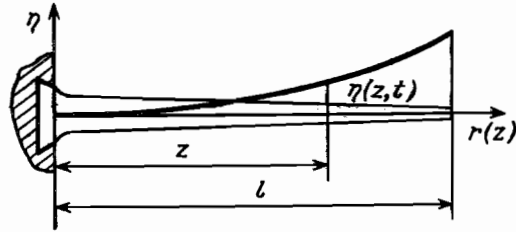


Рис. 22. К расчету изгибных колебаний лопатки

Приближенный расчет основной частоты колебаний. Лопатку рассматривают как консольный стержень переменного сечения с непрерывно распределенной массой (рис. 22), совершающий гармонические колебания в плоскости меньшей жесткости ηOr (см. рис. 7). В приближенном расчете закрученностью пренебрегают. Смещение оси лопатки в сечении $z = r - r_0$

$$\eta(z, t) = \eta(z) \cos pt, \quad (51)$$

где $\eta(z)$ — амплитуда смещения; p — круговая частота колебаний, рад/с; t — время. Скорость движения лопатки в данном сечении

$$\frac{\partial \eta(z, t)}{\partial t} = -\eta(z) p \sin pt.$$

Кинетическая энергия всей лопатки в данный момент времени

$$K(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^l F(z) \left[\frac{\partial \eta(z, t)}{\partial t} \right]^2 dz = \frac{\rho p^2}{2} \sin^2 pt \int_0^l F(z) [\eta(z)]^2 dz, \quad (52)$$

где $\rho F(z)$ — масса единицы длины лопатки.

Внутренняя потенциальная энергия всей лопатки при деформации изгиба в данный момент времени

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l M_\xi(z, t) \kappa_\xi(z, t) dz = \frac{E}{2} \cos^2 pt \int_0^l J_\xi(z) [\eta''(z)]^2 dz, \quad (53)$$

где $M_\xi(z, t) = EJ_\xi(z) \kappa_\xi(z, t)$ — изгибающий момент относительно оси минимальной жесткости ξ ; $\kappa_\xi(z, t) = \frac{\partial^2 \eta(z, t)}{\partial z^2} = \eta''(z) \cos pt$ — упругая кривизна оси лопатки.

По закону сохранения энергии при свободных колебаниях полная энергия $K(t) + \Pi(t)$ остается постоянной для любого момента времени, что возможно только

при равенстве

$$\rho p^2 \int_0^l F(z) [\eta(z)]^2 dz = E \int_0^l J_\xi(z) [\eta''(z)]^2 dz,$$

откуда вытекает формула для круговой частоты собственных колебаний лопатки (формула Рейля):

$$p^2 = \frac{E}{\rho} \frac{\int_0^l J_\xi(z) [\eta''(z)]^2 dz}{\int_0^l F(z) [\eta(z)]^2 dz}. \quad (54)$$

Если внести в эту формулу приближенные значения для $\eta(z)$, удовлетворяющие условиям закрепления, то при точном вычислении интегралов частота p получается больше действительной.

Из формулы (54) следует:

1. Если амплитудный прогиб увеличивается в k раз, частота колебаний не изменится (величина k войдет и в числитель и в знаменатель).
2. Для увеличения частоты колебаний следует увеличивать жесткость сечения на изгиб в районе заделки, где кривизна упругой линии η'' наибольшая и уменьшать площадь сечения у конца лопатки, где наибольшие прогибы η .
3. Частота зависит от отношения E/ρ , которое для большинства конструктивных материалов (стали, алюминия, титана и др.) изменяется мало и составляет $E/\rho \approx 0,26 \cdot 10^{12}$ см²/с²; поэтому частота изгибных колебаний почти не зависит от материала лопатки.

В качестве приближенного значения для $\eta(z)$ можно принять прогиб лопатки постоянного сечения от действия распределенной нагрузки

$$\eta(z) = 2 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{l} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{l} \right)^4. \quad (55)$$

Примем степенной закон распределения площадей и моментов инерции по длине лопатки (рис. 23):

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= F(0) \left[\chi + (1-\chi) \left(\frac{l-z}{l} \right)^m \right]; \\ J(z) &= J(0) \left[\varepsilon + (1-\varepsilon) \left(\frac{l-z}{l} \right)^n \right]; \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где

$$\chi = \frac{F(l)}{F(0)}, \quad \varepsilon = \frac{J(l)}{J(0)}.$$

Подставив равенства (55), (56) в формулу (54), получим

$$p = \frac{\lambda}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sqrt{\frac{J(0)}{F(0)}} \approx 5,1 \cdot 10^5 \frac{\lambda}{l^2} \sqrt{\frac{J(0)}{F(0)}}, \quad (57)$$

где λ — безразмерный коэффициент (табл. 4). Здесь l в см, $J(0)$ в см⁴, $F(0)$ в см², p в рад/с.

При очень большой «сконусности» ($\chi \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$) меньшие, а следовательно, и лучшие значения для λ дает функция

$$\eta(z) = \left(\frac{z}{l} \right)^2, \quad (58)$$

что учтено при составлении табл. 4.

Для лопатки постоянного сечения ($\chi = 1$, $\varepsilon = 1$) величина $\lambda = 3,52$.

4. Значения коэффициента λ

m	χ	ϵ																			
		$n=1$			$n=2$			$n=3$			$n=4$										
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	0	0,2	0,4	0,6	0,8										
1	0	7,24	7,38	7,53	7,67	7,80	6,32	6,97	7,22	7,47	7,71	5,48	6,64	6,98	7,31	7,63	4,90	6,37	6,79	7,19	7,57
	0,2	5,38	5,49	5,59	5,70	5,80	4,47	5,18	5,37	5,55	5,73	3,87	4,90	5,19	5,43	5,67	3,46	4,66	5,05	5,34	5,63
	0,4	4,47	4,56	4,65	4,73	4,82	3,65	4,30	4,46	4,61	4,76	3,16	4,00	4,31	4,51	4,71	2,83	3,80	4,19	4,44	4,67
	0,6	3,87	3,99	4,06	4,15	4,21	3,16	3,74	3,90	4,03	4,16	2,74	3,46	3,77	3,95	4,12	2,45	3,23	3,66	3,88	4,08
	0,8	3,46	3,58	3,65	3,72	3,79	2,83	3,35	3,50	3,62	3,74	2,44	3,10	3,39	3,54	3,70	2,19	2,94	3,30	3,49	3,67
2	0	12,72	12,98	13,23	13,48	13,71	11,79	12,25	12,70	13,13	13,54	10,25	11,67	12,26	12,86	13,42	9,18	11,18	11,95	12,65	13,30
	0,2	6,43	6,56	6,68	6,80	6,92	5,23	6,18	6,41	6,63	6,84	4,58	5,80	6,20	6,49	6,77	4,10	5,50	6,03	6,38	6,72
	0,4	4,88	4,96	5,05	5,15	5,24	3,94	4,66	4,85	5,01	5,17	3,42	4,32	4,69	4,91	5,13	3,05	4,12	4,56	4,84	5,09
	0,6	4,02	4,15	4,23	4,31	4,39	3,28	3,88	4,06	4,20	4,33	2,84	3,59	3,93	4,12	4,30	2,55	3,42	3,82	4,05	4,26
	0,8	3,51	3,64	3,71	3,78	3,85	2,87	3,39	3,56	3,68	3,80	2,48	3,14	3,44	3,61	3,76	2,23	3,00	3,35	3,55	3,74
3	0	19,8	20,2	20,6	21,0	21,3	18,3	19,1	19,8	20,4	21,1	16,7	18,2	19,1	20,0	20,9	15,0	17,4	18,6	19,7	20,7
	0,2	6,83	6,99	7,12	7,25	7,38	5,58	6,59	6,83	7,06	7,30	4,83	6,10	6,61	6,92	7,22	4,32	5,80	6,48	6,81	7,16
	0,4	4,93	5,10	5,19	5,29	5,38	4,03	4,77	4,98	5,15	5,31	3,49	4,41	4,82	5,05	5,26	3,12	4,18	4,69	4,96	5,22
	0,6	4,06	4,21	4,29	4,36	4,44	3,31	3,92	4,11	4,25	4,38	2,87	3,63	3,98	4,16	4,34	2,56	3,45	3,87	4,10	4,31
	0,8	3,53	3,66	3,73	3,80	3,87	2,88	3,41	3,58	3,70	3,82	2,49	3,16	3,46	3,63	3,78	2,23	3,00	3,36	3,56	3,75

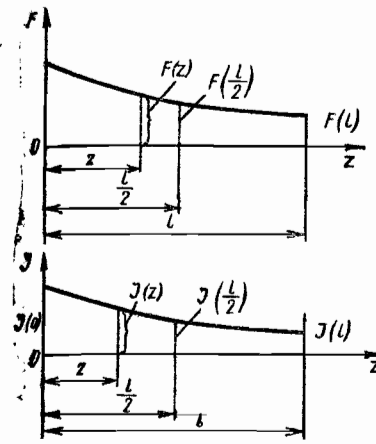


Рис. 23. Изменение площади и момента инерции по длине лопатки

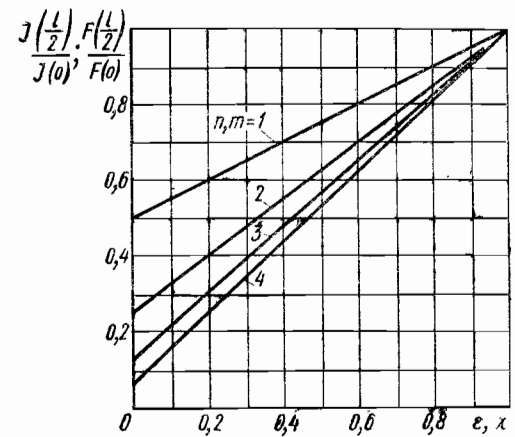


Рис. 24. Отношение момента инерции и площади сечения в середине лопатки к их значениям в корневом сечении

При расчете по формуле (57) получаются значения круговой частоты колебаний. Частота колебаний в Гц

$$f = \frac{p}{2\pi}$$

Для выбора показателей m и n можно ориентироваться на отношения $F(0,5l)/F(0)$ и $J(0,5l)/J(0)$, которые соответствуют определенным значениям m и n (рис. 24). Если значения $F(0,5l)$ и $J(0,5l)$ неизвестны, можно в среднем принимать $m \approx 1, n \approx 2$.

Пример. Найти основную частоту колебаний для лопатки длиной $l=20$ см, с размерами корневого сечения (см. рис. 13) $b=8$ см, $\delta=0,6$ см, $h=0,8$ см и концевого $b=8$ см, $\delta=0,2$ см, $h=0,2$ см при линейном изменении толщины и стрелы изогнутости сечений. По формулам (28), (29) находим

$$F(0) = 0,7b(0)\delta(0) = 0,7 \cdot 8 \cdot 0,6 = 3,36 \text{ см}^2;$$

$$F(l) = 0,7 \cdot 8 \cdot 0,2 = 1,12 \text{ см}^2;$$

$$F(0,5l) = 0,7 \cdot 8 \cdot 0,4 = 2,24 \text{ см}^2;$$

$$J(0) = 0,04b(0)\delta^3(0) [1 + \{h(0)/\delta(0)\}^2] = 0,04 \cdot 8 \cdot 0,6^3 [1 + (0,8/0,6)^2] = 0,193 \text{ см}^4;$$

$$J(l) = 0,04 \cdot 8 \cdot 0,2^3 [1 + (0,2/0,2)^2] = 0,00513 \text{ см}^4;$$

$$J(0,5l) = 0,04 \cdot 8 \cdot 0,4^3 [1 + (0,5/0,4)^2] = 0,0528 \text{ см}^4;$$

$$\chi = \frac{1,12}{3,36} = 0,333; \quad \epsilon = \frac{0,00513}{0,193} = 0,0266;$$

$$\frac{F(0,5l)}{F(0)} = \frac{2,24}{3,36} = 0,667; \quad \frac{J(0,5l)}{J(0)} = \frac{0,0528}{0,193} = 0,274.$$

По рис. 24 устанавливаем, что $m=1, n \approx 2$. По табл. 4 для этих значений m и n путем линейной интерполяции для χ и ϵ находим значение $\lambda \approx 4,01$. По формуле (57)

$$p = 5,1 \cdot 10^4 \frac{4,01}{20^2} \sqrt{\frac{0,193}{3,36}} = 1225 \text{ рад/с или } f = \frac{1225}{6,28} = 195 \text{ Гц.}$$

Уточненный расчет собственных частот. Более точно собственные частоты колебаний лопатки могут быть рассчитаны методом последовательных приближений. Дифференциальное уравнение колебаний лопатки в плоскости меньшей жесткости имеет вид

$$\frac{d^2}{dz^2} [FJ(z) \frac{d^2 \eta}{dz^2}] = p^2 \rho F(z) \eta(z), \quad (59)$$

при граничных условиях для жестко заделанной лопатки:
в заделке

$$\eta(0) = \frac{d\eta}{dz}(0) = 0; \quad (60)$$

на свободном конце

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}(l) = \frac{d}{dz} \left[EJ(z) \frac{d^2\eta}{dz^2} \right]_{z=l} = 0. \quad (61)$$

Интегрируя обе части равенства (59) в пределах от z до l , найдем с учетом второго условия (61)

$$\frac{d}{dz} \left[EJ(z) \frac{d^2\eta}{dz^2} \right] = -\rho^2 \int_z^l \rho F(z_1) \eta(z_1) dz_1, \\ z \leq z_1 \leq l.$$

Повторяя интегрирование с учетом первого условия (61), получим

$$EJ(z) \frac{d^2\eta}{dz^2} = \rho^2 \int_z^l \int_{z_1}^l \rho F(z_2) \eta(z_2) dz_2 dz_1.$$

Переносим $EJ(z)$ в правую часть равенства и дважды интегрируя в пределах от 0 до z , находим с учетом условий (60)

$$\eta(z) = \rho^2 \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{1}{EJ(z_2)} \int_{z_2}^l \int_{z_3}^l \rho F(z_4) \eta(z_4) dz_4 dz_3 dz_2 dz_1. \quad (62)$$

Уравнение (62) решают методом последовательных приближений. Так, для i -го приближения

$$\eta_i(z) = \rho_i^2 K \eta_{i-1}(z), \quad (63)$$

где под выражением $K\eta_{i-1}(z)$ понимают переменный интеграл в правой части уравнения (62), вычисляемый по уже известным значениям $\eta_{i-1}(z)$.

В качестве исходной функции $\eta_0(z)$ можно принять произвольную функцию, удовлетворяющую условиям закрепления (60), например функцию (58).

После вычисления $K\eta_{i-1}(z)$ значение квадрата частот в i -м приближении ρ_i^2 можно найти из условия наилучшей близости функций η_i и η_{i-1} , для чего составляем выражение для средней квадратичной ошибки «с весом»:

$$\Delta_i = \frac{1}{l} \int_0^l (\eta_i - \eta_{i-1})^2 F dz = \frac{1}{l} \int_0^l (\rho_i^2 K \eta_{i-1} - \eta_{i-1})^2 F dz$$

и из условия ее минимума $\frac{\partial \Delta_i}{\partial \rho_i^2} = 0$ находим

$$\rho_i^2 = \frac{\int_0^l F(z) \eta_{i-1}(z) K \eta_{i-1}(z) dz}{\int_0^l F(z) [K \eta_{i-1}(z)]^2 dz}. \quad (64)$$

Найдя ρ_i^2 , определяем по уравнению (63) значение $\eta_i(z)$. Процесс решения, как правило, быстро сходится (после двух-трех приближений). В результате рас-

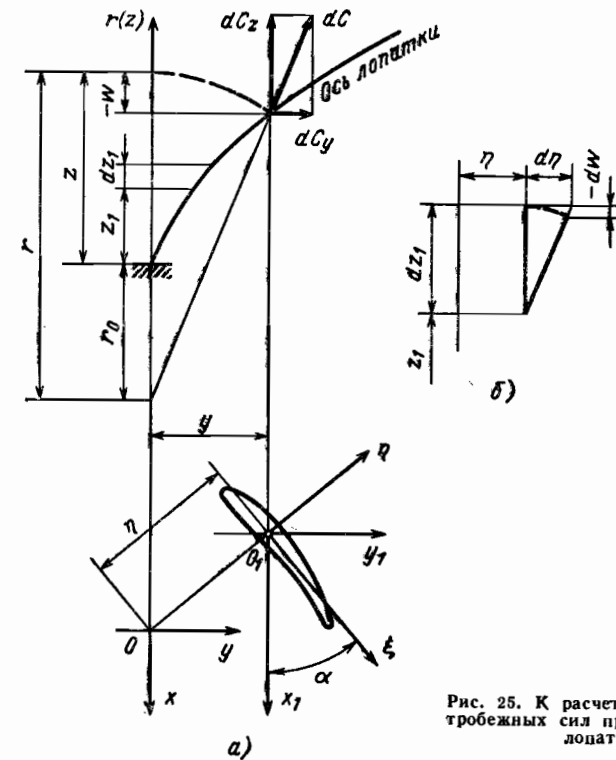


Рис. 25. К расчету работы центробежных сил при колебаниях лопатки

чета определяют не только первую собственную частоту, но и эпюру относительных прогибов $\eta(z) = \eta(z)/\eta(l)$ при колебаниях по первой форме, что позволяет найти вторые относительных изгибающих моментов

$$M(z) = \rho^2 \int_z^l \int_{z_1}^l \rho F(z_2) \bar{\eta}(z_2) dz_2 dz_1 \quad (65)$$

и относительных динамических напряжений

$$\bar{\sigma}(z) = \frac{\bar{M}(z)}{W(z)}.$$

При тензометрировании лопаток тензодатчики наклеивают в сечении, где величина $\bar{\sigma}$ максимальна.

Методом последовательных приближений с использованием условий ортогональности рассчитывают также более высокие собственные частоты и формы колебаний.

Колебания вращающихся лопаток. Центробежные силы, создавая растяжение лопатки, повышают собственную частоту ее колебаний. При колебаниях лопатки в поле центробежных сил эти силы совершают работу $A_{ц}$, в результате чего потенциальная энергия увеличивается на величину $P_{ц} = -A_{ц}$. Если прогиб лопатки в плоскости минимальной жесткости равен $\eta(z)$, то на элемент лопатки будут дей-

ствовать силы dC_z и dC_y (рис. 25, а).

$$\left. \begin{aligned} dC_z &\approx dC = \rho \omega^2 (r_0 + z) F(z) dz; \\ dC_y &\approx dC \frac{y(z)}{r_0 + z} = \rho \omega^2 y(z) F(z) dz, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

причем

$$y(z) = \eta(z) \cos \alpha(z).$$

Работа этих сил для всей лопатки

$$A_{\text{ц}} = \int_0^l [\omega(z) dC(z) + 0,5 y(z) C_y(z)] dz. \quad (67)$$

Множитель 0,5 во втором члене правой части равенства (67) связан с тем, что сила dC_y увеличивается пропорционально перемещению y . Перемещение сечения z в радиальном направлении

$$\omega(z) = \int_0^z d\omega = -0,5 \int_0^z \left[\frac{d\eta}{dz} \right]^2 dz, \quad (68)$$

так как согласно рис. 25, б

$$-d\omega = \sqrt{dz^2 + d\eta^2} - dz \approx dz \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 \right] - dz = \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 dz.$$

Из выражений (66)–(68) и (51) следует

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{ц}} = -A_{\text{ц}} = \cos^2 \alpha \rho t \frac{\omega^2}{2} &\left\{ \int_0^l \rho (r_0 + z) F(z) \int_0^z \left[\frac{d\eta(z_1)}{dz_1} \right]^2 dz_1 dz - \right. \\ &\left. - \int_0^l \rho [\eta(z)]^2 \cos^2 \alpha(z) F(z) dz \right\}. \end{aligned}$$

Добавляя величину $\Pi_{\text{ц}}$ к выражению потенциальной энергии деформации изгиба (53), получим для слабо закрученной лопатки (при $\cos \alpha \approx \text{const}$) вместо (54) следующую формулу:

$$p^2 = p_0^2 + B\omega^2, \quad (69)$$

где p_0 — частота невращающейся лопатки, определяемая формулой (54); B — коэффициент;

$$B = \frac{\int_0^l (r_0 + z) F(z) \int_0^z \left[\frac{d\eta(z_1)}{dz_1} \right]^2 dz_1 dz}{\int_0^l [\eta(z)]^2 F(z) dz} - \cos^2 \alpha. \quad (70)$$

Коэффициент B можно определить, задавшись приближенно формой прогиба $\eta(z)$, например, согласно формуле (58). Для лопатки постоянного сечения

$$B = 0,833\lambda + 0,5 - \cos^2 \alpha, \quad (71)$$

где $\lambda = D_{\text{ср}}/l$.

Для лопатки с линейным изменением площади при задании формы прогибов согласно формуле (55)

$$B = \frac{0,091\chi + 0,011}{0,206\chi + 0,051} + \lambda \frac{0,151\chi + 0,049}{0,206\chi + 0,051} - \cos^2 \alpha, \quad (72)$$

где $\chi = F(R)/F(r_0)$.

При $\chi = 0,5$ это дает

$$B = 0,81\lambda + 0,37 - \cos^2 \alpha. \quad (73)$$

Формулой (73) приближенно можно пользоваться и при других значениях χ , а также для расчета лопаток со степенным законом изменения площадей при $m = 1 \div 3$.

При колебаниях в плоскости вращения ($\alpha = 0$) влияние центробежных сил на увеличение частоты проявляется слабее, чем при колебаниях в осевой плоскости ($\alpha = 90^\circ$).

Для турбинных лопаток учитывают влияние снижения модуля упругости с повышением температуры, что приводит к снижению частоты (см. ниже рис. 45, б). Так как величина B не зависит от упругих свойств лопатки, то собственную частоту вращающейся турбинной лопатки f (в Гц) определяют по формуле

$$f = \sqrt{f_0^2 \frac{E_T}{E_0} + B \left(\frac{n}{60} \right)^2}, \quad (74)$$

где f_0 — частота колебаний невращающейся лопатки, Гц; E_0 , E_T — модули упругости материала лопатки соответственно при нормальной и рабочей температуре; n — частота вращения ротора, об/мин.

ЗАКРУЧЕННЫЕ ЛОПАТКИ

Для обеспечения высоких коэффициентов полезного действия рабочие лопатки компрессоров и турбин при $D_{\text{ср}}/l < 10$ обычно выполняют закрученными (с переменным углом установки α). Полный угол закрученности $\Delta\alpha = \alpha(l) - \alpha(0)$ достигает 45–60°.

Слабо закрученные лопатки. Для слабо закрученных лопаток с относительной толщиной сечений

$$\frac{\delta}{b} > 0,2,$$

а также для лопаток, у которых параметр закрученности

$$\gamma = \frac{b^2 \Delta\alpha}{\delta l} \geq 1,$$

влияние закрученности проявляется только в изменении положения оси наименьшей жесткости ξ по длине лопатки. Жесткости на изгиб EJ_ξ и на растяжение EF остаются без изменения. Упругая кривизна оси лопатки при изгибе в плоскости наименьшей жесткости

$$\kappa_\xi(z) = \frac{M_\xi(z)}{EJ_\xi(z)} = \frac{1}{EJ_\xi(z)} [M_{x_1}(z) \cos \alpha(z) + M_{y_1}(z) \sin \alpha(z)] \quad (75)$$

связана с кривизнами оси лопатки в неподвижной системе координат x , y , r (см. рис. 7) соотношениями

$$\kappa_x = -\frac{d^2y}{dz^2} = \kappa_\xi \cos \alpha; \quad \kappa_y = \frac{d^2x}{dz^2} = \kappa_\xi \sin \alpha, \quad (76)$$

где $x(z)$, $y(z)$ — прогибы в направлении осей x , y .

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dz^2} &= \frac{\sin \alpha}{EJ_{\xi}} (M_{x_1} \cos \alpha + M_{y_1} \sin \alpha); \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= -\frac{\cos \alpha}{EJ_{\xi}} (M_{x_1} \cos \alpha + M_{y_1} \sin \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Соотношения (77) позволяют рассчитать статические прогибы и провести расчет на колебания слабо закрученных лопаток. Изгибающий момент M_{x_1} вызывает в этом случае прогиб не только в направлении оси y , но и в перпендикулярном направлении вдоль оси x , т. е. лопатка испытывает «косой» изгиб.

Для более сильно закрученных лопаток, особенно с тонкими профилями, закрученность вызывает изменение жесткостей на изгиб и растяжение и приводит к появлению связи между деформациями изгиба, растяжения и кручения. В этом случае лопатку рассчитывают как закрученный стержень.

Основные соотношения теории закрученных стержней. В закрученных лопатках продольные волокна представляют собой винтовые линии. На рис. 26 показано одно из таких волокон, находящееся на расстоянии ξ от оси и соединяющее две соответственные точки в сечениях r и $r + dr$ (принято $\eta \ll \xi$). Угол наклона волокна

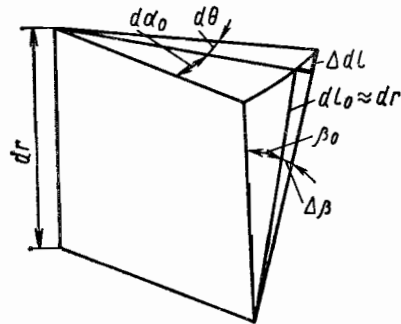


Рис. 26. Удлинение наклонного волокна закрученной лопатки при повороте сечений

при этом длина наклонного волокна dl_0 увеличивается на отрезок

$$\Delta dl = \frac{dr}{\cos \beta} - \frac{dr}{\cos \beta_0}.$$

В лопатках углы β_0 и β , как правило, не превышают нескольких градусов, что позволяет считать

$$\sin \beta_0 \approx \text{tg } \beta_0 \approx \beta_0; \quad \cos \beta_0 \approx 1 - 0,5\beta_0^2$$

и аналогично для β .

Тогда при $\beta_0^2 \ll 1$

$$\Delta dl \approx \frac{1}{2} (\beta^2 - \beta_0^2) dr = \frac{d\theta}{dr} \left(\frac{d\alpha_0}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dr} \right) \xi^2 dr$$

и дополнительная относительная деформация, связанная с поворотом наклонного волокна при $\frac{d\theta}{dr} \ll \frac{d\alpha_0}{dr}$ будет

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta dl}{dl_0} = \frac{d\theta}{dr} \frac{d\alpha_0}{dr} \xi^2. \quad (78)$$

Суммируя величину $\Delta \varepsilon$ с относительным удлинением стержня при плоском изгибе (см. стр. 357), для закрученной лопатки получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \eta \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\theta}{dr} \frac{d\alpha_0}{dr} \xi^2, \quad (79)$$

где ε_0 — удлинение волокна, совпадающего с осью лопатки; φ — угол поворота сечения относительно оси наименьшей жесткости ξ . Поворотом сечений относительно оси η можно пренебречь.

Напряжение в наклонном волокне, практически равное напряжению в поперечном сечении,

$$\sigma = E\varepsilon = E \left(\varepsilon_0 + \eta \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\theta}{dr} \frac{d\alpha_0}{dr} \xi^2 \right). \quad (80)$$

Из условий равновесия

$$\int_F \sigma dr = N; \quad \int_F \sigma \eta dr = M_{\xi}, \quad (81)$$

(где N — растягивающая сила; M_{ξ} — изгибающий момент в сечении лопатки) следует

$$\left. \begin{aligned} E \left(\varepsilon_0 F + \frac{d\theta}{dr} \frac{d\alpha_0}{dr} J_p \right) &= N; \\ E \left(\frac{d\varphi}{dr} J_{\xi} + \frac{d\theta}{dr} \frac{d\alpha_0}{dr} J_{p\xi} \right) &= M_{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Здесь учтено, что оси ξ , η проходят через центр тяжести сечения ($\int_F \eta dF = 0$), и обозначено

$$J_p \approx J_{\eta} = \int_F \xi^2 dF; \quad J_{p\xi} \approx \int_F \eta \xi^2 dF. \quad (83)$$

В закрученных лопатках крутящий момент в сечении M_{κ} уравновешивается не только моментом касательных напряжений $GT \frac{d\theta}{dr}$ (см. гл. 18), но и моментом проекций нормальных напряжений в наклонных волокнах на плоскость поперечного сечения $\sigma \beta_0$ (рис. 26), так что

$$GT \frac{d\theta}{dr} + \int_F \sigma \beta_0 \xi dF = M_{\kappa} \quad (84)$$

или с учетом формулы (80)

$$GT' \frac{d\theta}{dr} + E \frac{d\alpha_0}{dr} \left(\varepsilon_0 J_p + \frac{d\varphi}{dr} J_{p\xi} \right) = M_{\kappa}, \quad (85)$$

где

$$T' = T + \frac{E}{G} \left(\frac{d\alpha_0}{dr} \right)^2 \int_F \xi^4 dF. \quad (86)$$

Подставив в равенство (85) выражения для ε_0 и $\frac{d\varphi}{dr}$ из уравнения (82), найдем

$$\frac{d\theta}{dr} = a_{0\varepsilon} N + a_{0\varphi} M_{\xi} + a_{0M_{\kappa}} \quad (87)$$

где $a_{\theta e}$, $a_{\theta \varphi}$, a_{θ} — коэффициенты податливости;

$$\left. \begin{aligned} a_{\theta} &= \left[GT' - E \left(\frac{d\alpha_0}{dr} \right)^2 \left(\frac{J_p^2}{F} + \frac{J_{p\xi}^2}{J_{\xi}^2} \right) \right]^{-1}; \\ a_{\theta e} &= -a_{\theta} \frac{d\alpha_0}{dr} \frac{J_p}{F}; \\ a_{\theta \varphi} &= -a_{\theta} \frac{d\alpha_0}{dr} \frac{J_{p\xi}}{J_{\xi}}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Подставив выражение (87) в равенство (82), получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= a_e N + a_{e\varphi} M_{\xi} + a_{e\theta} M_{\kappa}; \\ \frac{d\varphi}{dr} &= a_{\varphi e} N + a_{\varphi} M_{\xi} + a_{\varphi\theta} M_{\kappa}, \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_e &= \frac{1}{EF} \left[1 + a_{\theta} E \left(\frac{d\alpha_0}{dr} \right)^2 \frac{J_p^2}{F} \right]; \\ a_{\varphi} &= \frac{1}{EJ_{\xi}} \left[1 + a_{\theta} E \left(\frac{d\alpha_0}{dr} \right)^2 \frac{J_{p\xi}}{J_{\xi}} \right]; \\ a_{e\theta} &= a_{\theta e}; \quad a_{\varphi\theta} = a_{\theta\varphi}; \\ a_{e\varphi} &= a_{\varphi e} = a_{\theta} \left(\frac{d\alpha_0}{dr} \right)^2 \frac{J_p J_{p\xi}}{F J_{\xi}}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Для незакрученной лопатки $\frac{d\alpha_0}{dr} = 0$ и соотношения (87) и (89) принимают обычный вид

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{M_{\kappa}}{GT}; \quad \varepsilon_0 = \frac{N}{EF}; \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{M_{\xi}}{EJ_{\xi}}. \quad (91)$$

Выражениями (91) можно пользоваться также при расчете слабо закрученных лопаток и лопаток с относительно толстыми сечениями.

Для сечений, симметричных относительно хорды профиля, величины $J_{p\xi} = 0$, $a_{\varphi\theta} = a_{\varphi e} = 0$, $a_{\varphi} = 1/EJ_{\xi}$, т. е. основное соотношение теории изгиба незакрученных стержней

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M_{\xi}}{EJ_{\xi}}$$

остается в этом случае справедливым и для стержней закрученных. Выражениями (91) можно приближенно пользоваться при расчете на изгиб лопаток со слабо изогнутыми сечениями (примерно до $\frac{h}{\delta} \leq 0,3$, см. рис. 13).

В закрученной лопатке жесткости на изгиб и растяжение убывают, жесткость на кручение возрастает, а все виды деформаций оказываются взаимосвязанными.

Геометрические и жесткостные характеристики закрученных лопаток. Определение основных геометрических и жесткостных характеристик, необходимых для расчета закрученных лопаток, может быть выполнено по следующим приближен-

ным формулам:

$$\left. \begin{aligned} J_p &\approx J_{\eta} = 0,0833 k_{\eta} b^3 \delta; \quad J_{p\xi} = 0,02225 k_{p\xi} b^3 \delta h; \\ T &= 0,3333 k_{\tau} b \delta^3; \quad \int_{\xi}^4 dF = 0,01250 k_{\tau} b^3 \delta; \\ a_{\theta} &= \left\{ GT \left[1 + \frac{0,0333 (1+\nu) k_{\tau}^2 \gamma^2}{1 + 1,067 k_{\tau} q^2} \right] \right\}^{-1}; \\ a_e &= \frac{1}{EF} [1 + 0,0417 (1+\nu) k_{\tau}^2 \gamma^2 a_{\theta} GT]; \\ a_{\varphi} &= \frac{1}{EJ_{\xi}} \left[1 + \frac{0,0356 (1+\nu) k_{\xi}^2 q^2 \gamma^2 a_{\theta} GT}{1 + 1,067 k_{\tau} q^2} \right]; \\ a_{e\theta} &= -0,0833 k_{e\theta} \gamma \delta a_{\theta}; \quad a_{\varphi\theta} = -\frac{0,267 k_{\varphi\theta} \gamma \gamma}{1 + 1,067 k_{\tau} q^2} a_{\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

где

$$q = \frac{h}{\delta}; \quad \gamma = \frac{b^2}{\delta} \frac{d\alpha_0}{dr}.$$

Коэффициенты k находят по данным рис. 14 в зависимости от значения коэффициента $k_F = \frac{F}{b\delta}$, определяемого по фактической площади сечения. Ориентировочно можно считать $k_F = 0,70 \div 0,75$. Момент инерции J_{ξ} определяют по формуле (32).

Раскрутка от центробежных сил. Центробежные силы, действующие на лопатку с прямой осью, приводят к появлению в поперечных сечениях лопатки растягивающей силы

$$N(r) = C(r) \quad (93)$$

[см. формулу (2)] и крутящего момента (рис. 27)

$$M_{\kappa} = \rho \omega^2 \int_r^R \int_{\xi} xy dF dr \approx \rho \omega^2 \int_r^R J_{\eta} \frac{\sin 2\alpha_0}{2} dr. \quad (94)$$

Введя формулы (93) и (94) в выражение (87) при $M_{\xi} = 0$ и проинтегрировав его по всей длине лопатки, найдем, что конец лопатки повернется на угол

$$\theta(R) = \rho \omega^2 \int_0^R \left[a_{\theta e}(r) \int_r^R r_1 F(r_1) dr_1 + a_{\theta}(r) \int_r^R J_{\eta}(r_1) \frac{\sin 2\alpha_0(r_1)}{2} dr_1 \right] dr. \quad (95)$$

Для равномерно закрученной лопатки постоянного сечения при $k_F \approx 0,7$ и $\nu = 0,3$

$$\theta(R) = -0,65 \frac{\sigma_0}{E} \frac{\xi_0}{1 + \xi_0} \Delta \alpha \left(\frac{b}{\delta} \right)^3 \frac{1 + 0,885 q^2}{1 + 0,885 q^2 + 0,0364 \gamma^2}, \quad (96)$$

где $\Delta \alpha$ — угол полной закрученности; $\gamma = \Delta \alpha \left(\frac{b}{\delta} \right) \left(\frac{b}{l} \right)$, а σ_0 определяется формулой (5).

Из выражения (96) видно, что центробежные силы уменьшают начальную закрученность лопатки.

С увеличением начальной закрученности угол $\theta(R)$ вначале возрастает, а затем, достигнув максимума, начинает убывать (из-за увеличения крутильной жесткости лопатки). Угол $\theta(R)$ может составлять несколько градусов, что необходимо учиты-

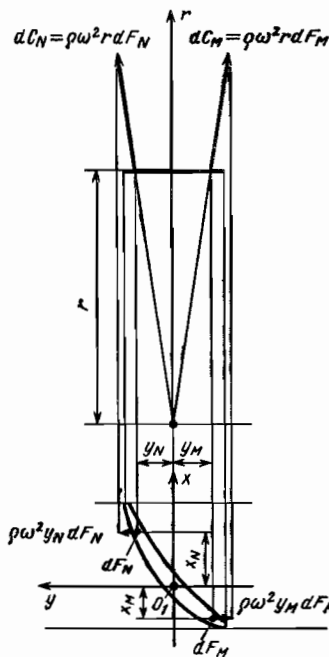
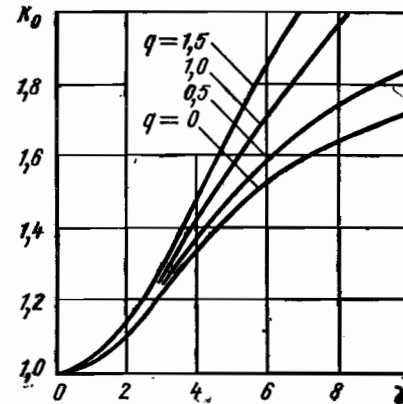


Рис. 27. Возникновение крутящего момента от центробежных сил

Рис. 28. Зависимость коэффициента увеличения напряжений в закрученной лопатке k_0 от параметров γ 

вать при газодинамическом расчете. Так как для разных материалов $\rho/E \approx \text{const}$, а $\sigma_0 \approx \rho$, то угол $\theta(R)$ практически не зависит от материала лопатки.

Упругое удлинение лопатки. Подставив формулы (93) и (94) в первое выражение (89) при $M_\xi = 0$ и проинтегрировав его по всей длине лопатки, найдем, что лопатка удлинится на величину

$$\Delta l = \rho\omega^2 \int_{r_0}^R \left[a_\varepsilon(r) \int_r^R r_1 F(r_1) dr_1 + a_{\varepsilon 0}(r) \int_r^R J_\eta(r_1) \frac{\sin 2\alpha_0(r_1)}{2} dr_1 \right] dr. \quad (97)$$

Для равномерно закрученной лопатки постоянного сечения при $k_F \approx 0,7$ и $\nu = 0,3$

$$\Delta l = \Delta l_y \left(1 + \gamma^2 \frac{\xi_0}{1 + 0,5\xi_0} \frac{1 + 0,885q^2}{1 + 0,885q^2 + 0,0364\gamma^2} \right), \quad (98)$$

где Δl_y определяется формулой (11).

С увеличением начальной закрученности удлинение Δl возрастает.

Напряжения от центробежных сил. Пренебрегая влиянием крутящего момента, можно считать

$$\varepsilon_0 \approx a_\varepsilon N; \quad \frac{d\varphi}{dr} \approx a_{\varphi\varepsilon} N; \quad \frac{d\theta}{dr} \approx a_{\theta\varepsilon} N$$

и распределение напряжений согласно формуле (80) будет определяться выражением

$$\sigma = \sigma_{\text{ср}} \left[1 + Ea_0 J_p \left(\frac{d\alpha_0}{dr} \right)^2 \left(\frac{J_p}{F} + \frac{J_p \xi}{J_\xi} \eta - \xi^2 \right) \right], \quad (99)$$

где среднее напряжение по сечению $\sigma_{\text{ср}}$ определяется формулой (2).

В закрученной лопатке напряжения от растяжения распределяются по поперечному сечению неравномерно.

В центральной части сечения напряжения выше средних, у кромок — ниже. У оси лопатки ($\xi = \eta = 0$)

$$\sigma(0) = k_0 \sigma_{\text{ср}},$$

где

$$k_0 = E F a_\varepsilon = 1 + E a_0 \left(\frac{d\alpha_0}{dr} \right)^2 \frac{J_p^2}{F}. \quad (100)$$

Зависимость коэффициента k_0 от параметров закрученности $\gamma = \frac{b^2}{\delta} \frac{d\alpha_0}{dr}$ и относительной изогнутости профиля $q = \frac{h}{\delta}$ приведена на рис. 28. Графиком (рис. 28) можно пользоваться для приближенной оценки максимальных напряжений от центробежных сил в закрученной лопатке.

При растяжении тонких сильно закрученных лопаток на кромках появляются сжимающие напряжения, что может привести к короблению кромок.

Колебания лопаток. При колебаниях закрученной лопатки по основной форме $N \approx M_k \approx 0$ и

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= a_\varphi M_\xi; \\ \frac{d\theta}{dr} &= a_{\theta\varphi} M_\xi = \frac{a_{\theta\varphi}}{a_\varphi} \frac{d\varphi}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Для такой же незакрученной лопатки

$$\frac{d\varphi}{dr} = a_{\varphi 0} M_\xi, \quad (102)$$

где

$$a_{\varphi 0} = \frac{1}{E J_\xi}.$$

Из сравнения выражений (101) и (102) видно, что основную частоту колебаний закрученной лопатки можно приближенно определить теми же методами, что и основную частоту соответствующей незакрученной лопатки (см. стр. 294), но с заменой момента инерции сечения J_ξ *эффективной геометрической жесткостью на изгиб* J_ξ^* , где

$$J_\xi^* = \frac{1}{E a_\varphi} = J_\xi \left[1 + a_0 E \left(\frac{d\alpha_0}{dr} \right)^2 \frac{J_p^2}{J_\xi} \right]^{-1}. \quad (103)$$

Для равномерно закрученной лопатки постоянного сечения при $k_F \approx 0,7$ и $\nu = 0,3$

$$f = f_0 \sqrt{1 - \frac{0,0316q^2\gamma^2}{(1 + 0,885q^2)(1 + 0,0364\gamma^2)}}, \quad (104)$$

где f_0 — частота колебаний соответствующей незакрученной лопатки.

Основная частота колебаний убывает с увеличением параметров закрученности $\gamma = \frac{b^2}{\delta} \frac{d\alpha_0}{dr}$ и относительной изогнутости профиля $q = \frac{h}{\delta}$.

Из формул (101) видно, что изгибные колебания закрученной лопатки сопровождаются поворотом сечений. Относительный угол поворота периферийной сечения лопатки

$$\bar{\theta}(R) = \frac{\theta(R) b}{\eta(R)}, \quad (105)$$

где $\eta(R)$ — перемещение конца лопатки, перпендикулярное хорде.

5. Значения коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

γ	\bar{h}	δ								
		0,1			0,5			1,0		
		$q(0)$								
		0	0,5	1	0	0,5	1	0	0,5	1
Первая форма λ_1										
0	0 1		0,197 0,217	0,242 0,293		0,159 0,168	0,190 0,218		0,146 0,150	0,171 0,187
1	0 1		0,196 0,218	0,236 0,288		0,159 0,167	0,188 0,214		0,145 0,150	0,169 0,186
2	0 1	0,180	0,193 0,206	0,225 0,264	0,148	0,158 0,165	0,183 0,206	0,136	0,144 0,148	0,166 0,181
5	0 1		0,186 0,192	0,203 0,222		0,153 0,157	0,168 0,181		0,141 0,143	0,155 0,164
10	0 1		0,183 0,185	0,189 0,197		0,150 0,152	0,157 0,162		0,138 0,139	0,144 0,148
Вторая форма λ_2										
0	0 1	0,404	0,404	0,404	0,449	0,449	0,449	0,480	0,480	0,480
1	0 1	0,440	0,437 0,422	0,435 0,421	0,463	0,463 0,461	0,463 0,461	0,488	0,489 0,488	0,489 0,489
2	0 1	0,517	0,511 0,469	0,507 0,459	0,500	0,500 0,495	0,501 0,493	0,514	0,514 0,514	0,513 0,514
5	0 1	0,588	0,597 0,577	0,622 0,565	0,698	0,697 0,656	0,700 0,641	0,665	0,666 0,661	0,669 0,658
10	0 1	0,574	0,578 0,578	0,590 0,590	0,669	0,675 0,677	0,691 0,697	0,789	0,796 0,797	0,816 0,819
Третья форма λ_3										
0	0 1	0,593	0,643 0,684	0,684 0,684	0,709	0,748 0,837	0,849 1,082	0,853	0,891 0,944	0,987 1,177
1	0 1	0,592	0,635 0,709	0,710 0,700	0,709	0,745 0,826	0,836 1,034	0,852	0,888 0,939	0,979 1,154
2	0 1	0,592	0,628 0,727	0,693 0,743	0,707	0,738 0,805	0,812 0,980	0,850	0,881 0,926	0,962 1,109
5	0 1	0,810	0,814 0,856	0,825 0,943	0,700	0,716 0,786	0,735 0,906	0,835	0,853 0,883	0,898 0,996
10	0 1	1,317	1,339 1,277	1,346 1,200	1,151	1,153 1,161	1,156 1,189	1,040	1,040 1,050	1,043 1,082

Для равномерно закрученной лопатки постоянного сечения при $k_F \approx 0,7$ угол

$$\bar{\theta}(R) \approx 0,2 \frac{b}{l} \frac{\gamma \gamma}{1 + 0,0364 \gamma^2} \quad (106)$$

Таблицы для расчета собственных частот закрученных лопаток.

Первые три собственные частоты колебаний консольных закрученных лопаток (в Гц) рассчитывают по формуле

$$f_i = \lambda_i \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\delta(0)}{l^2} \approx 5,1 \cdot 10^5 \lambda_i \frac{\delta(0)}{l^2}; \quad (i=1, 2, 3),$$

где l — длина лопатки, см; $\delta(0)$ — максимальная толщина корневого сечения, см.

Значения коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ приведены в табл. 5*, где $\gamma = \frac{b^2 \Delta \alpha}{\delta(0) l} \left(\frac{\pi}{180} \right)$ —

параметр закрученности (b — хорда лопатки в см, принята постоянной по ее длине; $\Delta \alpha$ — полный угол закрученности в градусах);

$q(0) = \frac{h(0)}{\delta(0)}$ — относительная изогнутость корневого сечения; $\bar{\delta} = \frac{\delta(l)}{\delta(0)}$, $\bar{h} = \frac{h(l)}{h(0)}$

($\delta(l)$ — максимальная толщина, $h(l)$ — стрела изогнутости периферийного сечения).

Таблица рассчитана для $l/b = 1,5$, но при определении λ_1 ее можно использовать и при других значениях отношения l/b , так как его основное влияние отражено в параметре γ .

Пример. Найти первую собственную частоту колебаний для лопатки, данные которой были приведены в примере на стр. 297 при угле закрученности $\Delta \alpha = 54^\circ$. Определяем:

$$\gamma = \frac{8^2 \cdot 54 \pi}{0,6 \cdot 20 \cdot 180} = 5; \quad q(0) = \frac{0,8}{0,6} = 1,333; \quad \bar{\delta} = \frac{0,2}{0,6} = 0,333; \quad \bar{h} = \frac{0,2}{0,3} = 0,25.$$

По табл. 5 путем линейной интерполяции находим $\lambda_1 = 0,20$ и

$$f_1 = 5,1 \cdot 10^5 \cdot 0,20 \cdot 0,20 = 765 \cdot 0,20 = 153 \text{ Гц.}$$

Учет закрученности привел к заметному снижению основной частоты колебаний.

ШАРНИРНЫЕ ЛОПАТКИ

Кинематика. Схематичная картина шарнирного замка показана на рис. 29, где $\rho_{ш}$ — радиус штифта (пальца) шарнира; ρ_1 — радиус отверстия в проушине лопатки. Для простоты считаем, что штифт жестко закреплен в диске. Относительный радиальный зазор в шарнирном соединении

$$\Delta = \frac{\rho_1 - \rho_{ш}}{\rho_1} \quad (107)$$

Обычно $\Delta = 0,05 \div 0,15$

Центробежные силы прижимают лопатку к штифту, так что в исходном положении линия контакта лопатки со штифтом проходит через точку A (рис. 29, а). При отклонении лопатки на угол ψ линия контакта перемещается в точку B , определяемую углом Φ (рис. 29, б). При малых отклонениях движение лопатки происходит путем обкатывания без скольжения, т. е. дуги A_1B и AB равны между собой или

$$\rho_{ш} \psi = \rho_1 (\Phi - \psi),$$

откуда

$$\psi = \gamma_1 \Phi, \quad (108)$$

* Расчеты выполнены В. Н. Тюленевым и В. А. Рудавцом по методике работы [9].

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{\Delta} = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_m} \quad (109)$$

При движении лопатки как твердого тела перемещение произвольной точки M с координатами y, z_m складывается из перемещений от поворота лопатки относительно точки A :

$$\begin{aligned} v' &= -y(1 - \cos \varphi) + z_m \sin \varphi \approx -0,5y\varphi^2 + z_m\varphi; \\ w' &= -y \sin \varphi - z_m(1 - \cos \varphi) \approx -y\varphi - 0,5z_m\varphi^2 \end{aligned}$$

и перемещений самой точки A из-за обкатывания, равных v'', w'' .
Из рис. 29, б следует

$$\begin{aligned} -v'' &= \rho_1 \sin \varphi - (\rho_1 - \rho_m) \sin \psi \approx \rho_1 \varphi - (\rho_1 - \rho_m) \psi; \\ -w'' &= \rho_1 \cos \varphi - [\rho_m + (\rho_1 - \rho_m) \cos \psi] = (\rho_1 - \rho_m)(1 - \cos \psi) - \rho_1(1 - \cos \varphi) \approx \\ &\approx 0,5(\rho_1 - \rho_m) \psi^2 - 0,5\rho_1 \varphi^2. \end{aligned}$$

С учетом выражений (108), (109) найдем, что

$$v'' \approx 0;$$

$$w'' \approx -0,5 \frac{\rho_m \rho_1}{\rho_1 - \rho_m} \varphi^2 = -0,5 \rho_m \gamma_1 \varphi^2.$$

Суммируя оба вида перемещений, получим

$$\left. \begin{aligned} v &= -0,5y\varphi^2 + z_m\varphi; \\ w &= -y\varphi - 0,5(z_m + \rho_m \gamma_1) \varphi^2. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

При малых зазорах, когда величина γ_1 велика, радиальное перемещение точек оси лопатки ($y = 0$) от обкатывания в шарнирном замке соизмеримо с перемещениями от поворота.

Маятниковые колебания лопатки. При основной форме колебаний шарнирной лопатки ее деформации обычно невелики, что позволяет приближенно считать лопатку твердым телом, совершающим маятниковые колебания с обкатыванием в поле центробежных сил. Кинетическая энергия колебаний такой лопатки

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_V \left[\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] dV \quad (111)$$

или с учетом выражений (110) с точностью до квадратичных членов

$$K = \frac{1}{2} \rho J_A \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad (112)$$

где

$$J_A = \int_V (z_m^2 + y^2) dV = \int_L (z_m^2 F + J_{x1}) dz. \quad (113)$$

Здесь интегрирование ведется во всей длине лопатки L . Величины $J_{x1} = \int y^2 dF$ обычно малы по сравнению с $z_m^2 F$ и ими можно пренебрегать.

Потенциальная энергия колебаний жесткой лопатки равна работе центробежных сил с обратным знаком:

$$\Pi = -A_{ц} = -\rho \omega^2 \int_V [yv + (r_A + z_m)w + 0,5(v^2 + w^2)] dV, \quad (114)$$

где r_A — радиус точки контакта лопатки со штифтом; лопатка колеблется в плоскости вращения.



Рис. 29. Схема обкатывания лопатки в шарнирном замке

Рис. 30. К расчету изгибающего момента от центробежных сил при отклонении шарнирной лопатки

Введя в равенство (114) выражения для перемещений (110), получим с точностью до квадратичных членов

$$\Pi = 0,5\rho\omega^2 [r_A S_A + \rho\gamma_1 (S_A + r_A V)] \varphi^2, \quad (115)$$

где

$$S_A = \int_V z_m dV = \int_L z_m F dz, \quad (116)$$

а $V = \int_L F dz$ — объем лопатки.

Полагая $\varphi = \varphi_0 \sin pt$ и приравнявая $K_{\max} = \Pi_{\max}$, найдем значение квадрата коэффициента настройки частоты при маятниковой форме колебаний лопатки:

$$q_m^2 = \left(\frac{p}{\omega} \right)^2 = \frac{r_A S_A + \rho\gamma_1 (S_A + r_A V)}{J_A}. \quad (117)$$

Обкатывание в шарнирном замке увеличивает частоту колебаний лопатки.

Шарнирную лопатку следует проектировать так, чтобы величина q_m не равнялась и не была близка к целому числу (например, выбирать q_m в пределах 1,3—1,7 или 2,3—2,7 и т. д.). Этим обеспечивают отстройку лопатки от возбуждения колебаний по маятниковой форме сил, частота которых кратна частоте вращения ротора.

Если штифт посажен в диск с зазором ($\rho_2 > \rho_m$, где ρ_2 — радиус отверстия в диске), то приближенно

$$q_m^2 = \frac{r_A S_A (\gamma_2 - 2) + r_C S_C \gamma_1 + \rho_m \gamma_1 \gamma_2 (S_A + r_A V)}{J_A (\gamma_2 - 2) + J_C \gamma_1}, \quad (118)$$

где $\gamma_2 = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_m}$; r_C — радиус точки контакта штифта с диском; S_C, J_C определяются теми же формулами, что и S_A, J_A , но с заменой координаты r_m на $r_m - 2\rho_m$.

Расчет на изгиб. При отклонении шарнирной лопатки на угол φ центробежные силы дают в текущем сечении лопатки изгибающий момент (рис. 30)

$$M_{\text{ц}} = \int_{z_{\text{ш}}}^l dC \left(v_1 \frac{r}{r_1} - v \right) = -\rho \omega^2 \varphi \int_{z_{\text{ш}}}^l F (r z_{\text{ш}1} - r_1 z_{\text{ш}}) dz_{\text{ш}1},$$

где $v = \varphi z_{\text{ш}}$, $v_1 = \varphi z_{\text{ш}1}$, а dC определяется согласно формуле (1). Так как $r = r_A + r_{\text{ш}}$, $r_1 = r_A + z_{\text{ш}1}$, то

$$M_{\text{ц}} = -\rho \omega^2 \varphi r_A \int_{z_{\text{ш}}}^l F (z_{\text{ш}1} - z_{\text{ш}}) dz_{\text{ш}1}.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, получим

$$M_{\text{ц}} = -\rho \omega^2 \varphi r_A \int_{z_{\text{ш}}}^l \int_{z_{\text{ш}1}}^l F dz_{\text{ш}2} dz_{\text{ш}1}. \quad (119)$$

Суммируя момент $M_{\text{ц}}$ с моментом от газовых сил $M_{\text{г}}$, получим

$$M_{x1}(z_{\text{ш}}) = M_{\text{г}}(z_{\text{ш}}) - \rho \omega^2 \varphi r_A \int_{z_{\text{ш}}}^l \int_{z_{\text{ш}1}}^l F(z_{\text{ш}2}) dz_{\text{ш}2} dz_{\text{ш}1}. \quad (120)$$

В начале координат (при $z_{\text{ш}} = 0$) момент относительно точки A

$$M_{x1}(0) = M_A = M_{\text{г}A} - \rho \omega^2 \varphi r_A S_A, \quad (121)$$

где $M_{\text{г}A} = M_{\text{г}}(0)$

и

$$S_A = \int_0^l \int_{z_{\text{ш}1}}^l F(z_{\text{ш}2}) dz_{\text{ш}2} dz_{\text{ш}1} \equiv \int_0^l z_{\text{ш}} F(z_{\text{ш}}) dz_{\text{ш}}.$$

В то же время сила реакции, проходящая при обкатывании через точку контакта B (см. рис. 29) и равная центробежной силе $C_n = \rho \omega^2 P_n$, где

$$P_n = \int_0^l r F dz_{\text{ш}},$$

дает относительно точки A момент

$$M_A = C_n \overline{AB} = \rho \omega^2 \rho_{\text{ш}} \gamma_1 \varphi P_n, \quad (122)$$

так как согласно рис. 29 и формуле (108)

$$\overline{AB} \approx \rho_{\text{ш}} \varphi = \rho_{\text{ш}} \gamma_1 \varphi.$$

Приравнявая выражения (121) и (122), найдем

$$\varphi = \frac{M_{\text{г}A}}{\rho \omega^2 (r_A S_A + \rho_{\text{ш}} \gamma_1 P_n)}. \quad (123)$$

Таким образом, изгибающий момент в текущем сечении шарнирной лопатки

$$M_{x1}(z_{\text{ш}}) = M_{\text{г}}(z_{\text{ш}}) - \frac{M_{\text{г}A} r_A \int_{z_{\text{ш}}}^l \int_{z_{\text{ш}1}}^l F(z_{\text{ш}2}) dz_{\text{ш}2} dz_{\text{ш}1}}{r_A S_A + \rho_{\text{ш}} \gamma_1 P_n}. \quad (124)$$

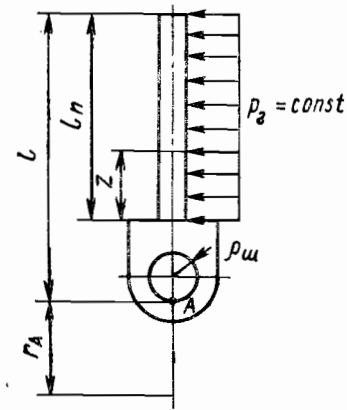


Рис. 31. Изгиб шарнирной лопатки по постоянной газовой нагрузке

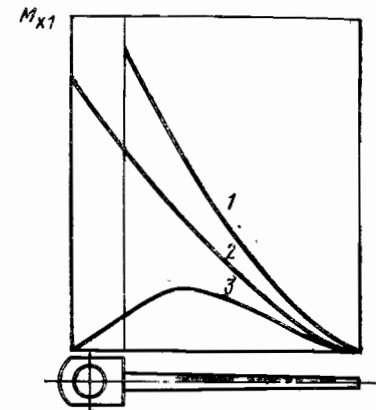


Рис. 32. Типичное распределение изгибающих моментов по длине пера: 1 — жесткой лопатки; 2 — шарнирной лопатки с учетом обкатывания; 3 — шарнирной лопатки без учета обкатывания (или при $\rho_{\text{ш}} \rightarrow 0$)

Для шарнирной лопатки постоянного сечения $F = \text{const}$, нагруженной на длину пера l_n постоянной газовой нагрузкой $p_{\text{г}} = \text{const}$ (рис. 31), формула (124) принимает вид

$$M_{x1} = M_{x1}^0 \lambda_{\text{ш}}, \quad (125)$$

где $M_{x1}^0 = p_{\text{г}} \frac{(l_n - z)^2}{2}$ — изгибающий момент в лопатке, жестко заделанной по корневому сечению ($0 \leq z \leq l_n$); $\lambda_{\text{ш}}$ — коэффициент влияния шарнирного закрепления

$$\lambda_{\text{ш}} = 1 - \frac{\bar{l}_n (2 - \bar{l}_n) r_A}{r_A + \bar{\rho}_{\text{ш}} \gamma_1 (1 + 2r_A)}, \quad (126)$$

здесь

$$\bar{l}_n = \frac{l_n}{l}; \quad r_A = \frac{r_A}{l}; \quad \bar{\rho}_{\text{ш}} = \frac{\rho_{\text{ш}}}{l}.$$

При обычных значениях $\bar{\rho}_{\text{ш}} \gamma_1 \approx 1,0 \div 0,5$; $r_A \approx 1 \div 3$ и $\bar{l}_n \approx 0,8 \div 0,9$ величина $\lambda_{\text{ш}} \approx 0,3 \div 0,6$, т. е. напряжения в пере шарнирной лопатки значительно ниже, чем напряжения при жесткой заделке.

Смещение точки контакта из-за обкатывания приводит к эффекту упругого защемления, поэтому уменьшение напряжений в реальной шарнирной лопатке оказывается меньшим, чем в идеализированном случае при $\rho_{\text{ш}} = 0$.

Типичное распределение изгибающих моментов по длине пера жестко заделанной и шарнирной лопаток показано на рис. 32.

БАНДАЖИРОВАННЫЕ ЛОПАТКИ

С целью повышения вибрационной прочности и уменьшения гидравлических потерь лопатки газовых турбин делают иногда с бандажными полками (рис. 33). Полка создает дополнительную центробежную нагрузку

$$C_n = \rho \omega^2 V_n r_n, \quad (127)$$

где V_n — объем полки; r_n — радиус расположения полки.

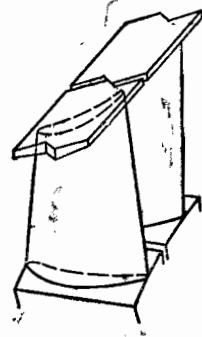


Рис. 33. Лопатки с бандажными полками

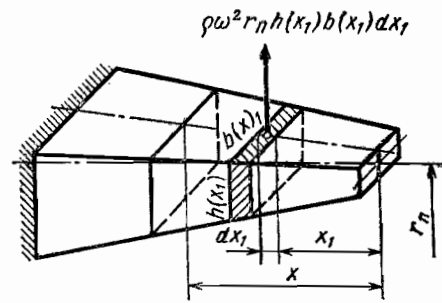


Рис. 34. Изгиб бандажной полки центробежными силами

Напряжения в перо бандажированной лопатки

$$\sigma(r) = \frac{C(r) + C_{\Pi}}{F(r)} \quad (128)$$

Полку рассчитывают на изгиб от центробежных сил как консольную балку переменного сечения, заделанную в сечении, примыкающим к перу. Изгибающий момент в сечении x (рис. 34)

$$M(x) = \rho\omega^2 r_{\Pi} \int_0^x h(x_1) b(x_1) (x - x_1) dx_1^2$$

или

$$M(x) = \rho\omega^2 r_{\Pi} [xV(x) - S(x)], \quad (129)$$

где

$$V(x) = \int_0^x h(x_1) b(x_1) dx_1^2$$

$$S(x) = \int_0^x x_1 h(x_1) b(x_1) dx_1^2$$

Напряжения изгиба

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{W(x)},$$

где

$$W(x) = \frac{1}{6} b(x) h^2(x).$$

Во избежание перегрузки тонких периферийных сечений полку следует хорошо центрировать относительно пера лопатки, а переход полки в перо делать плавным.

Бандажированные лопатки обычно ставят на колесо с некоторым натягом. Если c_1 — жесткость бандажной полки на сжатие (включая смятие по контактным поверхностям), а c_2 — жесткость лопатки на кручение, то из рис. 35 видно, что для ступени с бандажированными лопатками в собранном состоянии должны удовлет-

воряться следующие соотношения:

$$t_{\Pi} \cos \beta = b;$$

$$\Delta b = b - b_0 = \frac{P}{c_1};$$

$$\Delta \beta = \beta - \beta_0 = -\frac{Pt_{\Pi} \sin \beta}{c_2}, \quad (130)$$

где $t_{\Pi} = \frac{2\pi r_{\Pi}}{z}$ — шаг лопаток на

радиусе расположения полки; b_0 и b — расстояния между контактными поверхностями соответственно до и после сборки; β_0 и β — угол наклона контактных поверхностей к окружному направлению до и после сборки; P — сила контактного давления между бандажными полками.

Если задана геометрия полки в собранном состоянии и выбрана величина силы P , то по формулам (130) определяют значения b и β для отдельной лопатки:

$$b_0 = b + \frac{P}{c_1}; \quad \beta_0 = \beta + \frac{Pt_{\Pi} \sin \beta}{c_2}.$$

Если известны размеры и форма полки отдельной лопатки (b_0, β_0), то, считая угол упругой закрутки лопатки при сборке малой величиной, т. е.

$$\sin \beta = \sin(\beta_0 + \Delta \beta) \approx \sin \beta_0 + \Delta \beta \cos \beta_0;$$

$$\cos \beta = \cos(\beta_0 + \Delta \beta) \approx \cos \beta_0 - \Delta \beta \sin \beta_0,$$

получаем из третьего уравнения (130)

$$\Delta \beta = -\frac{Pt_{\Pi}}{c_2} (\sin \beta_0 + \Delta \beta \cos \beta_0),$$

откуда

$$\Delta \beta = -\frac{\frac{Pt_{\Pi} \sin \beta_0}{c_2}}{1 + \frac{Pt_{\Pi} \cos \beta_0}{c_2}} \quad (131)$$

Тогда, подставив в первое уравнение (130) значения b и β , получим

$$t_{\Pi} \left[\cos \beta_0 + \frac{\frac{Pt_{\Pi} \sin \beta_0}{c_2}}{1 + \frac{Pt_{\Pi} \cos \beta_0}{c_2}} \sin \beta_0 \right] = b_0 - \frac{P}{c_1},$$

откуда приближенно

$$P \approx \frac{b_0 - t_{\Pi} \cos \beta_0}{\frac{1}{c_1} + \frac{t_{\Pi}}{c_2} (t_{\Pi} - b_0 \cos \beta_0)} \quad (132)$$

Жесткость полки на сжатие c_1 обычно гораздо больше, чем жесткость лопатки на кручение c_2 , так что первым членом в знаменателе формулы (132) можно пренебрегать.

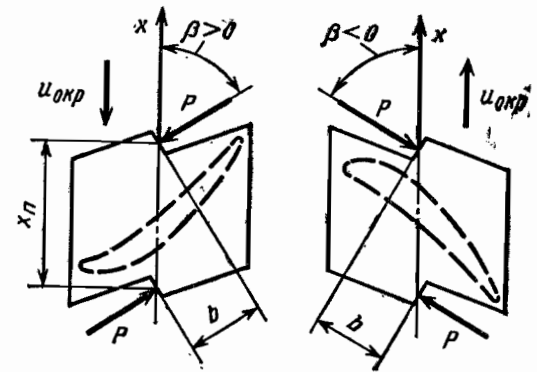


Рис. 35. К расчету натяга по бандажным полкам

Значение угла $\Delta\beta$ можно найти как по формуле (131) через P , так и непосредственно по приближенной формуле

$$\Delta\beta \approx \frac{\cos \beta_0 - \cos \beta}{\sin \beta_0} = -\frac{b_0 - t_n \cos \beta_0}{t_n \sin \beta_0}. \quad (133)$$

Величину c_2 определяют по формуле

$$c_2 = \frac{M_k(l)}{\theta(l)}.$$

Для незакрученной лопатки

$$c_2 = \frac{M_k(l)}{\int_0^l \frac{M_k(z)}{GT(z)} dz} = \frac{1}{\int_0^l \frac{dz}{GT(z)}}.$$

Для закрученной лопатки

$$c_2 = \frac{1}{\int_0^l a_0(z) dz}. \quad (134)$$

Мерой натяга по бандажным полкам служит контактное давление

$$\sigma_{\text{конт}} = \frac{P}{F_{\text{конт}}},$$

где $F_{\text{конт}}$ — площадь поверхности контакта. Обычно $\sigma_{\text{конт}} = 200 \div 400 \text{ кгс/см}^2$.

Иногда натяг характеризуют величинами $\frac{b_0}{\cos \beta_0} - t_n$ или $b_0 - t_n \cos \beta_0$, которые могут достигать значений $\sim 1 \text{ мм}$ и являются показательными лишь при сопоставлении однотипных лопаток.

В рабочих условиях натяг по бандажным полкам меняется, так как меняются все параметры, влияющие согласно формуле (132) на силу P .

Шаг t_n увеличивается из-за нагрева диска и лопаток и растяжения их центробежными силами. Изменение шага Δt_n связано с радиальным перемещением диска на наружном радиусе u (b) (см. стр. 330) и с удлинением пера лопатки Δl (см. стр. 280) формулой

$$\Delta t_n = \frac{2\pi}{z} [u(b) + \Delta l]. \quad (135)$$

Размер полки b_0 увеличивается из-за ее нагрева на величину

$$\Delta b_0 = \alpha \Delta T_n b_0, \quad (136)$$

где ΔT_n — изменение температуры полки.

Угол β_0 увеличивается (по абсолютной величине) из-за раскрутки пера лопатки в поле центробежных сил (см. стр. 305) на величину θ (R).

Жесткости c_1 и c_2 уменьшаются пропорционально изменению модуля упругости материала лопатки с повышением температуры.

Увеличение шага и уменьшение жесткостей снижает натяг, увеличение размера полки и раскрутка пера лопатки при положении контактных площадок для турбин правого и левого вращения, показанном на рис. 35, ведет к усилению натяга.

РАСЧЕТ ЗАМКОВ ЛОПАТОК

Конструктивные формы замков лопаток весьма разнообразны. Для лопаток газовых турбин часто применяют замок *елочного типа* (рис. 36). Идея этой конструкции связана с применением равнопрочной формы. Профиль зубцов напоминает про-

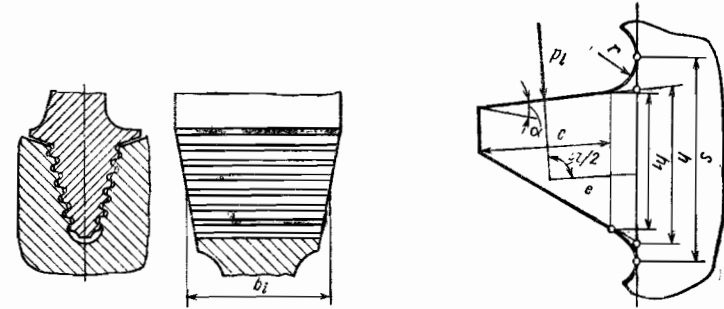


Рис. 36. Замок елочного типа

Рис. 37. К определению напряжений в зубце замка

филь упорной резьбы. Применяют от двух до шести пар зубцов. Угол между средними линиями зубцов составляет обычно $25 \div 40^\circ$.

Если на зубец действует сила P_i , то напряжения изгиба в основании зубца (рис. 37) определяют по формуле

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{6P_i e}{b_i h_i^2}, \quad (137)$$

где b_i — толщина обода на радиусе, соответствующем рассматриваемому зубцу (см. рис. 36).

Напряжение среза

$$\tau = \frac{P_i}{b_i h_i}. \quad (138)$$

При расчете принимают, что усилие P_i направлено нормально к контактной поверхности (силы трения не учитывают). Если толщина обода постоянна ($b_i = \text{const}$), то величину P_i определяют из условия, что нагрузка на все зубцы одинакова

$$P_i = \frac{C_n}{2n \cos \alpha}, \quad (139)$$

где C_n — центробежная сила, действующая на всю лопатку; n — число пар зубцов в соединении; α — угол между рабочей гранью и направлением, перпендикулярным к оси замка.

При переменной толщине обода (см. рис. 36) предполагают, что контактные напряжения на всех зубцах одинаковы. Тогда нагрузка на i -й зубец будет

$$P_i = \frac{C_n}{2 \cos \alpha} \frac{b_i}{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}. \quad (140)$$

Напряжения растяжения в хвостовике лопатки определяют в сечениях по впадинам.

В сечении I (рис. 38) растягивающая сила

$$Q_i = C_n + C_1,$$

где C_n — центробежная сила профильной части лопатки; C_1 — центробежная сила части лопатки между корневым сечением и сечением I (объем этой части V_1 , он включает и нижнюю полку лопатки).

Если площадь сечения I будет $F_1 = a_1 b_1$, то растягивающее напряжение

$$\sigma_1 = \frac{Q_i}{F_1}.$$

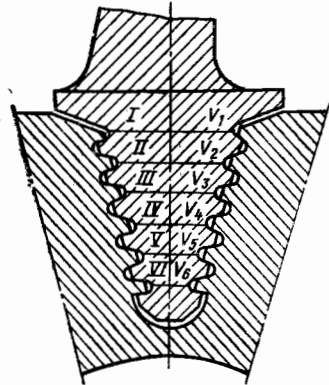


Рис. 38. К определению напряжений растяжения в хвостовике лопатки

В сечении II растягивающая сила
 $Q_2 = C_{II} + C_1 + C_2 - 2P_1 \cos \alpha$,
 где P_1 — сила, приходящаяся на первый зубец замка.

Растягивающее напряжение

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{F_2}.$$

Для сечения III

$$Q_3 = C_{II} + C_1 + C_2 + C_3 - 2(P_1 + P_2) \cos \alpha$$

и т. д.

Наиболее важным для оценки прочности хвостовика лопатки является напряжение σ_1 по первой впадине. Приближенно

$$\sigma_1 = (1,1 \div 1,2) \frac{C_{II}}{F_1},$$

причем центробежная сила профильной части лопатки

$$C_{II} = \sigma(r_0) F(r_0),$$

где $\sigma(r_0)$ — растягивающее напряжение в корневом сечении лопатки, площадь которого равна $F(r_0)$.

Величину $\sigma(r_0)$ определяют по графикам на рис. 4—6.

Запас статической прочности хвостовика лопатки определяют по формуле

$$n = \frac{\sigma_{дл}}{\sigma_1},$$

где $\sigma_{дл}$ — предел длительной прочности материала при температуре хвостовика лопатки (обычно температуру в сечении I принимают на 100—150° С меньше средней температуры в рабочей части лопатки).

Напряжения растяжения по первой впадине зубцов обычно находятся в пределах 10—18 кгс/мм². Для обеспечения равнопрочности профильной части лопатки и замка при действии вибрационных нагрузок момент сопротивления замка должен быть

$$W_{зам} = \frac{1}{6} b_1 a_1^2 \geq 2,5W$$

(W — наименьший момент сопротивления корневого сечения лопатки). Этим условно учитывается влияние концентрации напряжений в замке. Расчет на прочность замковых выступов диска приведен ниже.

Для лопаток компрессоров часто применяют крепление лопатки замком типа *ласточкин хвост* (рис. 39).

Применение замка этой конструкции для лопаток турбины ограничивается прочностью перемычек диска, которая при большом числе лопаток оказывается недостаточной. Глубина замка h составляет обычно 6—12% от длины лопатки. Угол α применяют в пределах 15—30°. Центробежная сила профильной и замковой частей лопаток уравнивается усилиями N , действующими на боковые грани (рис. 40). Пренебрегая силами трения, получим

$$N = \frac{C_{II}}{2 \sin \alpha}, \tag{141}$$

где C_{II} — центробежная сила профильной и замковой частей лопатки.

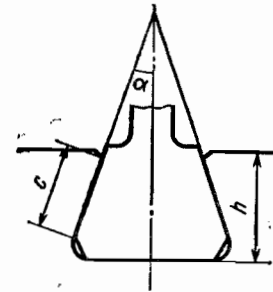


Рис. 39. Замок типа ласточкин хвост

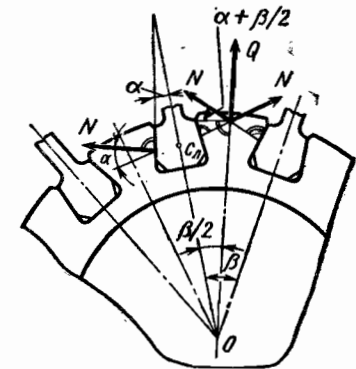


Рис. 40. Усилия в замке типа ласточкин хвост

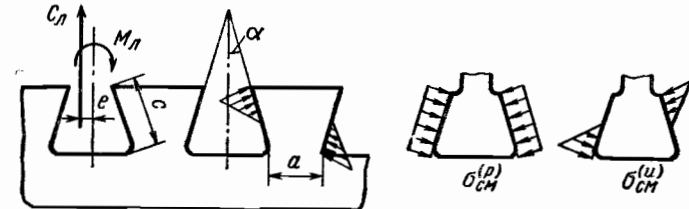


Рис. 41. К определению напряжений смятия

Напряжения смятия на боковой поверхности замка от действия растягивающей силы

$$\sigma_{CM}^{(p)} = \frac{N}{F_{CM}} = \frac{C_{II}}{2bc \sin \alpha}, \tag{142}$$

где b и c — длина и ширина полоски контакта.

Условно считают, что эти напряжения распределяются равномерно по площади контакта (рис. 41). Допустив, что контактные напряжения от действия изгибающих нагрузок распределяются по линейному закону, получим, что наибольшее контактное напряжение

$$\sigma_{CM}^{(u)} = \frac{6(M + eC_{II})}{bc^2}, \tag{143}$$

где M — изгибающий момент в корневом сечении лопатки от действия аэродинамической нагрузки и первоначальных выносов; C_{II} — центробежная сила профильной части лопатки; e — смещение центра тяжести корневого сечения лопатки от оси замка.

Суммарные напряжения смятия

$$\sigma_{CM} = \sigma_{CM}^{(p)} + \sigma_{CM}^{(u)}.$$

Допустимую величину σ_{CM} принимают в пределах 5—10 кгс/мм² для дюралюминиевых и 20—35 кгс/мм² для стальных лопаток. Усилие Q , отрывающее перемычку замкового выступа диска, определяют из условия равновесия

$$Q = 2N \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) + C_B,$$

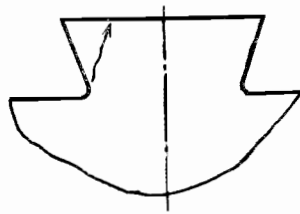


Рис. 42. Возможное разрушение широкой перемычки диска

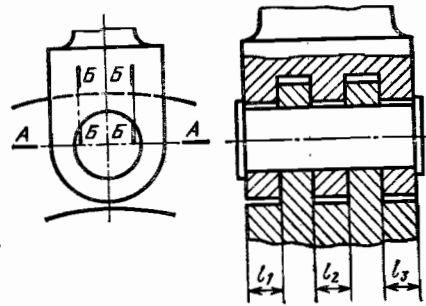


Рис. 43. Расчетные сечения шарнирного замка

где β — угол между осями лопаток ($\beta = \frac{2\pi}{z}$; z — число лопаток); C_B — центробежная сила замкового выступа.

Учитывая равенство (141), находим

$$Q = C_A \frac{\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)}{\sin\alpha} + C_B. \quad (144)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ величина $Q \rightarrow \infty$, поэтому применение малых углов α ($\alpha < 15^\circ$) невыгодно.

При большом числе лопаток ($z \geq 50$) и угле $\alpha \geq 20^\circ$ можно считать $Q \approx C_A + C_B$.
Напряжение, растягивающее перемычку,

$$\sigma = \frac{Q}{F_{\text{пер}}},$$

где $F_{\text{пер}}$ — площадь сечения перемычки.

Обычно величина σ не превосходит 30 кгс/мм² для стальных дисков.

При широких перемычках может произойти разрушение уголков (рис. 42).

Уголки рассчитывают на срез или на изгиб.

Шарнирные замки (рис. 43) рассчитывают на разрыв проушины по сечению А — А:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{C_B + C'}{F_{\text{пр}}},$$

где C' — центробежная сила части хвостовика лопатки до сечения А — А; $F_{\text{пр}}$ — площадь этого сечения.

Кроме того, эти замки рассчитывают на смятие по поверхности контакта лопатки со штифтом, причем определяют средние напряжения смятия и максимальные контактные напряжения.

Средние напряжения смятия

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{C_A}{2\rho_{\text{ш}}l_{\text{ш}}}, \quad (145)$$

где C_A — центробежная сила всей лопатки; $\rho_{\text{ш}}$ — радиус штифта; $l_{\text{ш}}$ — суммарная длина частей штифта, расположенных в лопатке (на рис. 43 величина $l_{\text{ш}} = l_1 + l_2 + l_3$).

Максимальные контактные напряжения

$$\sigma_{\text{к}} = 0,418 \sqrt{\frac{2C_A(\rho_1 - \rho_{\text{ш}})E_1E_{\text{ш}}}{l_{\text{ш}}\rho_1\rho_{\text{ш}}(E_1 + E_{\text{ш}})}}, \quad (146)$$

где ρ_1 — радиус отверстия в хвостовике лопатки; E_1 , $E_{\text{ш}}$ — модули упругости материала лопатки и штифта.

Штифт рассчитывают на срез

$$\tau_{\text{ш}} = \frac{C_A + C'_{\text{ш}}}{l_{\text{ш}}F_{\text{ш}}}, \quad (147)$$

где $C'_{\text{ш}}$ — центробежная сила частей штифта, расположенных в лопатках; $l_{\text{ш}}$ — число поверхностей среза (на рис. 43 их четыре); $F_{\text{ш}}$ — площадь поперечного сечения штифта.

Дисковую часть соединения также рассчитывают на срез по сечениям Б — Б (рис. 43), на смятие от центробежных сил лопатки и штифта, а также на разрыв — по сечениям А — А между отверстиями.

ВИБРАЦИЯ ЛОПАТОК

Расчетом достаточно точно определяют напряжения в лопатках от действия постоянных газовых нагрузок и центробежных сил, а также соответствующие запасы статической прочности. Эти расчеты служат для выбора исходных размеров лопатки при ее проектировании. Однако большинство дефектов лопаток в эксплуатации бывает связано с действием переменных напряжений, возникающих при вибрациях лопаток.

Оценить заранее уровень переменных напряжений в лопатках можно лишь приближенно путем статистического прогнозирования. В процессе доводки для обеспечения надежной работы лопаток необходимо определить переменные напряжения экспериментально (тензометрированием) и, если напряжения окажутся значительными, снизить их до допустимого уровня.

Основные виды колебаний. Резонансные колебания вызываются совпадением одной из собственных частот лопатки с частотой переменных газовых сил, действующих на вращающуюся лопатку.

Параметры газового потока (скорость, давление, температура) по окружности газового тракта всегда имеют некоторую неравномерность. Так, непосредственно за направляющими или сопловыми лопатками скорость потока имеет меньшую величину, чем между ними («след» от лопатки). Такой же «след» оставляют разделительные стойки на входе в компрессор. Температура газа обычно имеет несколько пиков, соответствующих числу камер сгорания. К неравномерности параметров газового потока приводит также несимметричность входа в компрессор, наличие окон для отбора или перепуска воздуха, стойки на выходе из турбины, ограниченные размеры испытательного бокса и другие конструктивные особенности установки.

При вращении лопатки, когда она последовательно пересекает различные участки газового потока, газовые нагрузки будут также меняться, повторяясь через период T , равный времени одного оборота ротора:

$$T = \frac{1}{n_c}, \quad (148)$$

где n_c — частота вращения, об/с.

Поэтому частота возбуждения от неподвижных источников неравномерности газового потока $f_{\text{возб}}$ (в Гц) всегда кратна частоте вращения ротора:

$$f_{\text{возб}} = kn_c, \quad (149)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ (целые числа).

Величину k называют гармоникой к частоте вращения ротора.

Периодически меняющиеся газовые силы p_r могут быть представлены в виде суммы

$$p_r(t) = p_{\text{ср}} + p_1 \sin(2\pi n_c t + \varphi_1) + p_2 \sin[2\pi(2n_c)t + \varphi_2] + \dots + p_k \sin[2\pi(kn_c)t + \varphi_k] + \dots, \quad (150)$$

где $P_{ср}$ — средние значения сил на данном режиме, определяемые формулами (14); P_1, P_2, \dots, P_k — амплитуды сил соответственно первой, второй, ..., k -й гармоник, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ — их фазы.

При резко выраженных неравномерностях наибольшую величину имеют амплитуды сил тех гармоник, которые равны или кратны числу возбудителей (при шести стойках на входе наиболее сильно возбуждение шестой гармоникой, но может проявиться и двенадцатая гармоника). Неравномерности, связанные с несимметричностью входа и другими причинами, обычно вызывают целый ряд низших гармоник.

Величина переменных составляющих сил обычно достигает всего нескольких процентов от средней силы, поэтому при вынужденных колебаниях лопаток напряжения в них невелики. При совпадении частоты возбуждающей силы $f_{возб}$ с одной из собственных частот лопатки $f_{л}$ наступает резонанс, и переменные напряжения в лопатке могут сильно возрасти. Условие резонанса

$$f_{возб} = f_{л} \quad (151)$$

С учетом формулы (148) резонансная частота вращения лопатки, в об/мин

$$n_{рез} = \frac{60f_{л}}{k}, \quad (152)$$

где $f_{л}$ в Гц; $k = 2, 3 \dots$ (целые числа).

С первой гармоникой к оборотам ($k = 1$) рабочие лопатки, как правило, не резонируют, так как с увеличением частоты вращения изгибные частоты колебаний увеличиваются, причем частота основного тона $f'_{л} > n_c$, а резонанс крутильной формы колебаний обычно уходит далеко за пределы рабочей частоты вращения.

Для компрессорных лопаток наиболее сильными гармониками являются $k = 2 \div 6$ (иногда до $k = 8$) и $k = z_{н.а}$, где $z_{н.а}$ — число направляющих лопаток перед и за ступенью.

Для турбинных лопаток наиболее сильными возбудителями являются камеры сгорания ($k = z_{к.с}$, где $z_{к.с}$ — число камер сгорания) и сопловые лопатки ($k = z_{с.л}$).

Особенно легко возбуждаются колебания по основной изгибной форме. Нередко возникают колебания по второй или третьей изгибным, первой или второй крутильным формам, а также высокочастотные пластиночные формы (рис. 44).

Наиболее наглядно резонансные частоты вращения выявляются с помощью «резонансной диаграммы» (рис. 45), на которой наносят лучи гармоник к частоте вращения и кривые изменения собственных частот лопатки с учетом влияния центробежных сил и температуры. Точки пересечения кривых собственных частот с лучами гармоник определяют резонансные частоты вращения.

Резонансная диаграмма предварительно может быть построена по результатам расчета собственных частот и данным исследований лопаток на электродинамических вибраторах или с помощью пьезовозбудителей, а затем уточнена по данным тензометрирования лопаток на работающей установке.

Колебания компрессорных лопаток от вращающегося срыва также являются резонансными. Вращающиеся срывные зоны могут возникать при работе осевого компрессора на некоторых нерасчетных режимах. Срывные зоны вращаются в ту же сторону, что и ротор, но с меньшей угловой скоростью $n_{срыв} = \omega_{срыв} n_c$, причем $\omega_{срыв} \approx (0,3 \div 0,6)$. Частота возбуждения от вращающегося источника неравномерности газового потока будет кратна разности частот вращения:

$$f_{возб} = k(n_c - n_{срыв}) = k(1 - \bar{\omega})n_c, \quad (153)$$

где $k = 1, 2, 3 \dots$ (целые числа).

Наиболее сильное возбуждение соответствует $k = z_{срыв}$, где $z_{срыв}$ — число срывных зон.

Обозначив $k(1 - \bar{\omega}) = k'$, приведем формулу (153) к выражению (149), но теперь число k' может быть произвольным и, в частности, не целым. В последнем случае величину k' называют «дробной» гармоникой к частоте вращения ротора. На резонансной диаграмме резонансные частоты вращения от вращающегося срыва соответствуют точкам пересечения кривых собственных частот с лучами гармоник k' (на рис. 45, а штриховая линия $k' = 2,3$).

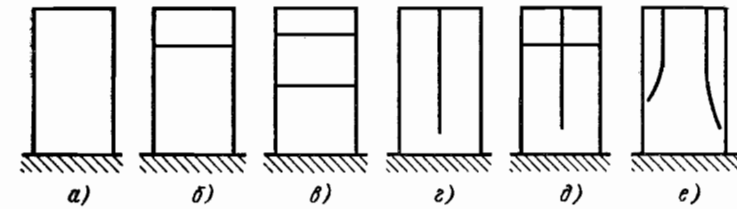


Рис. 4. Схема узловых линий на лопатке при наиболее легко возбудимых формах колебаний: а, б — первая, вторая, третья изгибные формы; в, д — первая и вторая крутильные формы; е — пластиночная форма

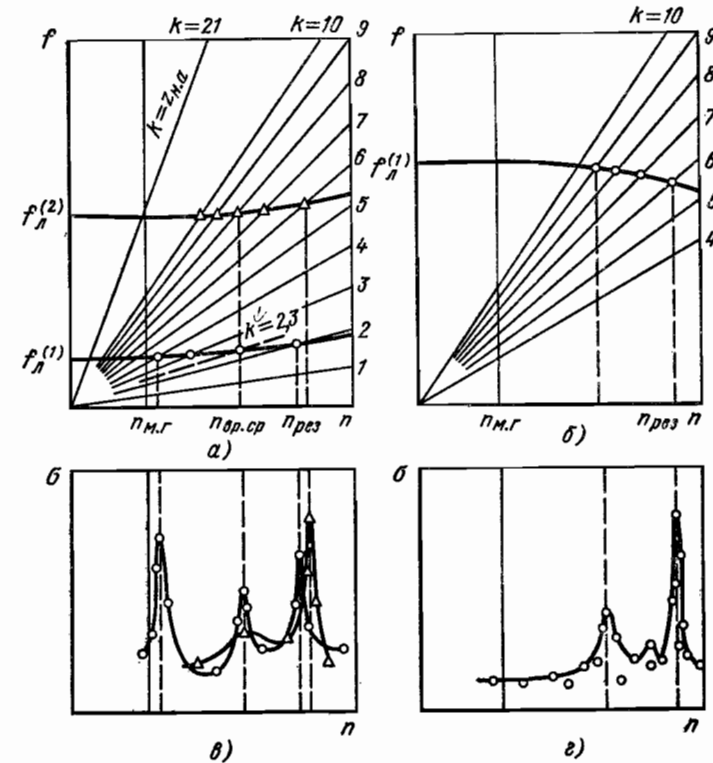


Рис. 45. Типичные резонансные диаграммы компрессорной (а, в) и турбинной (б, г) ступеней:

$n_{рез}$ — резонансные частоты вращения; $n_{м.г}$ — частота вращения малого газа; $n_{вр.ср}$ — частота вращения при резонансе от вращающегося срыва; \circ — напряжения по первой; Δ — по второй форме колебаний

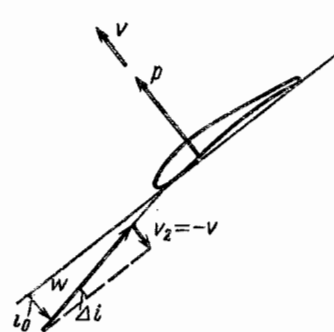


Рис. 46. Изменение угла атаки $\Delta\alpha_i$ при колебаниях лопатки

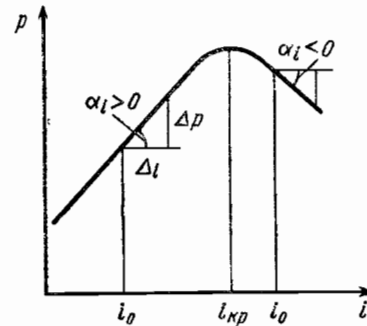


Рис. 47. Зависимость подъемной силы P , действующей на лопатку, от угла атаки i ; $i_{кр}$ — критический угол атаки

Срывные колебания возникают в лопатках при работе ступени на нерасчетных режимах. При этом переменные газовые силы не носят четко выраженного периодического характера. Колебания лопаток происходят в основном по первой форме с неустойчивой амплитудой. Сильные срывные колебания обычно возникают в лопатках компрессора на предпомпажных режимах.

Автоколебания лопаток возникают сравнительно редко, но являются очень опасными из-за резкого возрастания напряжений при небольшом изменении режима. Механизм автоколебаний может быть различным. Для лопаток компрессора возможны автоколебания при закритических углах атаки («срывной флаттер»). Если в некоторый момент времени скорость движения лопатки (рис. 46) при колебаниях $v = v_0 \cos pt$,

то при этом угол атаки i_0 меняется на величину $\Delta i \approx \frac{v}{\omega_1}$, где ω_1 — скорость

относительного движения потока. Изменение угла атаки ведет к изменению силы, действующей на лопатку, на величину $\Delta P \approx (\operatorname{tg} \alpha_i) \Delta i$, где α_i — угол наклона кривой зависимости подъемной силы от угла атаки для данного режима (рис. 47). Переменная сила ΔP за период колебания T совершает работу

$$A_T = \int_0^T \Delta P v dt = -\operatorname{tg} \alpha_i \frac{v_0^2}{\omega_1} \int_0^T \sin^2 pt dt. \quad (154)$$

Если угол атаки на данном режиме i_0 меньше критического $i_{кр}$, $\operatorname{tg} \alpha_i > 0$ и работа за период $A_T < 0$, т. е. воздушный поток оказывает сопротивление колебанию лопатки (демпфирует колебания). Если угол атаки i_0 больше критического, то $\operatorname{tg} \alpha_i < 0$ и работа за период становится положительной, т. е. воздушный поток снабжает колеблющуюся лопатку дополнительной энергией (поддерживает колебания). Тогда при недостаточной интенсивности демпфирования в материале лопатки и ее замке в результате случайного отклонения могут начаться автоколебания.

В лопаточных венцах возможны также автоколебания лопаток с общей частотой из-за аэродинамического взаимодействия лопаток. Для уменьшения такого взаимодействия вводят разночастотную сборку лопаток, а также повышают их жесткость. Опасность автоколебаний возрастает, если собственные частоты изгибных и крутильных форм колебаний лопаток близки друг к другу. Рекомендуется чтобы эти частоты отличались не менее чем на 15%.

Особенности вибраций бандажированных лопаток. В ступенях, где лопатки связаны кольцевой бандажной связью, лопатки колеблются совместно, образуя некоторое число волн перемещений по окружности колеса. При четном числе лопаток z возможны $0,5z$ разных форм колебаний венца, соответствующих основной форме колебаний изолированной лопатки, при нечетном числе $0,5(z-1)$. С увели-

чением числа волн m в указанных пределах частота собственных колебаний венца возрастает (рис. 48). В отличие от изолированной лопатки, резонансные колебания которой могут быть вызваны любой гармоникой к частоте вращения, резонансные колебания лопаточного венца с числом волн m возбуждаются только той же гармоникой $k = m$ к частоте вращения. Поэтому резонансная диаграмма бандажированных лопаток имеет особый вид (рис. 49), причем резонансные частоты могут меняться по частоте вращения сложным образом. Частота колебаний бандажированных лопаток возрастает с увеличением жесткости бандажной связи и (до определенных пределов) при увеличении радиуса расположения антивибрационных полок или проволоки.

Бандажные связи увеличивают также механическое демпфирование в системе и способствуют уменьшению переменных напряжений в лопатках.

Тензометрирование. Основным методом экспериментального определения переменных напряжений в лопатках турбомашин является тензометрирование на работающей машине в условиях, возможно более близких к эксплуатационным. До начала тензометрирования необходимо для правильной ориентировки при проведении испытаний построить расчетную резонансную диаграмму (см. выше). При первых испытаниях проволоочные тензодатчики обычно наклеивают вблизи корневого

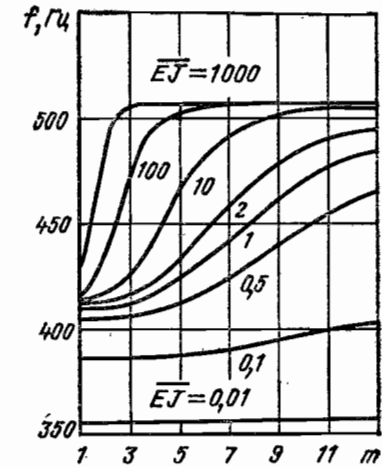


Рис. 48. Изменение собственных частот колебаний бандажированных лопаток по числу волн перемещений m при разной относительной жесткости бандажной связи EJ

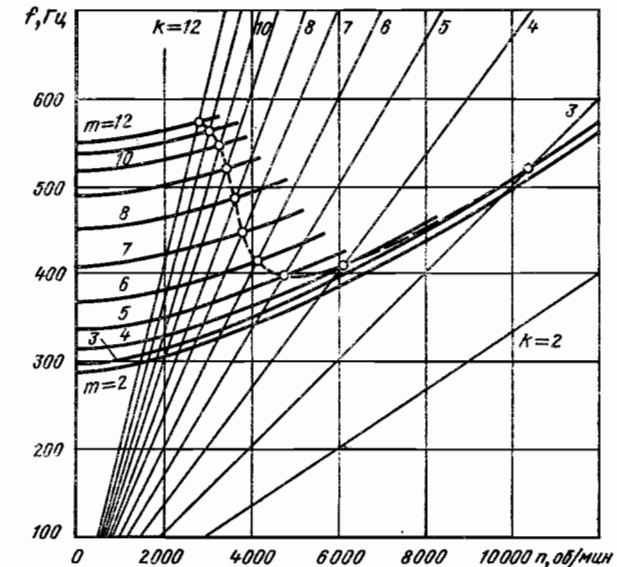


Рис. 49. Резонансная диаграмма бандажированного колеса

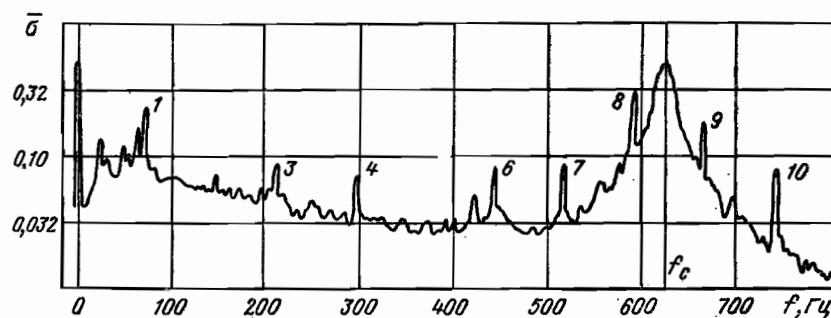


Рис. 50. Спектрограмма переменных напряжений в лопатках:
1 — 10 — гармоники возбуждения

Сечения на спинку лопатки. При обнаружении на рабочих режимах резонансов следует возбудить соответствующую форму колебаний лопатки с помощью электродинамического вибратора или пьезовозбудителя и по тензодатчикам установить место расположения максимальных динамических напряжений. Место максимального напряжения может быть установлено также методами голографической интерферометрии. Дальнейшее тензометрирование ведут по датчику, наклеенному непосредственно в зоне максимальных напряжений, или же с использованием коэффициентов пересчета напряжений

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{изм}}},$$

где σ_{\max} — максимальное напряжение; $\sigma_{\text{изм}}$ — напряжение в месте измерения.

Не следует пользоваться коэффициентами пересчета $k > 3$. Надежные значения коэффициентов пересчета могут быть получены только по результатам испытаний двух-трех лопаток.

Из-за разброса напряжений на отдельных лопатках тензометрировать необходимо по нескольким лопаткам на каждой ступени (не менее трех, а обычно по шесть и более). Предварительное тензометрирование на рабочих режимах ведут при медленном изменении частоты вращения.

При обнаружении повышенных напряжений проводят тщательную настройку на резонанс каждой из исследуемых лопаток (из-за разброса значений собственных частот резонансные частоты вращения отдельных лопаток могут несколько различаться). Контроль за показаниями тензометров ведут визуально (по катодным осциллограммам) и по записи на пленке или бумаге (с помощью шлейфовых осциллографов). Особое внимание обращают на правильность тарировки аппаратуры.

Если анализ резонансной диаграммы показывает на возможность попадания на основные рабочие режимы высокочастотных резонансов от сильных возбудителей (например, от сопловых лопаток), целесообразно провести тензометрирование с наклеивкой датчика на кромке в верхней части пера лопатки.

Для выявления разброса напряжений между отдельными экземплярами машин проводят тензометрирование по крайней мере двух экземпляров.

При обработке записей определяют значения максимальных переменных напряжений, частоты колебаний и резонансных частот вращения. По этим данным строят диаграммы переменных напряжений, которые удобно совмещать с частотными диаграммами, как показано на рис. 45.

При ответственных испытаниях показания тензометров записывают на магнитную ленту с последующим спектральным анализом процесса. Спектрограмма переменных напряжений (рис. 50) позволяет установить собственные частоты колебаний лопаток в рабочих условиях f_c , относительную величину гармоник возбуждения,

наличие других источников возбуждения колебаний лопаток и уровень демпфирования в системе.

Запас усталостной прочности и методы его повышения. Для оценки вибрационной прочности лопаток определяют запас прочности по переменным напряжениям

$$n = \frac{\sigma_{-1л}}{\sigma_{\max}}, \quad (155)$$

где $\sigma_{-1л}$ — экспериментально определенный предел выносливости лопаток с учетом асимметрии цикла; σ_{\max} — максимальное переменное напряжение, замеренное при тензометрировании (с учетом коэффициентов пересчета).

При симметричном цикле для лопаток компрессора — стальных $\sigma_{-1л} \approx 40 \div 55$ кгс/мм², титановых $\sigma_{-1л} \approx 25 \div 45$ кгс/мм²; для лопаток турбин $\sigma_{-1л} \approx 16 \div 30$ кгс/мм². Обычно $\sigma_{-1л} \approx (0,5 \div 0,9) \sigma_{-1}$, где σ_{-1} — предел выносливости образцов.

Запас прочности должен учитывать разброс максимальных напряжений между отдельными экземплярами машин и между отдельными лопатками, неточность определения максимального напряжения при тензометрировании, возможность случайного повреждения поверхности лопатки в эксплуатации, эрозию поверхности и ряд других факторов. Поэтому для обеспечения надежной работы турбомашин величина запаса прочности лопатки по переменным напряжениям должна быть достаточно большой (обычно $n > 3$).

При проектировании лопаток косвенной оценкой надежности может служить величина напряжений в лопатке от изгиба статическими газовыми силами (см. с. 281). Однако дальнейшее экспериментальное определение запаса усталостной прочности лопаток является совершенно необходимым.

Если запас прочности по переменным напряжениям оказывается недостаточным, он должен быть увеличен в процессе экспериментальной доводки машины. Основные пути повышения запаса прочности лопаток приведены ниже.

Частотная отстройка, являющаяся наиболее эффективным средством для машин с узким диапазоном рабочих частот вращения, который может быть полностью освобожден от опасных резонансов. Для машин с широким диапазоном рабочих частот вращения полезно переводить сильные резонансы на малоиспользуемые или проходные обороты. Отстройка большей частью проводится «вверх», т. е. повышением собственной частоты лопатки, хотя в некоторых случаях можно частоту снижать. Повышение основной изгибной частоты достигают утолщением корневого и близких к нему сечений. Необходимое изменение размеров лопатки определяют расчетным путем и уточняют экспериментально. Простым и эффективным средством изменения частот, в том числе высоких форм, является подрезка уголков у периферии пера лопатки. Величину подрезки и ее форму устанавливают экспериментально испытаниями лопатки на вибраторе. При отстройке должен быть обеспечен запас на разброс собственных частот отдельных лопаток за счет технологических допусков. Возможный разброс частот устанавливают по результатам испытаний нескольких (не менее трех) комплектов лопаток серийного изготовления.

Утолщение опасных сечений лопатки, особенно кромок, приводит к перераспределению динамических напряжений и к изменению их уровня. Эффективным оказывается также повышение качества контроля геометрии лопатки и ужесточение допусков.

Изменение режима работы турбомашин, улучшение согласования работы ступеней, различные аэродинамические мероприятия, затягивающие наступления срывов на наиболее напряженных ступенях.

Изменение числа стоек, окон перепуска воздуха и других возбудителей меняет интенсивность отдельных гармоник и соответственно резонансные напряжения. Такой же эффект оказывает изменение формы входного устройства, улучшение аэродинамики стоек и другие мероприятия.

Увеличение осевого зазора между направляющими и рабочими лопатками снижает интенсивность возбуждения высокочастотных форм колебаний.

Для ликвидации сильного резонансного возбуждения от сопловых лопаток турбины можно применять так называемую «разношаговость», т. е. постановку сопло-

вых лопаток с неодинаковым шагом. При этом резко уменьшается интенсивность возбуждения гармоникой $k = z_{с. а.}$, но появляется ряд близких гармоник. Аналогично влияет несимметричное расположение стоек, окон перепуска и других возбудителей.

Повышение запаса прочности может быть достигнуто также *увеличением предела выносливости* лопатки, особенно его минимального значения. Это обеспечивается выбором оптимальных режимов механико-термической обработки и их строжайшим контролем, а также применением специальных методов поверхностного упрочнения лопатки, особенно ее кромок.

Следует контролировать уровень остаточных напряжений у поверхности (лучше, если они сжимающие) и предел выносливости лопатки σ_{-1} . Простым и полезным неразрушающим средством контроля является проверка основной частоты колебаний всех лопаток в процессе производства.

РАСЧЕТ ДИСКОВ. НАПРЯЖЕНИЯ НА КОНТУРЕ

Рассмотрим осесимметричное растяжение дисков от действия центробежных сил и неравномерного нагрева.

В диске возникают напряжения радиальные σ_r и окружные (тангенциальные) σ_θ (рис. 51). Во всех точках цилиндрической поверхности радиуса r (или, короче, на радиусе r) напряжения одинаковы вследствие симметрии.

Радиальные напряжения на внешнем контуре σ_{rb} (рис. 52) создаются центробежными силами лопаток и замковой части диска. В центре диска без отверстия $\sigma_{\theta 0} = \sigma_{r 0}$, что вытекает из условия осевой симметрии. Для диска с отверстием радиальное напряжение на внутреннем контуре или равно нулю: $\sigma_{ra} = 0$ (свободное отверстие), или приравнивается давлению напессовки на вал ($\sigma_{ra} = -p$, где p — давление напессовки в рабочих условиях). При определении радиальных напряжений на ободе предполагается, что они распределяются равномерно по цилиндрической поверхности на радиусе b .

Напряжение от центробежных сил профильных частей лопаток

$$\sigma'_{rb} = \frac{zC_n}{2\pi b h_b^2}, \tag{156}$$

где z — число лопаток; C_n — центробежная сила профильной части лопатки, кгс; h_b — толщина диска на радиусе b , см.

Напряжения от замковых частей лопаток и диска выражаются равенством

$$\sigma''_{rb} = \rho \omega^2 r_0 \delta \frac{h_{ср}}{h_b}, \tag{157}$$

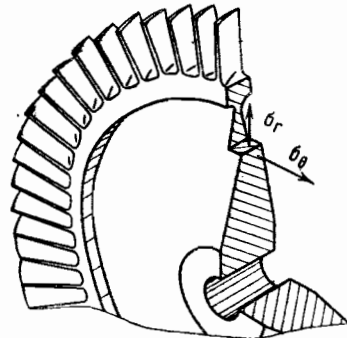


Рис. 51. Направления напряжений в диске

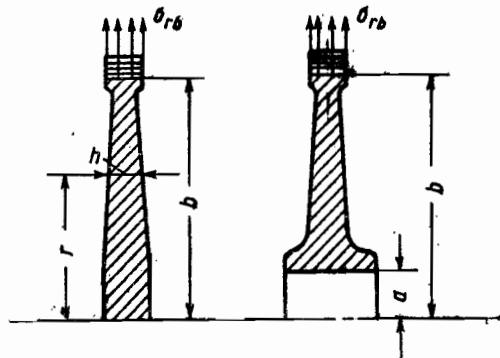


Рис. 52. Граничные условия при расчете дисков

где ρ — плотность материала; ω — угловая скорость диска; r_0 — радиус корневой сечения профильной части лопатки; δ — радиальная высота замка; $h_{ср}$ — средняя толщина замка диска; h_b — толщина диска на внешнем радиусе b .

При выводе формулы (157) предполагалось, что кольцевой слой между радиусами r_0 и b целиком заполнен металлом; центробежная сила этого слоя создает напряжения σ''_{rb} .

Радиальные напряжения на внешнем контуре диска

$$\sigma_{rb} = \sigma'_{rb} + \sigma''_{rb} = \frac{zC_n}{2\pi b h_b} + \rho \omega^2 r_0 \delta \frac{h_{ср}}{h_b}. \tag{158}$$

Растягивающее напряжение в опасном сечении замкового выступа диска

$$\sigma_{зв} = \sigma_{rb} \frac{2\pi b}{z c}, \tag{159}$$

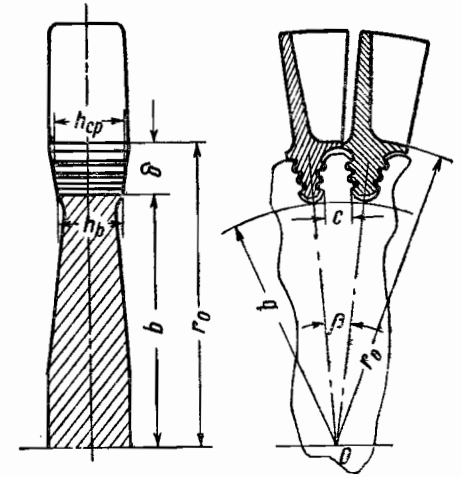


Рис. 53. К определению радиального напряжения на ободе

где $\frac{2\pi b}{z}$ — шаг лопатки на радиусе b ; c — ширина перемычки (рис. 53).

В дисках газовых турбин $\sigma_{rb} = 10 \div 18$ кгс/мм², а значения $\sigma_{зв} \leq 20 \div 25$ кгс/мм². Запас прочности в замковых выступах дисков газовых турбин

$$n = \frac{\sigma_{дл}}{\sigma_{зв}} > 2,5, \tag{160}$$

где $\sigma_{дл}$ — предел длительной прочности материала диска с учетом температуры и длительности работы.

При работе диска на различных режимах запас прочности определяют для каждого режима в отдельности и проводят «суммирование повреждаемости».

Общий запас прочности определяют по формуле (24) в гл. 2.

Формула (158) справедлива и для замков других типов, если центробежные силы замковой части можно учитывать указанными ранее способами.

Для замков типа «ласточкин хвост» следует принимать во внимание распорное действие клина¹ и определять σ_{rb} по формуле

$$\sigma_{rb} = \frac{zQ}{2\pi b h_b} = \frac{z \left(C_A \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\sin \alpha} + C_B \right)}{2\pi b h_b}, \tag{161}$$

где Q — сила, отрывающая перемычку замкового выступа диска; $C_A = C_n + C_3$ — центробежная сила профильной и замковой частей лопатки; C_B — центробежная сила замкового выступа диска [см. формулу (144)].

Если считать

$$\frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\sin \alpha} \approx 1,$$

¹ Если ось замка непараллельна оси вращения, то контактные усилия вызывают скручивание замкового выступа, что в некоторых случаях необходимо учитывать.

что допустимо, например, при $\alpha = 20^\circ$ и числе лопаток $z \geq 50$, то формулы (158) и (161) совпадают, так как

$$\frac{C_a + C_b}{2\pi b h_b} \approx \rho \omega^2 r_0 \delta \frac{h_{cp}}{h_b}.$$

Величина σ_{rb} в дисках осевых компрессоров лежит обычно в пределах 2—8 кгс/мм².

Вследствие осевой симметрии точки диска имеют только радиальное перемещение u .

Предполагая деформации диска упругими, будем иметь перемещение на радиусе r :

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + r \alpha T, \quad (162)$$

где E — модуль упругости материала; σ_θ и σ_r — окружное и радиальное напряжения; ν — коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного расширения; T — температура диска, °C.

Все величины, входящие в равенство (162), определяют для заданного радиуса.

ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ ДИСКА

Запас прочности по разрушающим оборотам. Одной из основных оценок прочности диска является запас по разрушающим оборотам (частоте вращения)

$$k_B = \frac{n_{разр}}{n}, \quad (163)$$

где $n_{разр}$ — частота вращения, при которой произойдет разрушение диска (с учетом температуры и длительности работы); n — максимальная (расчетная) рабочая частота вращения диска.

Запас по разрушающим оборотам может быть выражен через угловые скорости:

$$k_B = \frac{\omega_{разр}}{\omega}.$$

Запас по меридианальному сечению. При приближенном определении разрушающих оборотов исходят из предположения, что в момент разрушения во всех точках диска

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_B(r),$$

т. е. окружное напряжение равно пределу прочности материала на данном радиусе. Разрушение происходит по меридианальному сечению.

Величина σ_B в общем случае изменяется по радиусу вследствие неравномерного распределения температуры.

Значение k_B может быть найдено из рассмотрения условия равновесия половины диска в момент, непосредственно предшествующий разрушению (рис. 54).

В этот момент радиальное напряжение на ободе

$$\sigma_{rb}^* = \sigma_{rb} \frac{\omega_{разр}^2}{\omega^2},$$

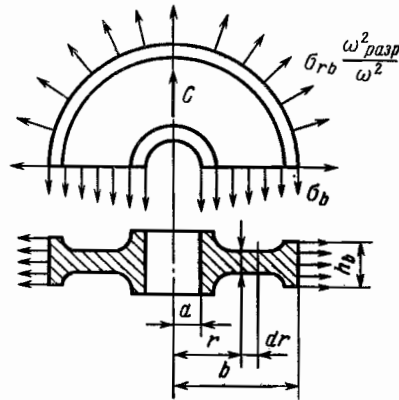


Рис. 54. К определению запаса прочности по разрушающим оборотам

где σ_{rb} — радиальное напряжение на ободе при расчетной угловой скорости. Напряжениями на внутреннем контуре ($r = a$) можно пренебречь, так как давление напесовки, если оно и было в рабочих условиях, к моменту разрушения исчезнет совсем из-за больших радиальных перемещений ступицы диска. Центробежная сила собственно масс диска выражается для половины диска следующим равенством:

$$C = 2\rho \omega_{разр}^2 J,$$

где $J = \int_a^b r^2 h dr$ — момент инерции половины меридианального сечения диска относительно оси вращения.

Проектируя все силы на вертикальное направление, найдем

$$2\sigma_{rb} \frac{\omega_{разр}^2}{\omega^2} b h_b + 2\rho \omega_{разр}^2 J = 2 \int_a^b \sigma_B h dr,$$

откуда

$$k_{B1} = \frac{\omega_{разр}}{\omega} = \sqrt{\frac{\int_a^b \sigma_B h dr}{\sigma_{rb} b h_b + \rho \omega^2 J}}. \quad (164)$$

Если величины σ_B одинакова для всех радиусов, то

$$\int_a^b \sigma_B h dr = \sigma_B \int_a^b h dr = \sigma_B F,$$

где F — площадь половины меридианального сечения диска. В этом случае

$$k_{B1} = \sqrt{\frac{\sigma_B F}{\sigma_{rb} b h_b + \rho \omega^2 J}}. \quad (165)$$

Из формулы (165) следует, что для увеличения прочности диска надо увеличивать толщину в области ступицы диска, так как при этом момент инерции возрастает медленнее, чем площадь сечения.

Для дисков, работающих при повышенных температурах, под σ_B следует понимать предел длительной прочности материала (при заданном ресурсе работы).

Запас по цилиндрическому сечению. Кроме разрыва по меридианальному сечению возможно разрушение по цилиндрической поверхности и частично в меридианальной плоскости. Такому разрушению способствуют отверстия в полотне диска или местное утонение.

Рассмотрим предельное равновесие при разрушении по цилиндрическому сечению радиуса r^* (рис. 55). Допустим, для общности, что на этом радиусе находятся центры отверстий диаметра d .

По всей поверхности разрушения действующие напряжения считают равными пределу прочности материала.

Рассматривая равновесие сил в вертикальном направлении, можно записать

$$2\sigma_{rb} \frac{\omega_{разр}^2}{\omega^2} b h_b + 2\rho \omega_{разр}^2 J_* = 2 \int_{r^*}^b \sigma_B(r) h dr + 2\sigma_B(r^*) r^* h^* \left(1 - \frac{zd}{2\pi r^*}\right), \quad (166)$$

где

$$J_* = \int_{r^*}^b h r^2 dr. \quad (167)$$

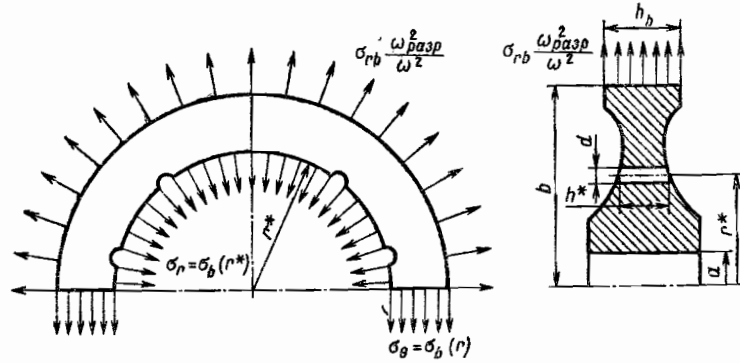


Рис. 55. К определению запаса прочности по разрушающим оборотам при разрушении по цилиндрическому сечению

Из условия равновесия получают

$$k_{B2}(r^*) = \frac{\omega_{разр}}{\omega} = \sqrt{\frac{\int_{r^*}^b \sigma_b(r) h dr + \sigma_b(r^*) h^* r^* \left(1 - \frac{zd}{2\pi r^*}\right)}{\sigma_{rb} b h_b + \rho \omega^2 J_*}} \quad (168)$$

Расчет проводят для различных радиусов r^* и для оценки прочности принимают минимальное значение k_{B2} .

Если на рассматриваемом радиусе отверстий не имеется, то в формуле (168) полагают $d = 0$. Формулу (168) применяют при $r^* > a$; при $r^* = a$ следует считать

$$k_{B2}(a) = k_{B1}$$

так как цилиндрическая поверхность радиуса a свободна от напряжений. Обычно минимальный запас по цилиндрическому сечению получается в подобной части полотно диска.

Предварительная оценка прочности диска. Такую оценку проводят на основании определения запаса по разрушающим оборотам.

Для удовлетворительно работающих дисков запас по разрушающим оборотам (разрушение по меридианальному сечению) $k_{B1} = 1,4 \div 1,6$.

Минимальное значение запаса по разрушающим оборотам при разрушении по цилиндрическому сечению $k_{B2} = 1,35 \div 1,6$.

При экспериментальном определении запасов прочности при условиях, близких к рабочим, должно быть $k_B > 1,2 \div 1,3$.

Число оборотов в момент разрушения должно быть на 20—30% больше максимальных оборотов диска в рабочих условиях.

Расчетные значения k_{B1} и k_{B2} обычно превышают экспериментальные значения на 5—10%.

При действии высоких температур под $\sigma_b(r)$ понимают предел длительной прочности $\sigma_{дл}(r, T, t)$, соответствующий определенной температуре T и длительности нагружения t .

При определении запаса по разрушающим оборотам температурные напряжения не учитывают. Влияние температуры сказывается на величине предела длительной прочности.

При работе диска на различных режимах с температурой T_i и длительностью t_i определяют эквивалентный запас по разрушающим оборотам (см. гл. 2).

Следует, однако, учесть, что запасы по напряжениям соответствуют квадратам запасов по разрушающим оборотам и потому эквивалентный запас по разрушающим

оборотам при работе на n режимах

$$\frac{1}{(k_{B экв}^2)^{m_{эк}}} = \frac{1}{(k_{B(1)}^2)^{m_1}} + \dots + \frac{1}{(k_{B(n)}^2)^{m_n}}, \quad (169)$$

где m_1, \dots, m_n — показатели в степенных зависимостях длительной прочности при различных режимах.

Если, как обычно, режим 1 соответствует режиму с наименьшим запасом длительной прочности по разрушающим оборотам, то принимают $m_{экв} = m_1$.

По формуле (169) определяют эквивалентные запасы прочности по разрушающим оборотам при разрушении по меридианальному ($k_{B экв}$) и по цилиндрическому ($k_{B2 экв}$) сечениям. Обычно для дисков с центральным отверстием определяющим является запас по разрушающим оборотам k_{B1} , для дисков с тонкой подобной частью — запас k_{B2} .

Для более полной оценки прочности диска вычисляют местные запасы прочности по напряжениям

$$k_m = \frac{\sigma_{дл}(T, t)}{\sigma_{max}}$$

где $\sigma_{дл}$ — предел длительной прочности, зависящий от температуры и длительности; σ_{max} — наибольшее напряжение (радиальное или окружное) на данном радиусе

Напряжения σ_{max} определяют с учетом температурных напряжений и напряжений изгиба.

Запас прочности должен быть $k_m > 1,5$.

При работе на различных режимах определяют эквивалентный запас прочности. Определение напряжений в дисках рассмотрено далее.

Для дисков транспортных машин или установок с большим числом нагружений следует определять запас по циклической долговечности

$$k_N = \frac{N^*}{N}$$

где N^* — число циклов нагружения до разрушения; N — число циклов нагружения в процессе эксплуатации.

Для удовлетворительно работающих дисков расчетный запас долговечности $k_N > 5$.

При экспериментальном определении запаса по долговечности с помощью циклических испытаний в составе изделия или в разгонной камере $k_N > 3$.

Для расчетного определения запаса по долговечности определяют размах деформации в каждом цикле нагружения (от запуска до останова). Максимальная деформация материала диска (с учетом концентрации деформаций) связана с числом циклов до разрушения N^* зависимостью

$$\epsilon = \left(\ln \frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} (N^*)^{-0,6} + \frac{3,5\sigma_{дл}}{E} (N^*)^{-0,12},$$

где ψ — пластичность материала (поперечное сужение образца при разрушении, обычно $\psi = 0,2 \div 0,4$); $\sigma_{дл}$, E — предел длительной прочности и модуль упругости материала.

При работе материала в упруго-пластической области

$$\epsilon = \epsilon_{нагр} - \epsilon_{ост}$$

где $\epsilon_{нагр}$ — деформация при нагружении; $\epsilon_{ост}$ — остаточная деформация диска после останова.

При числе циклов нагружений $N^* < 10^3$ основное значение имеет первый член и приближенно

$$N^* \approx \frac{\ln \frac{1}{1-\psi}}{\epsilon^{0,6}}$$

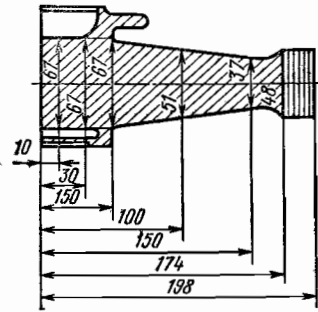


Рис. 56. К примеру определения запаса прочности по разрушающим оборотам

Циклическая долговечность диска зависит от пластичности материала

$$\psi = \frac{F_0 - F}{F_0}$$

где F — площадь сечения образца в шейке в момент разрыва; F_0 — первоначальная площадь сечения образца.

Величина ψ при работе материала при высокой температуре уменьшается обычно на 20—50% после наработки нескольких тысяч часов, что следует учитывать при назначении ресурса диска.

Практические рекомендации. При выборе материала диска следует учитывать характеристики прочности и пластичности материала. Параметры прочности материала (пределы прочности, текучести, длительной прочности и ползучести) являются расчетными характеристиками и должны обеспечивать рекомендуемые значения запасов прочности.

Параметры прочности и пластичности должны контролироваться с помощью образцов, вырезанных из поволоки (из ободной и ступичной частей) или другими методами контроля (периодической разрезкой и т. п.).

Параметры пластичности (удлинение при разрыве δ , поперечное сужение ψ , ударная вязкость a_n) должны обеспечивать работоспособность материала при циклических нагрузениях в условиях концентрации напряжений (отверстия, галтели, замковые и переходные части и т. п.).

Рекомендуется применять для дисков материалы с величинами $\delta > 12\%$; $\psi > 20\%$; $a_n > 5$ кгс·м/см². При $\delta < 6\%$, $\psi < 8\%$, $a < 2$ кгс·м/см² практически трудно обеспечить работоспособность дисков.

Исключение в ряде случаев составляют литые диски малых диаметров (< 300 мм), при использовании которых применяют 100%-ный контроль разгонными испытаниями на $(1,05 + 1,1) n_{\max}$.

Диски, предназначенные для больших ресурсов, не должны иметь значительных концентраторов напряжений (резьбы, надрезов и др.), а края отверстий и замковых пазов должны обладать достаточными радиусами закруглений. Качество поверхности должно быть высоким, рекомендуется использование упрочняющей технологии (наклеп дробью и другие способы обработки).

Пример. Размеры диска даны на рис. 56. Частота вращения диска $n = 12\,300$ об/мин; материал диска — сплав ХН77ТЮР; плотность материала $\rho = 8,1$ г/см³ ($8,26 \cdot 10^{-6}$ кгс·с²/см⁴). Расчет начинают с определения радиального напряжения на обode. Диск имеет 54 лопатки. Радиус корневого сечения лопатки $r_0 = 19,7$ см; площадь корневого сечения $F(r_0) = 3,54$ см². Радиус концевое сечения лопатки $R = 31,3$ см; площадь концевое сечения $F(R) = 1,03$ см².

Центробежная сила профильной части лопатки

По графику для $n = 2$ (рис. 56) при $\kappa = \frac{1,03}{3,54} = 0,29$; $\xi_0 = \frac{19,7}{31,1} = 0,63$ определяем

$$\sigma(r_0) = 0,5\sigma_0$$

Напряжение

$$\sigma_0 = \rho\omega^2 R^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) = 8,26 \cdot 10^{-6} \cdot 1290^2 \cdot 31,1^2 \cdot 0,5 (1 - 0,63^2) = 4010 \text{ кгс/см}^2$$

Таким образом,

$$\sigma(r_0) = 0,5\sigma_0 = 0,5 \cdot 4010 = 2005 \text{ кгс/см}^2$$

Затем находим

$$C_n = 2005 \cdot 3,54 \approx 7100 \text{ кгс}$$

По формуле (158) определяем ($h_{cp} = h_b$)

$$\sigma_{rb} = \frac{zC_n}{2\pi b h_b} + \rho\omega^2 r_0 \delta = \frac{54 \cdot 7100}{2\pi \cdot 17,4 \cdot 4,8} + 8,26 \cdot 10^{-6} \cdot 1290^2 \cdot 19,7 \cdot 2,3 = 731 + 622 = 1353 \text{ кгс/см}^2$$

6. Расчет запаса прочности по разрушающим оборотам k_{BI}

r , см	h , см	T , °C	σ_{100} , кгс/см ²	Δr , см	$\sigma_{100} h$, кгс/см	r^2 , см ²	$r^2 h$, см ³
0	6,7	300	9500	3	63 600	0	0
3	6,7	300	9500	2	63 600	9	60
5	6,7	315	9500	5	63 600	25	168
10	5,1	380	9100	5	46 400	100	510
15	3,7	500	8600	2,4	31 800	225	882
17,4	4,8	550	8000		38 400	302	1450

Расчет запаса прочности по разрушающим оборотам по меридианальному сечению сведен в табл. 6.

В табл. 6 все данные отнесены к сечениям диска на заданных радиусах, которые указаны в первой графе, $\sigma_{100} - 100$ — часовая длительная прочность. Пользуясь правилом трапеции, вычислим интеграл

$$\int_0^b \sigma_{dl} h dr \approx \sum \Delta r_i (\sigma_{100} h)_{i, cp}$$

Следовательно, необходимо среднее значение $\sigma_{100} h$ на каждом участке умножить на длину соответствующего участка и просуммировать:

$$\int_0^b \sigma_{dl} h dr = 3 \frac{(63,6 + 63,6) 10^3}{2} + 2 \frac{(63,6 + 63,6) 10^3}{2} + 5 \frac{(63,6 + 46,4) 10^3}{2} + 5 \frac{(46,4 + 31,8) 10^3}{2} + 2,4 \frac{(31,8 + 38,4) 10^3}{2} = 873 \cdot 10^3 \text{ кгс}$$

Далее переходим к вычислению интеграла

$$\int_0^b r^2 h dr \approx \sum \Delta r_i (r^2 h)_{i, cp}$$

Получаем

$$\int_0^b r^2 h dr = 3 \frac{0 + 60}{2} + 2 \frac{60 + 168}{2} + 5 \frac{168 + 510}{2} + 5 \frac{510 + 832}{2} + 2,4 \frac{832 + 1450}{2} = 8120 \text{ см}^4$$

Вычисление интегралов можно провести в более удобном виде для машинного счета, если ввести столбец значений

$$\frac{1}{2} (\Delta r_i + \Delta r_{i-1})$$

Запас по разрушающим оборотам для длительности работы (100 ч) находим из формулы (164)

$$k_{BI} = \sqrt{\frac{\int_0^b \sigma_{dl} h dr}{\sigma_{rb} b h_b + \rho \omega^2 J}} = \sqrt{\frac{873 \cdot 10^3}{1353 \cdot 17,4 \cdot 4,8 + 13,7 \cdot 8120}} = \sqrt{\frac{873 \cdot 10^3}{113 \cdot 10^3 + 111 \cdot 10^3}} = 1,87$$

ПРОФИЛИРОВАНИЕ РАВНОПРОЧНЫХ ДИСКОВ

Профилирование диска состоит в выборе толщины диска h на радиусе r .

Диски турбин и компрессоров часто профилируют так, что напряжения от действия центробежных сил лопаток и самого диска остаются постоянными вдоль радиуса, причем $\sigma_{\theta} = \sigma_r$.

Такой диск называют *равнопрочным*, что, строго говоря, справедливо только при отсутствии неравномерного нагрева.

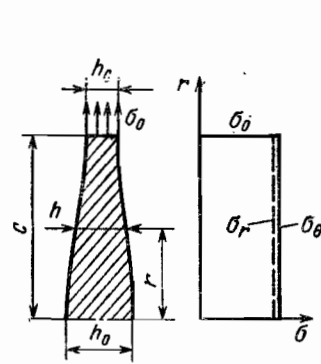


Рис. 57. Диск с постоянными напряжениями (полотно диска)

Сечение полотна равнопрочного диска и эпюры напряжений показаны на рис. 57. Если положить

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_r(r) = \sigma_0,$$

где σ_0 — допускаемое напряжение в диске, то из условия равновесия (см. стр. 337) находим следующее значение толщины диска:

$$h(r) = h_c e^{\frac{\rho \omega^2}{2\sigma_0} (c^2 - r^2)}, \quad (170)$$

где h_c — толщина диска на радиусе c .
Отношение толщины диска в центре h_0 к толщине диска на радиусе c

$$\frac{h_0}{h_c} = e^{\frac{\rho u_c^2}{2\sigma_0}}, \quad (171)$$

где $u_c = \omega c$ — окружная скорость на радиусе c .

Отношение $\frac{h_0}{h_c}$ возрастает при увеличении окружной скорости и уменьшается при увеличении допускаемого напряжения в диске.

В реальных конструкциях равнопрочный диск имеет обод (для крепления лопаток). Диск равной прочности с ободом и распределение напряжений в нем показано на рис. 58.

При расчете следует учесть равенство радиальных перемещений при $r = c$. Перемещение полотна диска

$$u_c = \frac{c}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) = \frac{c \sigma_0 (1 - \nu)}{E},$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Из условия равенства перемещений обода и полотна диска будем иметь

$$\sigma_{rb} \frac{b}{\delta} - \sigma_0 \frac{ch_c}{\delta h_b} + \rho \omega^2 b^2 = \sigma_0 (1 - \nu), \quad (172)$$

где δ — радиальная толщина обода.

В правой части равенства (172) стоит величина окружного напряжения в обode.

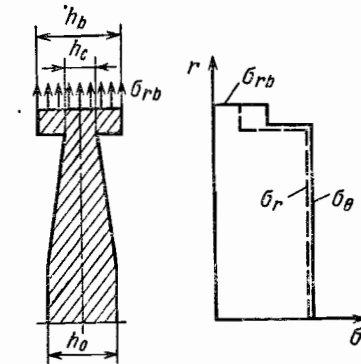


Рис. 58. Диск с постоянными напряжениями (диск равной прочности)

Из условия (172) получаем

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{rb} \frac{b}{\delta} + \rho \omega^2 b^2}{\frac{ch_c}{\delta h_b} + 1 - \nu}.$$

Поскольку же обычно задается величина σ_0 , то

$$h_c = h_b \left[\frac{\sigma_{rb} b}{\sigma_0 c} + \frac{\rho \omega^2 b^2}{\sigma_0} \frac{\delta}{c} - \frac{\delta}{c} (1 - \nu) \right]. \quad (173)$$

Для ориентировочных расчетов можно считать

$$h_c \approx h_b \frac{\sigma_{rb}}{\sigma_0}.$$

Зависимость (173) служит для определения толщины диска в шейке. Толщину диска в центре определяют из равенства (171).

В реальных конструкциях толщины диска, определяемые по формуле (170), заменяют толщинами диска более простого профиля, у которого возле центра толщина постоянная, а далее (до шейки диска) идет участок конического профиля.

Равнопрочный диск не может иметь отверстия, так как в этом случае нарушается условие $\sigma_\theta(r) = \sigma_r(r) = \sigma_0$. Однако при практическом профилировании дисков зависимость (170) часто применяют и для дисков с отверстиями. В этом случае материал центральной части диска в зоне отверстия используют для развития ступицы, так что запас по разрушающим оборотам остается таким же, как и для сплошного диска.

Приведем формулы для определения массы равнопрочного диска.

Масса полотна диска

$$G_1 = 2\pi \rho \int_0^c r h dr = 2\pi \rho h_c \int_0^c e^{\frac{\rho \omega^2}{2\sigma_0} (c^2 - r^2)} r dr = 2\pi \rho h_c \frac{\sigma_0}{\rho \omega^2 c^2} \left(e^{\frac{\rho \omega^2 c^2}{2\sigma_0}} - 1 \right),$$

где ρ — плотность материала диска.

Или в другой форме

$$G_1 = 2\pi \rho c^2 (h_0 - h_c) \frac{\sigma_0}{\rho \omega^2 c^2}.$$

Масса всего диска

$$G = 2\pi \rho \left[c^2 (h_0 - h_c) \frac{\sigma_0}{\rho \omega^2 c^2} + b h_b \delta \right]. \quad (174)$$

При подсчете массы удобно отнести к диску замковые части диска и лопаток, тогда под δ следует понимать радиальную толщину обода и замковых частей (включая полки лопаток). Для получения массы диска с лопатками добавляют величину zG_L , где G_L — масса профильной части лопатки.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ДИСКОВ

При определении напряжений и деформаций во вращающемся неравномерно нагруемом диске используют уравнения равновесия, упругости и совместности.

Уравнение равновесия представляет собой условие равновесия элемента диска в поле центробежных сил (рис. 59).

Оно может быть записано в виде

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r h) + (\sigma_\theta - \sigma_r) \frac{h}{r} + \rho \omega^2 r h = 0, \quad (175)$$

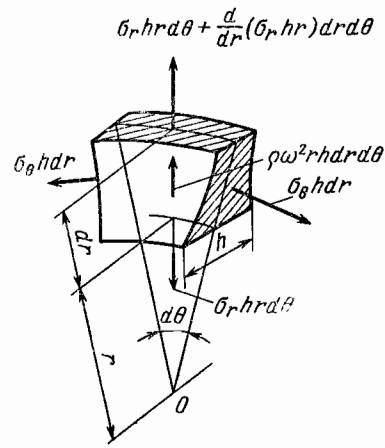


Рис. 59. Условия равновесия элемента диска

где σ_r , σ_θ — радиальное и окружное напряжения; ρ — плотность материала диска; ω — угловая скорость вращения; h — толщина диска.

Если $u(r)$ — радиальное перемещение точек диска на радиусе r , то деформации в радиальном и окружном направлениях будут

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad (176)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (177)$$

Деформации и напряжения связаны уравнениями упругости

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha T; \quad (178)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha T, \quad (179)$$

где E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного расширения; T — температура на данном радиусе диска, °С.

Из уравнений (178) и (179) с учетом зависимости (176) и (177) вытекают соотношения

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}; \quad (180)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}. \quad (181)$$

Если внесем последние соотношения в уравнение (175), то получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно $u(r)$. Решение этого уравнения вместе с граничными условиями позволяет определить напряжения и деформации в диске.

Однако точное решение указанного уравнения возможно только в некоторых частных случаях (диск постоянной толщины, диск гиперболического профиля и др.), и потому для практических расчетов разработано большое число приближенных методов (свыше 40). Два таких метода приведены ниже.

Если за основные неизвестные принимают напряжения, то при решении задачи учитывают уравнение совместности деформаций. Это уравнение основано на соотношении

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} r \right) = \frac{du}{dr}$$

или

$$\frac{d}{dr} (r\epsilon_\theta) = \epsilon_r. \quad (182)$$

В силу равенств (178) и (179) получим уравнение совместности в напряжениях

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \left[\frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha T \right] \right\} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha T. \quad (183)$$

Выполнение этого условия означает, что полученная в решении величина радиального перемещения $u(r)$ будет функцией непрерывной, что соответствует физическому смыслу задачи.

При решении задачи «в напряжениях» исходят из системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (175) и (183) относительно двух неизвестных функций σ_r и σ_θ . Преимущество такого способа состоит в более простых граничных условиях, которые задаются обычно «в напряжениях».

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ДИСКЕ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассмотрим сначала диск постоянной толщины (рис. 60) с постоянными параметрами упругости. Температура распределяется вдоль радиуса диска по произвольному закону.

Для диска с отверстием при граничных условиях

$$\sigma_r(b) = \sigma_{rb}, \quad \sigma_r(a) = \sigma_{ra},$$

где σ_{rb} и σ_{ra} — заданные напряжения, будем иметь

$$\sigma_r = \sigma_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \sigma_{ra} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) + E \left[\theta(b) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \theta(r) \right]; \quad (184)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \sigma_{ra} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \times \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) + E \left[\theta(b) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \theta(r) - \alpha T \right], \quad (185)$$

$$\text{где } \theta(r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r r \alpha T dr. \quad (186)$$

В формулах (184) и (185) первый член выражает напряжения в диске от нагрузки на внешнем контуре, второй — от нагрузки на внутреннем контуре, следующий член — напряжения от центробежных сил самого диска и последний член — температурные напряжения.

Из этих формул следует, что в равномерно нагретом диске температурные напряжения отсутствуют (это справедливо для дисков любого профиля с отверстиями и без отверстий).

Если температура диска от ступицы к ободу изменяется по степенному закону

$$T(r) = \Delta T \frac{r^n}{b^n},$$

где $\Delta T = T(b) - T(0)$ — разность температур между ободом и центром, тогда

$$\theta(r) = \frac{\alpha \Delta T}{n+2} \left(\frac{r^n}{b^n} - \frac{a^n}{b^n} \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (187)$$

Для сплошного диска (без отверстия) при граничных условиях $\sigma_r(b) = \sigma_{rb}$, $\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0)$ получаем

$$\sigma_r = \sigma_{rb} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) + E [\theta(b) - \theta(r)]; \quad (188)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{rb} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) + E [\theta(b) + \theta(r) - \alpha T], \quad (189)$$

$$\text{где } \theta(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r \alpha T dr.$$

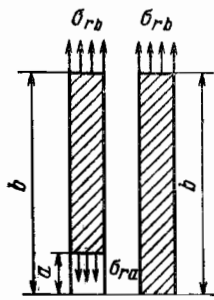


Рис. 60. Диски постоянной толщины

Отметим, что

$$\theta(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \theta(r) = \frac{1}{2} \alpha T(0).$$

Если температура изменяется по степенному закону, то

$$\theta(r) = \frac{\alpha \Delta T}{n+2} \frac{r^n}{b^n}.$$

Эпюры радиальных и окружных напряжений в диске постоянной толщины при действии контурных нагрузок и центробежных сил показаны на рис. 61 и 62.

Следует отметить, что у внутреннего отверстия напряжения повышаются.

При малом отверстии величина σ_θ при $r = a$ приблизительно в 2 раза больше, чем в сплошном диске.

Для дисков с числом нагружений (запусков) более 500 следует избегать неподкрепленных отверстий. Распределение температурных напряжений в сплошном диске показано на рис. 63.

На ободе диска окружные напряжения являются сжимающими, если температура возрастает с увеличением радиуса. Такой же вид имеет эпюра температурных напряжений для диска с отверстием, но у отверстия напряжение σ_r становится равным нулю, а окружное напряжение возрастает.

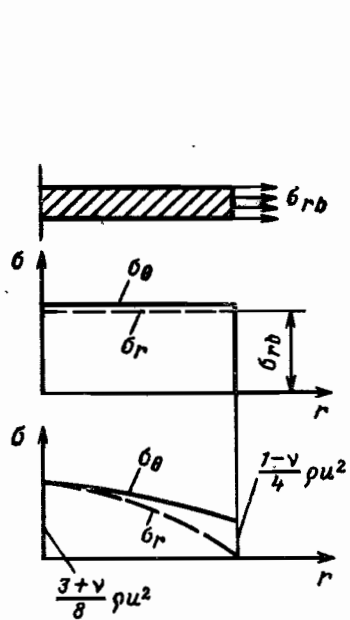


Рис. 61. Напряжения от контурной нагрузки и центробежных сил в сплошном диске

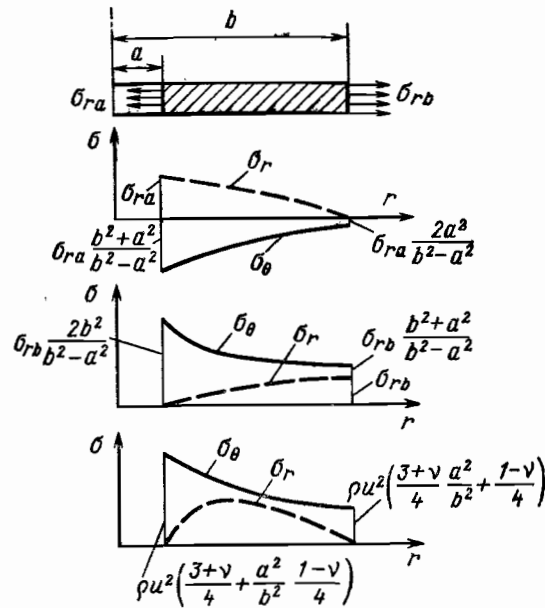


Рис. 62. Напряжения от контурной нагрузки и центробежных сил в диске с отверстием

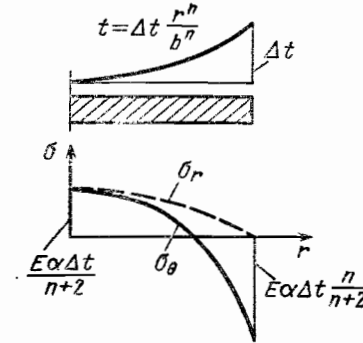


Рис. 63. Температурные напряжения в диске

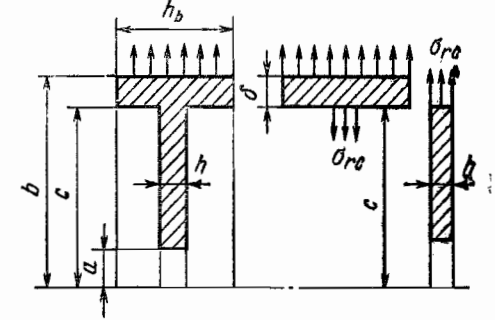


Рис. 64. Диск постоянного сечения с ободом

Радиальное перемещение в диске определяют по формуле

$$u(r) = \frac{\sigma_{rb}}{E} \frac{b^2 r}{b^2 - a^2} \left[1 - \nu + \frac{a^2}{r^2} (1 + \nu) \right] - \frac{\sigma_{ra}}{E} \frac{a^2 r}{b^2 - a^2} \left[1 - \nu + \frac{b^2}{r^2} (1 + \nu) \right] + \frac{3 + \nu}{8} \frac{\rho \omega^2 r}{E} \left[(b^2 + a^2) (1 - \nu) + \frac{a^2 b^2}{r^2} (1 + \nu) - r^2 \frac{1 - \nu^2}{3 + \nu} \right] + \theta(b) \frac{b^2 r}{b^2 - a^2} \left[1 - \nu + \frac{a^2}{r^2} (1 + \nu) \right] + \theta(r) (1 + \nu) r, \quad (190)$$

на наружном радиусе

$$u(b) = \frac{\sigma_{rb} b}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu \right) - \frac{\sigma_{ra} b}{E} \frac{2a^2}{b^2 - a^2} + \frac{\rho \omega^2 b}{4E} [b^2 (1 - \nu) + a^2 (3 + \nu)] + \theta(b) \frac{2b^3}{b^2 - a^2}. \quad (191)$$

Формулы (190) и (191) справедливы и для сплошного диска, если положить в них $a = 0$.

Рассмотрим диск постоянного сечения с ободом (рис. 64). Температуру диска будем считать во всех точках одинаковой.

Диски такой конфигурации применяют в тех случаях, когда окружная скорость на ободе невелика ($u < 200$ м/с) и нагрузка создается в основном центробежными силами лопаток и замков.

Рассматривая обод как кольцо, получим окружные напряжения в нем

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rb} \frac{b}{\delta} - \sigma_{rc} \frac{c}{\delta} \frac{h}{h_b} + \rho \omega^2 b^2,$$

где σ_{rc} — радиальное напряжение на радиусе c ; h_b — толщина диска на внешнем радиусе.

Приравняв радиальное перемещение кольца и диска на радиусе c , найдем

$$\sigma_{rb} \frac{b}{\delta} - \sigma_{rc} \frac{ch}{\delta h_b} + \rho \omega^2 b^2 = \sigma_{rc} \left(\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \nu \right) + \frac{\rho \omega^2}{4} [c^2 (1 - \nu) + a^2 (3 + \nu)],$$

откуда

$$\sigma_{rc} = \frac{\sigma_{rb} \frac{b}{\delta} + \rho \omega^2 \left(b^2 - c^2 \frac{1 - \nu}{4} - a^2 \frac{3 + \nu}{4} \right)}{\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \nu + \frac{ch}{\delta h_b}}. \quad (192)$$

Равенство (192) выведено для свободного отверстия ($\sigma_{ra} = 0$) в полотно диска; оно справедливо также и для сплошного диска $a = 0$. После того как определена величина σ_{rc} , по формулам (184) и (185) находят напряжения для диска с отверстием, а по формулам (188) и (189) — для сплошного диска.

В указанных формулах величину σ_{rb} заменяют σ_{rc} , а радиус b радиусом c .

В приближенных расчетах толщину полотна диска можно выбрать, задаваясь величиной σ_{rc} , из условия

$$h \approx h_b \frac{\sigma_{rb}}{\sigma_{rc}}.$$

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ДИСКЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Метод линейной аппроксимации. Для решения задачи запишем уравнения равновесия и совместности в интегральной форме.

Интегрируя обе части уравнения (175) в пределах от некоторого начального радиуса a до r , находим

$$\sigma_r = \frac{1}{h} \int_a^r \frac{h}{r_1} (\sigma_\theta - \sigma_r) dr_1 - \rho \omega^2 \frac{1}{h} \int_a^r r_1 h dr_1 + \frac{h_a}{h} \sigma_{ra}, \quad (193)$$

где r_1 — переменная интегрирования.

Индекс a здесь и в дальнейшем означает, что рассматривается значение параметра при $r = a$.

В качестве начального радиуса a для дисков с отверстием принимаем радиус отверстия, для сплошного диска — некоторый малый радиус ($a \approx 0,1 b$), в пределах которого с достаточной точностью выполняется условие

$$\sigma_{ra} = \sigma_{\theta a}. \quad (194)$$

Запишем уравнение совместности (183) в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha T \right] = - \frac{1+\nu}{rE} (\sigma_\theta - \sigma_r).$$

Интегрируя обе части равенства в пределах от a до r , получим

$$\sigma_\theta - \sigma_r = - (1-\nu) \sigma_r - E \int_a^r \frac{1+\nu}{r_1 E} (\sigma_\theta - \sigma_r) dr_1 - E (\alpha T - \alpha_a T_a) + \frac{E}{E_a} (\sigma_{\theta a} - \nu_a \sigma_{ra}). \quad (195)$$

Обозначая разность окружного и радиального напряжений в диске

$$\sigma_\theta - \sigma_r = y(r) \quad (196)$$

и заменяя величину σ_r в равенстве (195) значением из уравнения (193), найдем

$$y(r) = - \frac{1-\nu}{h} \int_a^r \frac{h}{r_1} y(r_1) dr_1 - E \int_a^r \frac{1+\nu}{r_1 E} y(r_1) dr_1 + \frac{1-\nu}{h} \rho \omega^2 \int_a^r r_1 h dr_1 - E (\alpha T - \alpha_a T_a) + \frac{E}{E_a} (\sigma_{\theta a} - \nu_a \sigma_{ra}) - \frac{1-\nu}{h} h_a \sigma_{ra}. \quad (197)$$

Для диска с отверстием, полагая $\sigma_{ra} = 0$, запишем уравнение в сокращенной форме:

$$y = \rho_1 \int_a^r q_1 y dr_1 + \rho_2 \int_a^r q_2 y dr_1 + f_\omega + f_T + \sigma_{\theta a} f_k, \quad (198)$$

где

$$\rho_1 = - \frac{1-\nu}{h}; \quad \rho_2 = -E; \quad q_1 = \frac{h}{r}; \quad q_2 = \frac{1+\nu}{rE}; \quad (199)$$

$$f_\omega = \frac{1-\nu}{h} \rho \omega^2 \int_a^r r_1 h dr_1; \quad (200)$$

$$f_T = -E (\alpha T - \alpha_a T_a); \quad (201)$$

$$f_k = \frac{E}{E_a}. \quad (202)$$

Это же уравнение справедливо и для сплошного диска [условие (194)], но только следует считать

$$f_k = \frac{E}{E_a} (1 - \nu_a) - \frac{1-\nu}{h} h_a. \quad (203)$$

Уравнение (197) представляет собой нормальное интегральное уравнение, его решают методом линейной аппроксимации, использующим правило трапеций для вычисления интегралов.

Разобьем диск по радиусу на n участков сечениями $a = r_0, r_1, r_2, \dots, r_n = b$, значения функций в сечении $r = r_i$ будем обозначать $y(r_i) = y_i, \rho_1(r_i) = \rho_{1i}, \rho_2(r_i) = \rho_{2i}$ и т. д.

Длина i -го участка диска

$$\Delta_i = r_i - r_{i-1}. \quad (204)$$

Функции f_ω и f_T в уравнении (198) выражают действие центробежных сил диска и неравномерного нагрева, функция f_k связана с нагрузками на краях диска.

Обозначим

$$f_\omega + f_T + \sigma_{\theta a} f_k = f \quad (205)$$

и рассмотрим общий метод решения уравнения (198).

Применяя правило трапеций для вычисления интегралов, можно записать в начальном сечении $r_0 = a$

$$y_0 = f_0;$$

в первом сечении $r = r_1$

$$y_1 = \rho_{11} \frac{1}{2} (q_{10} y_0 + q_{11} y_1) \Delta_1 + \rho_{21} \frac{1}{2} (q_{20} y_0 + q_{21} y_1) \Delta_1 + f_1, \quad (206)$$

где $\Delta_1 = r_1 - r_0; f_1$ — значение функции f при $r = r_1$.

Из равенства (206) получаем

$$y_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} (\rho_{11} q_{11} + \rho_{21} q_{21}) \Delta_1} \left[\rho_{11} \frac{1}{2} q_{10} y_0 \Delta_1 + \rho_{21} \frac{1}{2} q_{20} y_0 \Delta_1 + f_1 \right].$$

Во втором сечении

$$y_2 = \rho_{12} \left[\frac{1}{2} (q_{10} y_0 + q_{11} y_1) \Delta_1 + \frac{1}{2} (q_{11} y_1 + q_{12} y_2) \Delta_2 \right] + \rho_{22} \left[\frac{1}{2} (q_{20} y_0 + q_{21} y_1) \Delta_1 + \frac{1}{2} (q_{21} y_1 + q_{22} y_2) \Delta_2 \right] + f_2,$$

откуда

$$y_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} (p_{12}q_{12} + p_{22}q_{22}) \Delta_2} \left[\frac{1}{2} (p_{12}q_{10} + p_{22}q_{20}) \Delta_1 y_0 + \frac{1}{2} (p_{12}q_{11} + p_{22}q_{21}) (\Delta_1 + \Delta_2) y_1 + f_2 \right].$$

В общем случае для сечения $r = r_i$ можно записать

$$y_i = \frac{1}{1 - \alpha_{ii}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} y_j + f_i \right), \quad (207)$$

где

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{2} (p_{1i}q_{1i} + p_{2i}q_{2i}) \Delta_i; \quad (208)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (p_{1i}q_{1j} + p_{2i}q_{2j}) (\Delta_j + \Delta_{j+1}). \quad (209)$$

В последнем равенстве следует считать $\Delta_0 = 0$, так как участки начинаются в $\Delta_1 = r_1 - r_0 = r_1 - a$. Соотношение (207) позволяет, шаг за шагом, вычислить значения $y(r)$ во всех сечениях.

В практических расчетах величину $y(r)$ удобно определять от каждого фактора в отдельности, в соответствии с равенством (205).

Тогда

$$y(r) = y_\omega(r) + y_T(r) + \sigma_{\theta a} y_k(r), \quad (210)$$

где $y_\omega(r)$, ... получаются при расчете по формуле (207), если положить соответственно $f(r) = f_\omega(r)$, $f(r) = f_T(r)$, $f(r) = f_k(r)$.

В равенство (210) входит величина $\sigma_{\theta a}$, которая подлежит определению. Из уравнений (193), (196) и (210) получаем

$$\sigma_r = \frac{1}{h} \int_a^r \frac{h}{r_1} [y_\omega(r_1) + y_T(r_1)] dr_1 + \sigma_{\theta a} \frac{1}{h} \int_a^r \frac{h}{r_1} y_k(r_1) dr_1 - \rho \omega^2 \frac{1}{h} \int_a^r r_1 h dr_1 + \frac{h_a}{h} \sigma_{ra}. \quad (211)$$

Для диска с отверстием ($\sigma_{ra} = 0$) на внешнем контуре из условия

$$\sigma_r(b) = \sigma_{rb}, \quad (212)$$

где σ_{rb} — заданное напряжение от действия лопаток и замков, находим

$$\sigma_{\theta a} = \frac{\sigma_{rb} h b - \int_a^b \frac{h}{r_1} [y_\omega(r_1) + y_T(r_1)] dr_1 + \rho \omega^2 \int_a^b r_1 h dr_1}{\int_a^b \frac{h}{r_1} y_k(r_1) dr_1}. \quad (213)$$

Для сплошного диска ($\sigma_{ra} = \sigma_{\theta a}$) из соотношений (211) и (212) получаем

$$\sigma_{\theta a} = \frac{\sigma_{rb} h b - \int_a^b \frac{h}{r_1} [y_\omega(r_1) + y_T(r_1)] dr_1 + \rho \omega^2 \int_a^b r_1 h dr_1}{h_a + \int_a^b \frac{h}{r_1} y_k(r_1) dr_1}. \quad (214)$$

Зная $\sigma_{\theta a}$, из равенств (210) и (211) находим $y(r)$ и $\sigma_r(r)$ и затем

$$\sigma_\theta(r) = y(r) + \sigma_r(r). \quad (215)$$

Если в диске произвольного профиля температурная деформация αT остается постоянной на всех радиусах, то температурные напряжения в таком диске отсутствуют, так как

$$f_T = -E(\alpha T - \alpha_a T_a) = 0.$$

Пример. Определим напряжения в диске, профиль которого приведен на рис. 56. Материал диска — никелевый жаропрочный сплав ХН77ТЮР. Плотность материала $\rho = 8,1 \text{ г/см}^3$ ($8,26 \cdot 10^{-4} \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{см}^4$), частота вращения диска $n = 12\,300 \text{ об/мин}$; напряжение на контуре $\sigma_{rb} = 1400 \text{ кгс/см}^2$. Расчет сведен в табл. 7.

В графах 12—16 указаны значения коэффициентов α_{ij} , необходимых для расчета по формуле (207). Жирной линией отделены величины α_{ii} .

В следующих графах указаны функции f_k , f_T и f_ω , вычисленные по формулам (203), (201), (200), при вычислении интеграла в равенстве (200) использовалось правило трапеций. Далее определяем величину $y_k(r)$ (графа 24), а графы 20—23 оставляем пока не заполненными. В начальном сечении (строка $i=0$) при $r=1 \text{ см}$

$$y_{k0} = f_{k0} = 0.$$

В следующем сечении по формуле (207)

$$y_{k1} = \frac{1}{1 - \alpha_{11}} (\alpha_{10} y_{k0} + f_{k1}) = \frac{1}{1 - (-0,8)} 0,0147 = -0,008.$$

Теперь удобно поступить следующим образом: умножим значения α_{ij} в графе 13 на y_{k1} и занесем результат в графу 20.

В графу 23 занесем результат в строке $i=2$, получим

$$\sum_{j=0}^1 \alpha_{2j} y_{kj} + f_{k2} = 0 + \alpha_{21} y_{k1} + f_{k2} = 0,0157 - 0,252 = -0,236.$$

Умножив его на $\frac{1}{1 - \alpha_{22}} = \frac{1}{1,5}$, получим $y_{k2} = -0,157$.

Теперь умножим значения α_{ij} в графе 14 на величину y_{k2} и поместим результат в графу 21. Затем суммируем значения в строке $i=3$ и находим

$$\sum_{j=0}^2 \alpha_{3j} y_{kj} + f_{k3} = 0 + 0,0179 + 0,174 - 0,621 = -0,429.$$

Умножив сумму на $\frac{1}{1 - \alpha_{33}} = \frac{1}{1,333}$, получим $y_{k3} = -0,322$ и т. д.Точно так же ведем определение y_T (графа 29) и y_ω (графа 34).

Переходим к вычислениям по формулам (211) и (214). Запишем равенство (211) в виде

$$\sigma_r = \frac{1}{h} [F_\omega + F_T + \sigma_{\theta a} F_k],$$

7. Расчет диска (сплошного) по методу линейной аппроксимации

i	r	1/2 Δ	h	T	α	αT	E	p ₁ = -p ₂	p ₁ = -h	q ₁ = h/r	q ₂ = (1+ν)/rE	α _{ij}				
												α _{i0}	α _{i1}	α _{i2}	α _{i3}	α _{i4}
0	1	—	6,7	300	14·10 ⁻⁶	0,0042	1,94·10 ⁸	-0,1045	6,7	0,67·10 ⁻⁶	—	—	—	—	—	
1	5	2	6,7	315	14·10 ⁻⁶	0,00441	1,90·10 ⁸	-0,1045	1,34	0,1368·10 ⁻⁶	-3,81	-0,8	—	—	—	
2	10	2,5	5,1	380	14,5·10 ⁻⁶	0,00551	1,85·10 ⁸	-0,1373	0,51	0,0703·10 ⁻⁶	-4,32	-1,966	-0,5	—	—	
3	15	2,5	3,7	500	14,9·10 ⁻⁶	0,00745	1,79·10 ⁸	-0,1892	0,247	0,0484·10 ⁻⁶	-4,93	-2,243	-1,111	-0,333	—	
4	17,4	1,2	4,8	550	15,3·10 ⁻⁶	0,008515	1,72·10 ⁸	-0,1458	0,276	0,0434·10 ⁻⁶	-4,26	-1,94	-0,3765	-0,441	-0,188	

i	f _K	f _T	f _ω	α _{ij} y _{kl}			y _K	α _{ij} y _{Tj}			∑ _{j=0} ⁱ⁻¹ α _{ij} y _{Tj} + i _T	y _T
				α _{i1} y _{K1}	α _{i2} y _{K2}	α _{i3} y _{K3}		α _{i1} y _{T1}	α _{i2} y _{T2}	α _{i3} y _{T3}		
1	17	18	19	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	0	0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	0	-399	115	0,174	0,153	0,142	0	436	1471	1275	—	—
2	-0,252	-2423	548	—	—	—	-0,008	498	1294	—	—	—
3	-0,621	-5820	1445	—	—	—	-0,157	430	—	—	—	—
4	-0,356	-7420	1448	—	—	—	-0,322	—	—	—	—	—
				—	—	—	-0,0395	—	—	—	—	—

i	α _{ij} y _{ωj}			F _K	F _T	F _ω	σ _r ^(ω)	σ _θ ^(ω)	σ _r ^(T)	σ _θ ^(T)	σ _r ^(ω)	σ _θ ^(ω)	σ _r ^(T)	σ _θ ^(T)
	α _{i1} y _{ω1}	α _{i2} y _{ω2}	α _{i3} y _{ω3}											
1	30	31	32	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	115	422,4	—	6,7	0	0	2468	2468	1456	1456	3924	3924	3924	3924
2	990	733	634	6,684	-594	-930	2325	2325	1364	1130	3659	3659	3659	3659
3	990	733	634	6,452	-3024	-3250	2483	2483	1250	304	3733	3733	3733	3733
4	722	634	634	6,052	-6500	-6080	2396	2396	624	-2734	3020	3020	3020	3020
				5,943	-8643	-7935	1400	1936	0	-3942	1400	1400	1400	1400

где

$$F_{\omega} = \int_a^r \frac{h}{r_1} y_{\omega} dr_1 - \rho \omega^2 \int_a^r h r_1 dr_1;$$

$$F_T = \int_a^r \frac{h}{r_1} y_T dr_1;$$

$$F_K = h_a + \int_a^r \frac{h}{r_1} y_K dr_1.$$

Значения функции F_K , F_T и F_{ω} указаны в графах 35, 36, 37. При определении напряжений от центробежных сил считаем $F_T = 0$.

По формуле (214) находим

$$\sigma_{\theta a}^{(\omega)} = \sigma_{ra}^{(\omega)} = \frac{\sigma_{rb} h_b - F_{\omega}(b)}{F_K(b)} = \frac{1400 \cdot 4,8 - (-7935)}{5,943} = 2468 \text{ кгс/см}^2.$$

Далее находим (графа 38)

$$\sigma_r^{(\omega)} = \frac{1}{h} (F_{\omega} + \sigma_{\theta a}^{(\omega)} F_K).$$

По формуле (210) определяем

$$y^{(\omega)} = y_{\omega} + \sigma_{\theta a}^{(\omega)} y_K = \sigma_{\theta}^{(\omega)} - \sigma_r^{(\omega)}$$

и затем (графа 39)

$$\sigma_{\theta}^{(\omega)} = y^{(\omega)} + \sigma_r^{(\omega)}.$$

При определении температурных напряжений считаем $F_{\omega} = 0$ и $\sigma_{rb} = 0$. Находим

$$\sigma_{\theta a}^{(T)} = \sigma_{ra}^{(T)} = \frac{-F_T(b)}{F_K(b)} = \frac{8643}{5,943} = 1456 \text{ кгс/см}^2.$$

Далее определяем (графа 40)

$$\sigma_r^{(T)} = \frac{1}{h} (F_T + \sigma_{\theta a}^{(T)} F_K);$$

$$y^{(T)} = y_T + \sigma_{\theta a}^{(T)} y_K; \quad \sigma_{\theta}^{(T)} = y^{(T)} + \sigma_r^{(T)}.$$

Суммарные напряжения даны в графах 42 и 43. Эпюры радиальных и окружных напряжений в диске показаны на рис. 65.

Метод последовательных приближений. Расчетные зависимости при этом методе более сложные, чем при методе линейной аппроксимации, но они позволяют непосредственно вычислить напряжения в диске произвольного профиля.

Радиальное и окружное усилия на единицу длины

$$N_r(r) = \sigma_r(r) h(r); \tag{216}$$

$$N_{\theta}(r) = \sigma_{\theta}(r) h(r), \tag{217}$$

где σ_r и σ_{θ} — радиальное и окружное напряжения в диске.

С п л о ш н о й д и с к. В этом случае на малом радиусе $a \approx 0,1 b$ принимают

$$N_{ra} = N_{\theta a}. \tag{218}$$

Здесь и в дальнейшем индекс a указывает, что значение параметра относится к сечению $r = a$.

Первое приближение для радиального усилия (вывод формул указан в работе [3])

$$N_r^{(1)}(r) = N_{rb} \Phi_1(r) + \Phi_{\omega}(r) + \Phi_T(r), \tag{219}$$

где $N_{rb} = \sigma_{rb} h_b$ — радиальное усилие на внешнем радиусе диска,

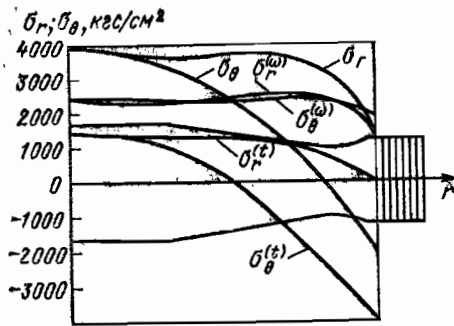


Рис. 65. Эпюры радиальных и окружных напряжений в диске

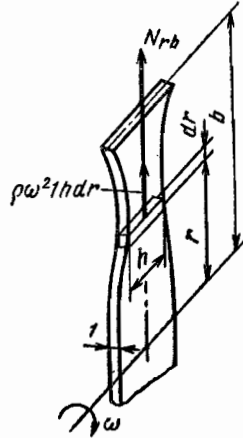


Рис. 66. Радиальные напряжения в сплошном диске от действия центробежных сил (1-е приближение)

Функция

$$\Phi_1(r) = \frac{1 + (1-\nu) \frac{a^{1+\nu}}{E_a h a} \int_a^r \frac{E h d r_1}{r_1^{2+\nu}}}{1 + (1-\nu) \frac{a^{1+\nu}}{E_a h a} \int_a^b \frac{E h d r_1}{r_1^{2+\nu}}} \quad (220)$$

Величина $\Phi_1(r)$ изменяется в пределах $0 \leq \Phi_1(r) \leq 1$. Усилие от центробежных сил диска

$$\Phi_\omega(r) = -\rho\omega^2 \int_a^r r_1 h d r_1 + \Phi_1(r) \rho\omega^2 \int_a^r r_1 h d r_1 \quad (221)$$

В этом равенстве r_1 — переменная интегрирования, изменяющаяся в пределах от a до r .

Усилие от неравномерного нагрева

$$\Phi_T(r) = F_T(r) - \Phi_1(r) F_T(b), \quad (222)$$

где

$$F_T(r) = \int_a^r \frac{E h}{r_1^2 \kappa(r_1)} f_T(r_1) d r_1; \quad (223)$$

$$\kappa(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^\nu; \quad (224)$$

$$f_T(r) = (1+\nu) \int_a^r \alpha T \kappa d r_1 - (r \alpha T \kappa - \alpha \alpha_a T a), \quad (225)$$

Коэффициент Пуассона ν предполагается постоянным. В практических расчетах при $\nu = 0,3$ можно приближенно считать

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\nu \approx \sqrt[3]{\frac{r}{a}}.$$

Если при расчете ограничиваются определением только первого приближения, то достаточно хороший результат получается в том случае, если положить в предыдущих формулах

$$\Phi_1(r) \approx 1. \quad (226)$$

Тогда, например, радиальные напряжения в диске от центробежных сил определяются по формуле

$$\sigma_r^{(1)}(r) = \frac{N_r^{(1)}(r)}{h} = \sigma_{rb} \frac{h_{rb}}{h} + \rho\omega^2 \left(\int_a^b r_1 h d r_1 - \int_a^r r_1 h d r_1 \right). \quad (227)$$

Это равенство имеет следующий физический смысл: радиальные напряжения от действия центробежных сил в сплошном диске такие же, как в стержне прямоугольного сечения $1 \cdot h$ (рис. 66).

Если известно радиальное усилие в диске $N_r(r)$, то окружное усилие определяют из равенства

$$N_\theta(r) = \nu N_r(r) + \frac{E h}{r \kappa} (1-\nu^2) \int_a^r \frac{\kappa}{E h} N_r d r_1 + \frac{E h}{r \kappa} f_T(r) + \frac{E h}{r \kappa} \frac{a}{E_a h a} (N_{\theta a} - \nu N_{r a}). \quad (228)$$

В частности, если требуется найти $N_\theta^{(1)}(r)$, то в это уравнение вносят $N_r^{(1)}(r)$ и для сплошного диска учитывают равенство (218).

Если при расчете определяют и следующие приближения для N_r , то формулу (228) используют для последнего приближения [обычно для $N_r^{(2)}(r)$ или $N_r^{(3)}(r)$].

Второе приближение для радиального усилия

$$N_r^{(2)}(r) = N_r^{(1)}(r) + \Delta^{(1)}(r). \quad (229)$$

Величина поправки

$$\Delta^{(1)}(r) = \Phi^{(1)}(r) - \Phi_1(r) \Phi^{(1)}(b), \quad (230)$$

где

$$\Phi^{(1)}(r) = -(1-\nu) \int_a^r \frac{N_r^{(1)}(r_1)}{r_1} d r_1 + (1-\nu^2) \int_a^r \frac{E h}{r_1^2 \kappa} \left[\int_a^{r_1} \frac{\kappa(r_2) N_r^{(1)}(r_2)}{E h} d r_2 \right] d r_1. \quad (231)$$

В большинстве практических задач достаточно ограничиться вторым приближением (для предварительного выбора конструктивного варианта можно использовать и первое приближение).

Если требуется вычислить третье приближение, то его находят из равенства

$$N_r^{(3)}(r) = N_r^{(1)}(r) + \Delta^{(2)}(r), \quad (232)$$

где вторую поправку к первому приближению определяют точно так же, как $\Delta^{(1)}(r)$, но исходя из $N_r^{(2)}(r)$.

Окружное усилие в диске определяется из соотношения (228).

Диск с отверстием. Первое приближение для радиального усилия

$$N_r^1(r) = N_{rb} \Phi_1(r) + N_{ra} [1 - \Phi_1(r)] + \Phi_\omega(r) + \Phi_T(r), \quad (233)$$

где $N_{ra} = \sigma_{ra} h a$ — радиальное усилие на внутреннем контуре.

Если диск напрессован на вал и в рабочих условиях должно сохраняться давление напрессовки p (в кг/см²), то следует положить $\sigma_{ra} = -p$.

Функция

$$\Phi_1(r) = \frac{\int_a^r \frac{Eh dr_1}{r_1^{2+\nu}}}{\int_a^b \frac{Eh dr_1}{r_1^{2+\nu}}} \quad (234)$$

Для диска с отверстием

$$\Phi_\omega(r) = \Phi_1(r) \rho \omega^2 \int_a^b r_1 h dr_1 - \rho \omega^2 \int_a^r r_1 h dr_1; \quad (235)$$

$$\Phi_T(r) = F_T(r) - \Phi_1(r) F_T(b), \quad (236)$$

где функция $F_T(r)$ определяется равенством (223),

Второе приближение и следующее находят из соотношений (229) и (230). Окружное усилие определяют из формулы (228). Для отыскания окружного усилия на внутреннем радиусе $N_{\theta a}$ используют формулу

$$N_{\theta a} = \frac{1}{\frac{a}{E_a h_a} \int_a^b \frac{Eh}{r_1^2 \chi(r_1)} dr_1} \left[-\varphi(b) + N_{rb} - N_{ra} \left(1 - \frac{\nu a^{1+\nu}}{E_a h_a} \int_a^b \frac{Eh dr_1}{r_1^{2+\nu}} \right) + \right. \\ \left. + \rho \omega^2 \int_a^b r_1 h dr_1 - F_T(b) \right] \quad (237)$$

Величину $\varphi(b)$ находят по последнему приближению для N_r [формула (231)]. Для упрощения расчета можно использовать результаты для предыдущего приближения N_r , и тогда все члены равенства (237) будут известными.

Общие указания. Для расчета диск разбивают на 5–8 расчетных сечений. При наличии участков с резким изменением толщины число расчетных сечений должно быть увеличено. Все интегралы вычисляют по правилу трапеций.

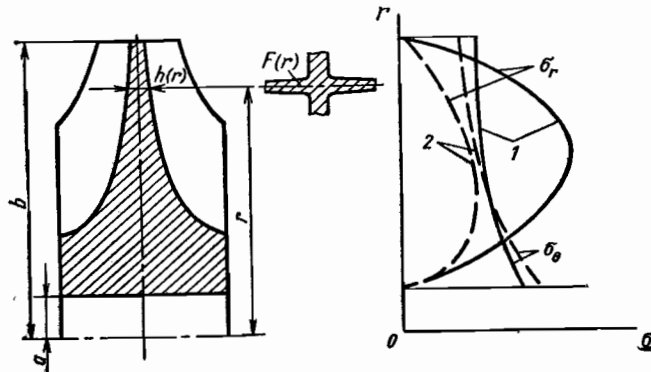


Рис. 87. Схема диска центробежного нагнетателя и диаграмма напряжений: 1 — без учета жесткости лопаток; 2 — с учетом жесткости лопаток

Для повышения точности расчета следует несколько увеличить число расчетных сечений на малых радиусах.

Особенности расчета дисков центробежных компрессоров. Лопатки центробежных компрессоров (нагнетателей) расположены на боковых сторонах диска (рис. 67). Обычно при расчете жесткость лопаток на растяжение не учитывают и лопатки рассматривают как присоединенные массы. Тогда диск рассчитывают обычным способом, вводя приведенную плотность материала

$$\rho^* = \rho \left(1 + \frac{kzF(r)}{2\pi r h} \right),$$

где k — коэффициент, зависящий от расположения лопаток (при одностороннем расположении $k = 1$, при двустороннем $k = 2$); z — число лопаток; $F(r)$ — площадь поперечного сечения лопатки.

Учет жесткости лопаток при расчете на растяжение приводит к существенным поправкам (см. рис. 67).

Запас по разрушающим оборотам

$$k_B = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\int_a^b \sigma_B h dr}{J^*}},$$

где $J^* = \int_a^b \rho^* r^2 h dr$.

Для дисков центробежных нагнетателей $k_B = 1,8 \div 2,2$. При наличии покрывающих дисков (закрытые крыльчатки) под h понимают суммарную толщину всех дисков. Запас по разрушающим оборотам должен быть в этом случае увеличен до $k_B = 2 \div 2,5$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ

Глава 17

ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩАЯ СИЛА И ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ

В общем случае на стержень (балку) могут действовать распределенная нагрузка, интенсивность которой характеризуется силой, приходящейся на единицу длины (q в кгс/см); сосредоточенные силы и пары сил (моменты), приложенные к какому-либо сечению балки (рис. 1).

Рассмотрим двухопорный стержень с нагрузкой посередине (рис. 2). В опорах возникают реакции R_A и R_B . Проведем сечение на расстоянии z от левой опоры, где выбрано начало координат. Тогда, рассматривая равновесие левой (отсеченной) части, приходим к выводу, что в сечении должны действовать *перерезывающая сила* $Q = 0,5 P$ и *изгибающий момент* $M = 0,5 Pz$. Такие же по величине сила и момент, только направленные в другую сторону, будут приложены к правой, оставшейся части стержня.

Момент силы для данного сечения вычисляют относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения. Эта ось перпендикулярна к плоскости изгиба (плоскости чертежа на рис. 2).

Изгибающий момент в сечении равен алгебраической сумме моментов (относительно рассматриваемого сечения) всех сил, приложенных к отсеченной части стержня (балки). Перерезывающая сила в сечении равна алгебраической сумме всех сил, приложенных к отсеченной части стержня (балки). Изгибающий момент и перерезывающая сила выражают действие отсеченной части стержня на оставшуюся.

Сечение разбивает стержень на две части, из которых каждую можно считать либо отсеченной, либо оставшейся. Удобно в качестве отсеченной рассматривать ту часть стержня, к которой приложено меньшее число внешних силовых факторов.

Соотношение между изгибающим моментом и перерезывающей силой. Рассмотрим элемент стержня длиной dz (рис. 3). В сечении z действуют сила Q и момент M . Так как эти величины изменяются по длине балки, то в сечении $z + dz$ будут действовать сила $Q + dQ$ и момент $M + dM$. Составим условия равновесия элемента стержня. Проектируя все силы на вертикальное направление, находим

$$dQ = qdz, \quad \text{или} \quad \frac{dQ}{dz} = q.$$

Взяв сумму моментов относительно оси, лежащей в сечении $z + dz$, получим

$$M + Q dz + \frac{1}{2} q dz^2 - (M + dM) = 0.$$

Огбрасывая величину $\frac{1}{2} q dz^2$, как бесконечно малую второго порядка, будем иметь

$$\frac{dM}{dz} = Q. \quad (1)$$

Следовательно, производная изгибающего момента равняется перерезывающей силе.

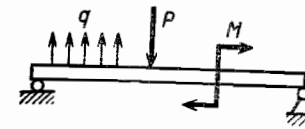


Рис. 1. Нагрузки, вызывающие изгиб стержня

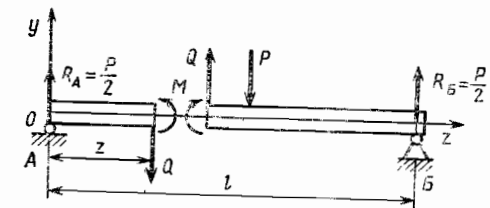


Рис. 2. Определение изгибающего момента и перерезывающей силы

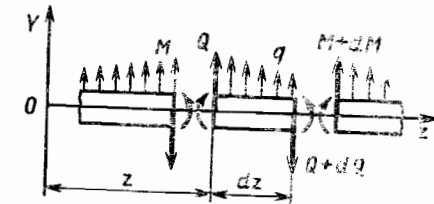


Рис. 3. Условия равновесия элемента стержня

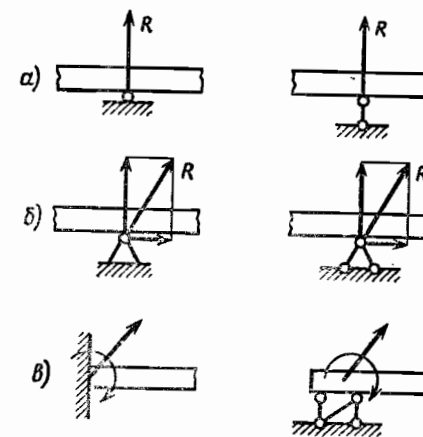


Рис. 4. Опорные закрепления стержня: а — шарнирная подвижная опора; б — шарнирная неподвижная опора; в — заделка

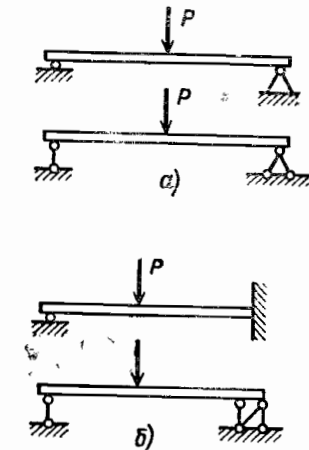


Рис. 5. Примеры закрепления балок

Условия закрепления. Балку считают закрепленной *статически определенным способом*, если силы (реакции) и моменты (реактивные моменты) в местах закрепления могут быть определены из *условия равновесия*. Для плоской системы сил имеются три условия равновесия, поэтому опоры балки при статически определенном ее закреплении не должны создавать более трех неизвестных силовых факторов.

Типичные случаи опорного закрепления стержня (балки) показаны на рис. 4. *Шарнирная подвижная опора* может передать вертикальное усилие, *шарнирная неподвижная опора* — вертикальное и горизонтальное усилия, а также момент.

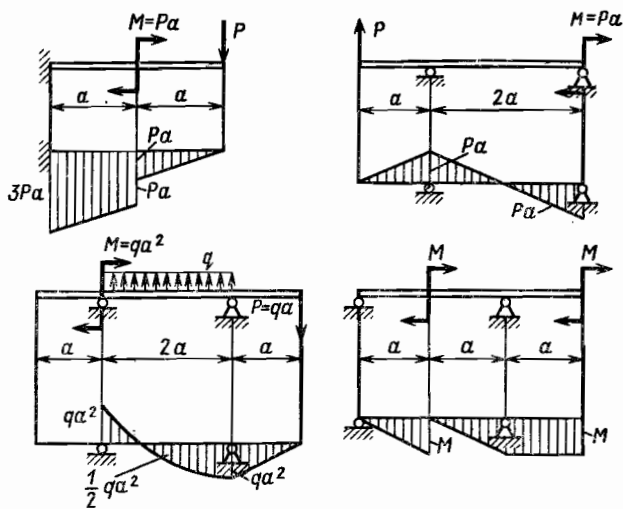


Рис. 6. Эпюры изгибающих моментов

Следовательно, балки, показанные на рис. 5, а, являются статически определимыми, а на рис. 5, б — статически неопределимыми. Как правило, использование статически неопределимого закрепления следует избегать.

Эпюры изгибающих моментов. Эпюры представляют собой графическое изображение распределения изгибающих моментов по длине балки (рис. 6).

Эпюры обладают следующими свойствами:

а) если к балке приложены сосредоточенные силы или моменты, то эпюра состоит только из прямолинейных участков;

б) в сечении, где приложен внешний момент, эпюра изгибающих моментов имеет скачок, равный по величине приложенному моменту.

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

В основе технической теории изгиба лежит гипотеза плоских сечений: *точки поперечного сечения после деформации лежат в одной плоскости*. Принятая гипотеза подтверждается экспериментом.

Относительные удлинения волокон при изгибе. Рассмотрим плоский изгиб стержня. Выбранная система координат показана на рис. 7. Ось \$z\$ направлена вдоль оси стержня, ось \$y\$ лежит в плоскости изгиба, точка \$O\$ совпадает с центром тяжести сечения.

В силу гипотезы плоских сечений можно считать, что сечение стержня получает поворот вокруг оси \$x\$ на угол \$\varphi\$ и осевое смещение \$w_0\$ вместе с началом координат (точкой \$O\$). Величины \$\varphi\$ и \$w_0\$ изменяются по длине стержня.

Удлинение волокна стержня, находящегося на расстоянии \$y\$ от плоскости \$xz\$ (рис. 8), будет

$$\epsilon = \frac{A^*B^* - AB}{AB}$$

Длина отрезка \$AB\$ равна \$dz\$. Отрезок \$A^*B^* = dz + w_0 + dw_0 - y(\varphi + d\varphi) - w_0 + yd\varphi = dz + dw_0 - yd\varphi\$. Следовательно,

$$\epsilon = \frac{dw_0}{dz} - y \frac{d\varphi}{dz} = \epsilon_0 - y \frac{d\varphi}{dz}, \tag{2}$$

где \$\epsilon_0\$ — удлинение волокна стержня, совпадающего с осью \$z\$.

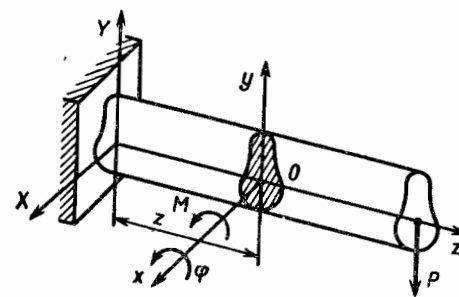


Рис. 7. Изгиб стержня

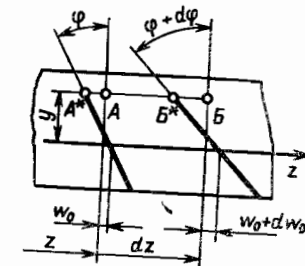


Рис. 8. Деформации при изгибе

Для упрощения вывода не рассматривались смещения сечений по оси \$y\$ (вертикальные прогибы), так как они (в пределах малых деформаций) не влияют на удлинение отрезка \$AB\$.

Нормальные напряжения при изгибе. В соответствии с законом упругости

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \tag{3}$$

где \$\sigma\$ — напряжение в плоскости поперечного сечения стержня (напряжение вдоль волокон); \$E\$ — модуль упругости материала.

Напряжениями, действующими на боковые поверхности волокон, пренебрегаем. Из уравнений (2) и (3) следует

$$\sigma = E \left(\epsilon_0 - y \frac{d\varphi}{dz} \right). \tag{4}$$

Так как внешняя сила вдоль оси \$z\$ отсутствует, то из условия равновесия (рис. 9) следует

$$\int_F \sigma dF = 0,$$

где интеграл распространяется на всю площадь поперечного сечения.

Подставляя значение \$\sigma\$ из равенства (4) и предполагая модуль упругости постоянным, найдем

$$E \int_F \left(\epsilon_0 - y \frac{d\varphi}{dz} \right) dF = 0.$$

Так как \$\int_F y dF = 0\$, как статический момент относительно прямой, проходящей через центр тяжести, то \$\epsilon_0 = 0\$.

Момент, создаваемый напряжениями \$\sigma\$, должен быть равен

$$\int_F \sigma y dF = -M_x.$$

Направление момента \$M_x\$ показано на рис. 9. Подставляя значение из равенства (4) и учитывая, что \$\epsilon_0 = 0\$, находим

$$E \frac{d\varphi}{dz} \int_F y^2 dF = M_x.$$

Величину

$$\int_F y^2 dF = J_x \tag{5}$$

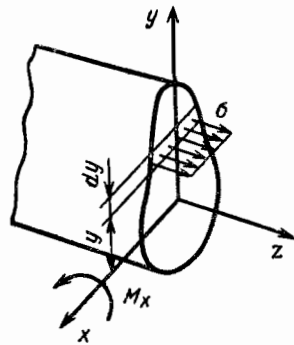


Рис. 9. Напряжения изгиба

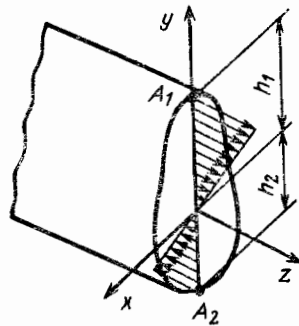


Рис. 10. Распределение напряжений изгиба по сечению

называют *моментом инерции сечения* относительно оси x . Следовательно,

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (6)$$

Внося это значение в равенство (4), получаем основную расчетную формулу

$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x} y \quad (7)$$

Знак минус в формуле (7) необходим для согласования правила знаков, принятых для момента M_x (положительно направленный момент вызывает сжатие в верхних волокнах), для напряжения σ (положительная величина соответствует растяжению) и величины y (положительное направление принято вертикально вверх).

В точках плоскости xz (для этих точек $y = 0$) напряжение изгиба отсутствует и эту плоскость называют *нейтральной*. Ось x , проходящую через центр тяжести сечения и перпендикулярную к плоскости изгиба, называют *нейтральной линией*.

Распределение напряжений изгиба по поперечному сечению вдоль прямой A_1A_2 показано на рис. 10. При изгибе часть волокон растягивается, а часть сжимается. В точках, одинаково удаленных от нейтральной линии (оси x), напряжения одинаковы.

Наибольшие напряжения действуют в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (точки A_1 и A_2). Напряжения изгиба в этих точках

$$\sigma_{A_1} = -\frac{M_x}{J_x} h_1; \quad \sigma_{A_2} = \frac{M_x}{J_x} h_2 \quad (8)$$

Очень часто пользуются понятием *момента сопротивления*. Если точка сечения, например точка A , находится на расстоянии y от оси, то момент сопротивления в этой точке

$$W_A = \frac{J_x}{y}$$

Иногда под моментом сопротивления понимают наименьшую величину W для сечения:

$$W = \frac{J_x}{h_{\max}}$$

где h_{\max} — расстояние наиболее удаленного волокна от нейтральной линии.

Формулы для J_x и W некоторых сечений приведены в табл. 1.

Формула (7) справедлива и для стержня переменного сечения, если входящие в нее величины относить к рассматриваемому сечению.

Нормальные напряжения в общем случае изгиба и растяжения стержня. В общем случае на стержень могут действовать изгибающие моменты M_x и M_y и растягивающее усилие N (рис. 11).

На основании гипотезы плоских сечений аналогично равенству (2)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - y \frac{d\varphi}{dz} + x \frac{d\psi}{dz} \quad (9)$$

где ε_0 — деформация, связанная с продольным перемещением сечения; φ и ψ — углы поворота сечения стержня относительно осей x и y соответственно.

Если учесть температурные деформации, то на основании закона упругости

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha T \quad (10)$$

где T — температура в данной точке сечения; α — коэффициент линейного расширения.

Вследствие неравномерного нагрева модуль упругости материала E может быть различным в разных точках сечения.

Равенство (10) запишем в форме

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha T) = E\left(\varepsilon_0 - y \frac{d\varphi}{dz} + x \frac{d\psi}{dz} - \alpha T\right) \quad (11)$$

Деформацию в стержне характеризуют три параметра: ε_0 , $\frac{d\varphi}{dz}$ и $\frac{d\psi}{dz}$. Для их определения воспользуемся условиями равновесия

$$\int_F \sigma dF = N; \quad \int_F \sigma x dF = M_y; \quad \int_F \sigma y dF = -M_x \quad (12)$$

В этих равенствах интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения F .

Внося в последние зависимости соотношение (11), получим

$$\varepsilon_0 \int_F E dF - \frac{d\varphi}{dz} \int_F yE dF + \frac{d\psi}{dz} \int_F xE dF - \int_F \alpha TE dF = N; \quad (13)$$

$$\varepsilon_0 \int_F xE dF - \frac{d\varphi}{dz} \int_F xyE dF + \frac{d\psi}{dz} \int_F x^2E dF - \int_F x\alpha TE dF = M_y; \quad (14)$$

$$\varepsilon_0 \int_F yE dF - \frac{d\varphi}{dz} \int_F y^2E dF + \frac{d\psi}{dz} \int_F yxE dF - \int_F y\alpha TE dF = -M_x \quad (15)$$

Эти уравнения можно упростить соответствующим выбором осей x и y . Выберем положение начала системы координат (точку O) так, чтобы удовлетворялись равенства

$$\int_F xE dF = 0; \quad \int_F yE dF = 0 \quad (16)$$

1. Формулы для определения моментов инерции и моментов сопротивления

Сечение	J_x	W
	$\frac{bH^3}{12}$	$\frac{bH^2}{6}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3$
	$\frac{\pi d \delta^3}{8}$	$\frac{\pi d \delta^2}{4}$

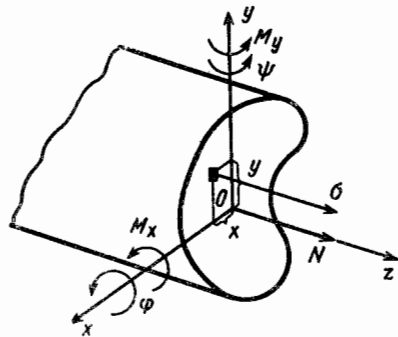


Рис. 11. Общий случай изгиба и растяжения стержня

дают с обычными главными осями. Способ определения приведенных главных осей сечения описан ниже.

С учетом условий (16) и (17) из уравнений (13), (14) и (15) получим

$$\epsilon_0 = \frac{N}{\int_F E dF} + \frac{\int_F \alpha T E dF}{\int_F E dF}; \quad (18)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x}{\int_F y^2 E dF} - \frac{\int_F y \alpha T E dF}{\int_F y^2 E dF}; \quad (19)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{M_y}{\int_F x^2 E dF} + \frac{\int_F x \alpha T E dF}{\int_F x^2 E dF}. \quad (20)$$

Внося значения ϵ_0 , $\frac{d\varphi}{dz}$ и $\frac{d\psi}{dz}$ в уравнение (11), получим окончательную формулу для напряжений в стержне

$$\sigma = E \left(\frac{N}{\int_F E dF} - y \frac{M_x}{\int_F y^2 E dF} + x \frac{M_y}{\int_F x^2 E dF} \right) + E \left(\frac{\int_F \alpha T E dF}{\int_F E dF} + y \frac{\int_F y \alpha T E dF}{\int_F y^2 E dF} + x \frac{\int_F x \alpha T E dF}{\int_F x^2 E dF} - \alpha T \right). \quad (21)$$

Первая группа членов в этой формуле выражает напряжения в стержне от внешних сил, вторая — температурные напряжения

Если модуль упругости во всех точках сечения одинаков, то из равенства (21) вытекает

$$\sigma = \frac{N}{F} - y \frac{M_x}{J_x} + x \frac{M_y}{J_y} + E \left(\frac{\int_F \alpha T dF}{F} + y \frac{\int_F y \alpha T dF}{J_x} + x \frac{\int_F x \alpha T dF}{J_y} - \alpha T \right), \quad (22)$$

где J_x и J_y — главные моменты инерции сечения.

В этом случае точку O называют *приведенным центром тяжести сечения*. Если модуль упругости во всех точках сечения одинаковый, то приведенный центр тяжести совпадает с обычным.

После того как положение начала координат стало определенным, повернем оси x, y в плоскости сечения так, чтобы удовлетворялось равенство

$$\int_F xy E dF = 0. \quad (17)$$

Оси координат, удовлетворяющие условиям (16) и (17), называют *приведенными главными осями сечения*. Для постоянного модуля упругости во всех точках сечения приведенные главные оси совпадают с обычными главными осями.

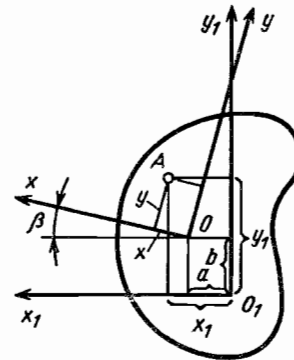


Рис. 12. Определение приведенных главных осей сечения

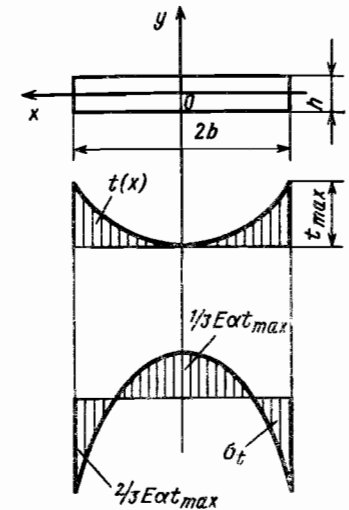


Рис. 13. Температурные напряжения в стержнях прямоугольного сечения

Если точки сечения стержня имеют одинаковую температуру, то из формул (21) и (22) вытекает, что температурные напряжения в рассматриваемом сечении отсутствуют. В этом случае напряжения в поперечном сечении стержня

$$\sigma = \frac{N}{F} - y \frac{M_x}{J_x} + x \frac{M_y}{J_y}. \quad (23)$$

Из этой формулы вытекает возможность отдельного определения напряжений растяжения (сжатия) и напряжений изгиба (второй и третий член в формуле), которые, в свою очередь, можно определять отдельно относительно каждой из главных осей сечения.

Определение приведенных главных осей сечения. Используем произвольную вспомогательную систему координат $x_1 y_1$ (рис. 12).

Координаты приведенного центра тяжести сечения O :

$$a = \frac{\int_F x_1 E dF}{\int_F E dF}; \quad b = \frac{\int_F y_1 E dF}{\int_F E dF}. \quad (24)$$

Угол поворота приведенных главных осей x и y :

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{2 \int_F x_1 y_1 E dF}{\int_F x_1^2 E dF - \int_F y_1^2 E dF}. \quad (25)$$

Определение приведенных главных осей и центра тяжести не отличается от обычного способа, если только элементу площади условно приписать «вес» E . Отсюда следует, что приведенный центр тяжести будет смещаться относительно обычного в сторону, где модуль упругости материала больше.

Пример Определить температурные напряжения в стержне прямоугольного сечения (рис. 13) Температура распределяется по параболическому закону

$$T(x) = T_{\max} \frac{x^2}{b^2}$$

По толщине стержня температура постоянна. Предполагаем, что модуль упругости E и коэффициент линейного расширения α постоянны. Из формулы (22) находим

$$\sigma = E\alpha T_{\max} \left[\frac{1}{3} - \frac{x^2}{b^2} \right].$$

В центре стержня

$$\sigma(0) = \frac{1}{3} E\alpha T_{\max},$$

в крайних точках

$$\sigma(b) = \sigma(-b) = -\frac{2}{3} E\alpha T_{\max}.$$

Для стержня из жаропрочного сплава при $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см², $\alpha = 16 \cdot 10^{-6}$ 1/°C, $T_{\max} = 200$ °C находим

$$\sigma(0) = 2430 \text{ кгс/см}^2; \quad \sigma(b) = -4620 \text{ кгс/см}^2.$$

Касательные напряжения при изгибе. Если изгиб создается поперечными силами, то в сечении стержня будут действовать касательные напряжения, уравновешивающие перерезывающую силу.

Влияние касательных напряжений на прочность и жесткость существенно только для коротких стержней, высота сечения которых составляет не менее 1/3 его длины.

При определении касательных напряжений считают, что они не влияют на величину нормальных напряжений изгиба. Это позволяет определять касательные напряжения из условия равновесия.

Рассмотрим равновесие части элемента стержня длиной dz (рис. 14).

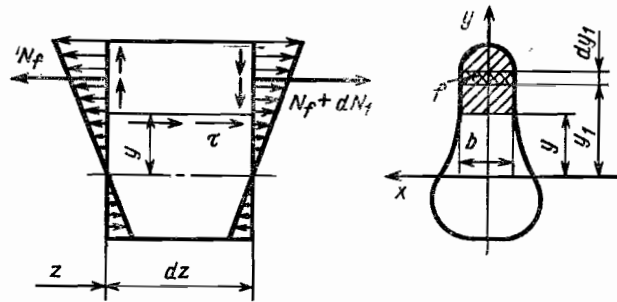


Рис. 14. Равновесие элемента стержня

Нормальная сила, действующая на рассматриваемую (заштрихованную) часть сечения, площадь которой составляет l ,

$$N_f = \int \sigma \, d f.$$

Эта сила изменяется по длине стержня вследствие изменения величины σ . Приращение силы N_f должно уравновешиваться касательными напряжениями на горизонтальной площадке $dz b$. Таким образом,

$$dN_f = - dz b \tau,$$

или

$$\tau = -\frac{1}{b} \frac{dN_f}{dz}. \quad (26)$$

Вследствие парности касательных напряжений такие же напряжения будут действовать в соответствующих точках поперечного сечения. Нормальное напряжение в слое на расстоянии y_1 от нейтральной оси

$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x} y_1;$$

тогда

$$N_f = \int \sigma \, d f = -\frac{M_x}{J_x} \int y_1 \, d f = -\frac{M_x S_f}{J_x}. \quad (27)$$

Величина $\int y_1 \, d f = S_f$ — статический момент отсеченной части сечения. Далее находим

$$\frac{dN_f}{dz} = -\frac{dM_x}{dz} \frac{S_f}{J_x} = -Q \frac{S_f}{J_x},$$

где Q — перерезывающая сила в сечении.

В соответствии с равенством (26) получаем формулу для касательных напряжений в стержне

$$\tau = \frac{Q S_f}{b J_x}. \quad (28)$$

Равнодействующая касательных напряжений равна перерезывающей силе.

Для касательных напряжений в стержне прямоугольного сечения (рис. 15),

$$S_f = \int_y^{\frac{H}{2}} b y_1 \, d y_1 = \frac{1}{2} b \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right); \quad J_x = \frac{b H^3}{12}.$$

Из формулы (28) получаем

$$\tau = \frac{Q}{b H} \left(\frac{3}{2} - 6 \frac{y^2}{H^2} \right).$$

Распределение напряжений показано на рис. 15. Наибольшее напряжение имеет место при $y = 0$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b H} = \frac{3}{2} \tau_{\text{ср}},$$

где $\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{F}$ — среднее касательное напряжение.

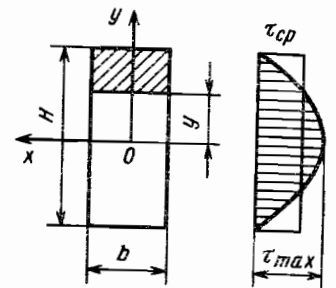


Рис. 15. Распределение касательных напряжений при изгибе стержня прямоугольного сечения

УПРУГАЯ ЛИНИЯ СТЕРЖНЯ

Уравнение упругой линии. Ось стержня в изогнутом состоянии называют *упругой линией*. В пределах малых деформаций угол поворота сечения φ (рис. 16), если пренебречь деформацией сдвига,

$$\varphi = \frac{d y}{d z}.$$

В соответствии с равенством (6)

$$\frac{d \varphi}{d z} = \frac{M(z)}{E J_x(z)},$$

где $M(z)$ — изгибающий момент в сечении (рис. 17, а).

Далее имеем

$$\frac{d^2 y}{d z^2} = \frac{M(z)}{E J_x(z)}. \quad (29)$$

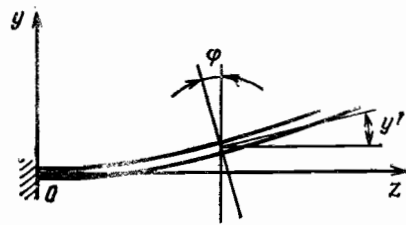


Рис. 16. Связь между углом поворота сечения и $y(z)$

Выражение (29) представляет собой дифференциальное уравнение упругой линии стержня. Оно справедливо и для стержней переменного сечения. Иногда уравнение упругой линии используют в другой форме:

$$EJ_x(z) \frac{d^2y}{dz^2} = M(z),$$

из уравнения (29) дифференцируя по z

$$\frac{d}{dz} \left(EJ_x(z) \frac{d^2y}{dz^2} \right) = \frac{dM(z)}{dz} = Q(z),$$

где $Q(z)$ — перерезывающая сила в сечении.

Повторив дифференцирование, получаем вторую форму дифференциального уравнения упругой линии

$$\frac{d^3}{dz^3} \left(EJ_x(z) \frac{d^2y}{dz^2} \right) = q(z), \tag{30}$$

где $q(z)$ — нагрузка на единицу длины стержня.

Уравнение упругой линии с учетом влияния перерезывающей силы. Если учесть деформацию сдвига (рис. 17, б), то угол поворота сечения

$$\varphi = \frac{dy}{dz} + \gamma, \tag{31}$$

где γ — деформация сдвига, пропорциональная величине перерезывающей силы в сечении;

$$\gamma = k \frac{Q(z)}{GF(z)}, \tag{32}$$

здесь k — безразмерный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения; G — модуль сдвига; $F(z)$ — площадь поперечного сечения.

Из энергетических расчетов

$$k = \frac{F}{J_x^2} \int_F \frac{S_f^2 dF}{b^2} \tag{33}$$

[см. обозначения к формуле (27)]. Для стержня прямоугольного сечения $k = \frac{6}{5}$, для

сплошного круглого сечения $k = \frac{10}{9}$, для тонкостенной трубы $k = 2$.

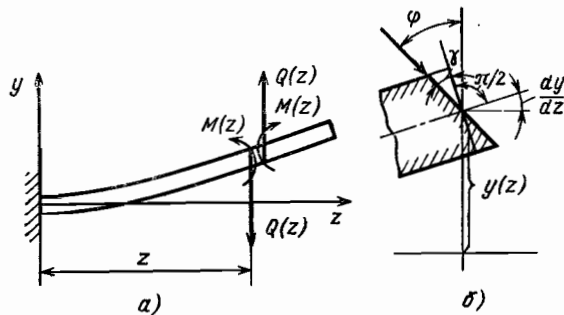


Рис. 17. К выводу уравнения упругой линии с учетом деформации сдвига

Из равенств (31) и (32) находим

$$\frac{dy}{dz} = \varphi - k \frac{Q(z)}{GF(z)}.$$

Дифференцируя с учетом зависимости (6) и влияния перерезывающей силы, получаем дифференциальное уравнение упругой линии:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_x(z)} - k \frac{d}{dz} \left(\frac{Q(z)}{GF(z)} \right). \tag{34}$$

Влияние перерезывающей силы на прогибы стержня учитывают в том случае, когда высота сечения соизмерима с его длиной (см. примеры).

Уравнение упругой линии в интегральной форме. Интегрируя обе части равенства (34) от 0 до z , найдем

$$\frac{dy}{dz}(z) = \int_0^z \frac{M(z_1)}{EJ_x(z_1)} dz_1 - k \frac{Q(z)}{GF(z)} + k \frac{Q(0)}{GF(0)} + \frac{dy}{dz}(0). \tag{35}$$

Повторяя интегрирование, получим

$$y(z) = \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{M(z_2)}{EJ_x(z_2)} dz_2 dz_1 - \int_0^z \frac{kQ(z_1)}{GF(z_1)} dz_1 + \frac{kQ(0)}{GF(0)} z + \frac{dy}{dz}(0) z + y(0). \tag{36}$$

В формулах (35) и (36) переменные интегрирования обозначены z_1 и z_2 . Неизвестные параметры $\frac{dy}{dz}(0)$ и $y(0)$ определяют из условий закрепления. Если пренебречь влиянием перерезывающей силы на прогиб, положив $GF \rightarrow \infty$, то

$$y(z) = \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{M(z_2)}{EJ_x(z_2)} dz_2 dz_1 + \frac{dy}{dz}(0) z + y(0). \tag{37}$$

Уравнение для дополнительного прогиба стержня от сдвига можно получить из формулы (36), положив $EJ_x \rightarrow \infty$.

Тогда

$$y_{сд}(z) = - \int_0^z \frac{kQ(z_1)}{GF(z_1)} dz_1 + \frac{kQ(0)}{GF(0)} z + \frac{dy_{сд}}{dz}(0) z + y_{сд}(0). \tag{38}$$

Но так как

$$\frac{dy_{сд}}{dz}(0) = -k \frac{Q(0)}{GF(0)},$$

то в окончательном виде

$$y_{сд}(z) = - \int_0^z \frac{kQ(z_1)}{GF(z_1)} dz_1 + y_{сд}(0). \tag{39}$$

Пример. Определить прогибы консоли постоянного сечения под действием сосредоточенной силы P (рис.18). Изгибающий момент в сечении

$$M(z) = -P(l-z).$$

Перерезывающая сила

$$Q(z) = P.$$

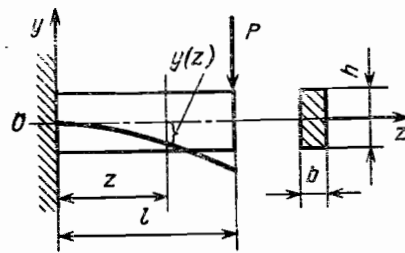


Рис. 18. Изгиб консольного стержня

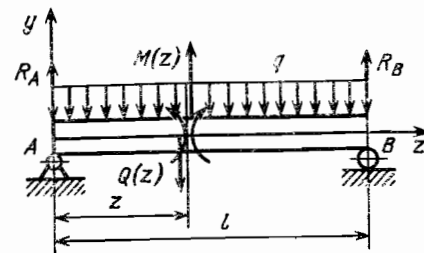


Рис. 19. Изгиб стержня на двухшарнирных опорах

Прогиб от действия изгибающих моментов находим по формуле (37) при $\frac{dy}{dz}(0) = 0, y(0) = 0$:

$$y(z) = - \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{P(l-z_2)}{EJ} dz_2 dz_1 = - \frac{P}{EJ} \int_0^z \left(lz_1 - \frac{z_1^2}{2} \right) dz_1 = - \frac{P}{EJ} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right).$$

Прогиб на конце консоли

$$y(l) = - \frac{Pl^3}{3EJ} = - \frac{4Pl^3}{Ebh^3}.$$

Прогиб от действия перерезывающей силы определяем с помощью равенства (39). При $y_{сд}(0) = 0$

$$y_{сд}(z) = - \frac{kP}{GF} z.$$

Прогиб на конце консоли

$$y_{сд}(l) = - \frac{kP}{GF} l = - \frac{kPl}{Gb h^2}.$$

Отношение

$$\frac{y_{сд}(l)}{y(l)} = \frac{kE}{4G} \frac{h^2}{l^2} = \frac{k(1+\nu)}{2} \frac{h^2}{l^2},$$

так как $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, где ν — коэффициент Пуассона.
При $h = l, \nu = 0,3$

$$\frac{y_{сд}(l)}{y(l)} = \frac{6(1+\nu)}{5 \cdot 2} = 0,78.$$

Пример. Определить прогибы балки постоянного сечения под действием распределенной нагрузки (рис. 19).

В опорах балки действуют реактивные усилия

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Перерезывающая сила

$$Q(z) = \frac{ql}{2} - qz.$$

Изгибающий момент

$$M(z) = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

Прогиб от действия изгибающего момента по формуле (37)

$$y(z) = \frac{q}{2EJ} \int_0^z \int_0^{z_1} (lz_2 - z_2^2) dz_2 dz_1 + \frac{dy}{dz}(0) z = \frac{q}{2EJ} \int_0^z \left(\frac{lz_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) dz_1 + \frac{dy}{dz}(0) z = \frac{q}{2EJ} \left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right) + \frac{dy}{dz}(0) z.$$

Из условия $y(l) = 0$ находим

$$\frac{dy}{dz}(0) = - \frac{ql^3}{24EJ}.$$

Таким образом,

$$y(z) = \frac{q}{2EJ} \left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right) - \frac{ql^3}{24EJ} z.$$

Наибольший прогиб будет при $z = \frac{l}{2}$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = - \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Прогиб от действия перерезывающей силы [формула (39)]

$$y_{сд}(z) = - \frac{k}{GF} \int_0^z \left(\frac{ql}{2} - qz_1 \right) dz_1 = - \frac{k}{GF} \frac{q}{2} (lz - z^2).$$

Наибольший прогиб

$$y_{сд}\left(\frac{l}{2}\right) = - \frac{kql^2}{8GF}.$$

Отношение максимальных прогибов

$$\frac{y_{сд}\left(\frac{l}{2}\right)}{y\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{384}{40} \frac{E}{G} k \frac{J}{Fl^2}.$$

Если балка представляет собой тонкостенную трубу с диаметром d и толщиной стенки δ , то

$$k = 2; \quad J = \frac{\pi \delta d^3}{8}; \quad F = \pi d \delta; \quad \frac{y_{сд}\left(\frac{l}{2}\right)}{y\left(\frac{l}{2}\right)} = 6,24 \frac{d^2}{l^2}.$$

Определение прогибов стержней с помощью непосредственного интегрирования уравнения упругой линии [формулы (37) и (39)] удобно применять в простейших случаях и для стержней переменного сечения. В последнем случае интегралы целесообразно вычислять приближенно по правилу трапеций. Учет влияния перерезывающих сил на прогиб необходим при учете податливости зубьев зубчатых колес, витков резьбы, шлицев, когда размеры поперечного сечения соизмеримы с длиной.

Для стержней постоянного сечения при действии сосредоточенных сил моментов, равномерно распределенных нагрузок разработаны специальные методы интегрирования уравнения упругой линии, однако во многих случаях более просто использовать интеграл Мора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА МОРА

Вывод основной формулы. Определение прогибов. Пусть к балке в точке $z = a$ (рис. 20) приложена сила P , величина которой равна единице (единичная сила). Если сообщить балке некоторый дополнительный прогиб y , то работа внешней силы $[y(a) \cdot 1]$ будет равна работе внутренних сил упругости.

Обозначим *изгибающий момент в сечении стержня от действия единичной силы $M_1(z)$* . Пусть $d\varphi$ — относительный поворот двух близких сечений, возникший в результате дополнительного прогиба y балки. Тогда работа внутренних сил (работа деформации, рис. 21)

$$A_{вн} = \int_0^l M_1(z) d\varphi = \int_0^l M_1(z) \frac{d\varphi}{dz} dz.$$

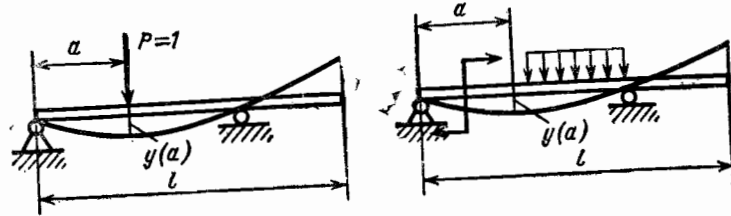


Рис. 20. К выводу интеграла Мора

Приравнявая работы внешних и внутренних сил, получаем

$$y(a) \cdot 1 = \int_0^l M_1(z) \frac{d\varphi}{dz} dz. \quad (40)$$

Уравнение (40) должно быть справедливым для произвольного (малого) прогиба стержня.

Предположим теперь, что в качестве y рассматривается прогиб от внешней нагрузки.

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M(z)}{EJ_x(z)},$$

где $M(z)$ — изгибающий момент в сечении от действия внешней нагрузки.

Подставляя отсюда значение $\frac{d\varphi}{dz}$ в соотношение (40), получаем основную расчетную формулу (интеграл Мора)

$$y(a) = \int_0^l \frac{M_1(z) M(z)}{EJ_x(z)} dz. \quad (41)$$

Следовательно, чтобы найти прогиб в данном сечении стержня, надо приложить единичную силу в этом сечении, определить изгибающий момент $M_1(z)$ от единичной силы и вычислить интеграл (41).

Размерность величины $M_1(z)$ кгс·см/кгс, так как в равенстве (41) сокращен множитель 1 кгс. Единичный силовой фактор при использовании интеграла Мора следует считать безразмерной величиной (момент от единичной силы имеет размерность см).

В большинстве практических задач интеграл Мора определяют с помощью правила Верещагина (см. ниже).

В общем случае интеграл Мора может быть вычислен по правилу трапеций. Равенство (41) справедливо и для упругопластических деформаций, если соответствующим образом определить $\frac{d\varphi}{dz}$.

Если требуется учесть влияние перерезывающей силы на прогиб, то уравнение (40) будет иметь вид

$$y(a) = \int_0^l M_1(z) \frac{d\varphi}{dz} dz + \int_0^l Q_1(z) \gamma dz. \quad (42)$$

где $\gamma = k \frac{Q(z)}{GF(z)}$ — угол сдвига [см. формулу (32)]; $Q_1(z)$ — перерезывающая сила в сечении от действия единичной силы.

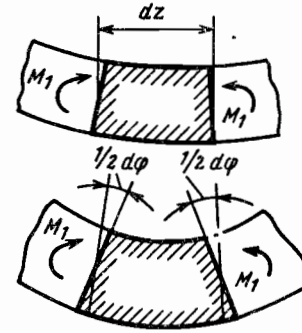


Рис. 21. Работа внутренних силовых факторов

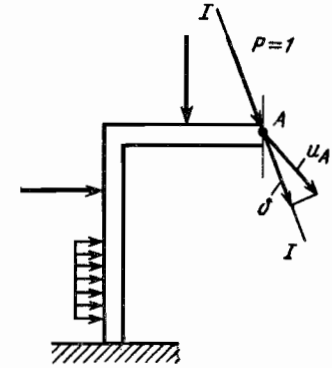


Рис. 22. Изгиб Г-образного стержня

Вместо равенства (41) будем иметь

$$y(a) = \int_0^l \frac{M_1(z) M(z)}{EJ_x(z)} dz + \int_0^l k \frac{Q_1(z) Q(z)}{GF(z)} dz. \quad (43)$$

Второй член в этой формуле выражает прогиб от действия перерезывающей силы. Преимущества определения перемещений с помощью интеграла Мора особенно сказываются для стержней с непрямолинейной осью. Пусть, например, требуется найти проекцию перемещения точки A (рис. 22) на направление $I-I$, причем следует учесть влияние изгибающих моментов, перерезывающих и нормальных сил.

Повторяя предыдущие рассуждения, найдем проекцию перемещения точки приложения единичной силы на ее направление:

$$\delta = \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ} ds + k \int_0^l \frac{Q_1 Q}{GF} ds + \int_0^l \frac{N_1 N}{EF} ds, \quad (44)$$

где M_1 , Q_1 и N_1 — изгибающий момент, перерезывающая и нормальная силы в сечении стержня от действия единичной силы; M , Q и N — те же силовые факторы в поперечном сечении от действия внешних сил.

Интегрирование распространяется на всю длину оси стержня, элемент длины обозначается ds .

Определение углов поворота. Формула для определения углов поворота выводится так же, как соотношение (44). В сечении, где определяют угол поворота, прикладывают единичный момент (рис. 23). Работа момента будет $\varphi(a) \cdot 1$.

В соответствии с этим

$$\varphi(a) = \int_0^l \frac{M_1(z) M(z)}{EJ_x(z)} dz. \quad (45)$$

В этом равенстве $M_1(z)$ — изгибающий момент в сечении стержня от действия единичного момента.

Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина. Изгибающий момент от внешней нагрузки и изгибающий момент от единичной силы (момента) определяют по одному правилу знаков (например, момент считают положительным, если он создает сжатие верхнего волокна).

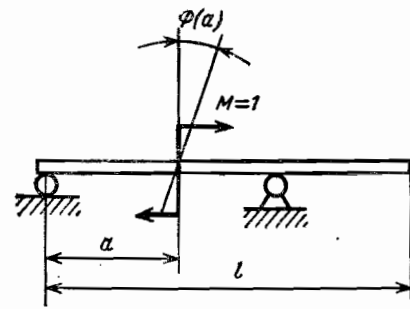


Рис. 23. Работа единичного момента

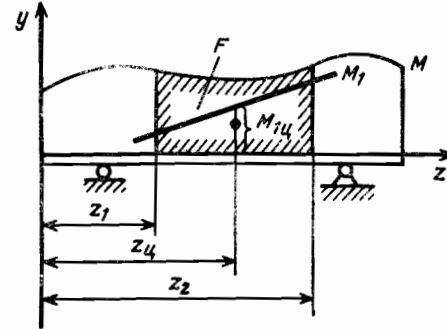


Рис. 24. К выводу правила Верещагина

Если при вычислении интеграла (41) или (45) получается отрицательная величина, это означает, что действительный прогиб или угол поворота сечения направлен в сторону, противоположную направлению соответственно единичной силы или единичного момента.

Эпюра изгибающих моментов от единичной силы или единичного момента состоит из отрезков прямых. Рассмотрим участок стержня в пределах от z_1 до z_2 (рис. 24).

Предположим, что изгибающий момент от единичной нагрузки выражается равенством

$$M_1(z) = Az + B, \tag{46}$$

где A и B — некоторые числа. Тогда интеграл Мора на рассматриваемом участке

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{M_1(z) M(z)}{EJ_x(z)} dz = \int_{z_1}^{z_2} (Az + B) \frac{M(z)}{EJ_x(z)} dz.$$

Предположим, что жесткость стержня на изгиб в пределах участка постоянна и учтем, что

$$\int_{z_1}^{z_2} M(z) dz = F,$$

где F — площадь эпюры изгибающих моментов от внешних сил. Тогда

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{M_1(z) M(z)}{EJ_x(z)} dz = \frac{1}{EJ_x} \left[A \int_{z_1}^{z_2} z M(z) dz + BF \right]. \tag{47}$$

Далее следует принять во внимание, что

$$\int_{z_1}^{z_2} z M(z) dz = z_u F, \tag{48}$$

так как интеграл представляет собой статический момент площади F , а z_u — абсцисса центра тяжести площади F .

Формула (48) справедлива в том случае, когда величина F имеет постоянный знак в пределах участка.

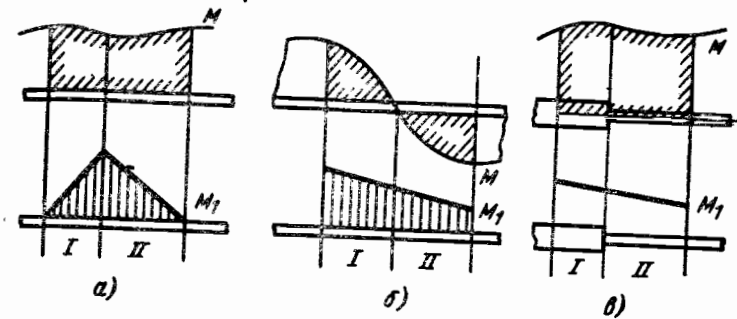


Рис. 25. Ограничения для применения правила Верещагина

Используя соотношение (48), получим из равенства (47)

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{M_1(z) M(z)}{EJ_x(z)} dz = \frac{F}{EJ_x} (Az_u + B) = \frac{FM_{1u}}{EJ_x}, \tag{49}$$

где M_{1u} — момент от единичной нагрузки в сечении z_u .

Следовательно, интеграл Мора в пределах участка равен произведению площади эпюры моментов от внешних сил на ординату эпюры от единичной нагрузки в сечении, соответствующем центру тяжести этой площади, деленному на жесткость стержня на изгиб (правило Верещагина).

Ограничения для применения правила Верещагина. 1. Эпюра изгибающего момента от единичной нагрузки должна быть в виде одной прямой линии. На рис. 25, а показан случай, когда это условие не соблюдается. Интеграл необходимо вычислять отдельно для участков I и II.

2. Изгибающий момент от внешней нагрузки в пределах участка должен иметь один знак. На рис. 25, б показан случай, когда правило Верещагина следует применять для каждого из двух участков в отдельности.

Ограничение не распространяется на момент от единичной нагрузки.

3. Жесткость стержня на изгиб в пределах участка должна быть постоянна. На рис. 25, в приведен случай, когда интеграл нужно вычислять отдельно для участков I и II. Вспомогательные данные для применения правила Верещагина приведены в табл. 2.

Если эпюра от внешних силовых факторов на данном участке является линейной (например, при действии сосредоточенных сил и моментов), то равенство (46)

2. Площадь и положение центра тяжести эпюр

Эпюра	Площадь	Абсцисса центра тяжести
	Ml	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}Ml$	$\frac{1}{3}l$
	$\frac{1}{3}Ml$	$\frac{1}{4}l$

можно использовать для момента $M(z)$ и тогда, повторяя вывод, найдем

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{M_1(z) M(z)}{EJ_x(z)} dz = \frac{F_1 M_{II}}{EJ_x} \quad (50)$$

где F_1 — площадь эпюры моментов от единичной нагрузки; M_{II} — ордината эпюры моментов от внешних нагрузок в сечении, соответствующем центру тяжести площади эпюры моментов от единичной нагрузки. Все ограничения, указанные выше для формулы (49), соответствующим образом переносятся на формулу (50).

ПРОГИБЫ И УГЛЫ ПОВОРОТА В СТЕРЖНЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Если стержень имеет небольшое число участков с различной жесткостью, то при определении прогибов и углов поворота можно применять правило Верещагина.

Пример. Определить прогиб стержня в точке А (рис. 26). Вычисляя интеграл Мора для участков, находим

$$y = \frac{1}{EJ_1} \cdot \frac{1}{2} \frac{Pab}{a+b} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{EJ_2} \cdot \frac{1}{2} \frac{Pab}{a+b} \cdot b \cdot \frac{2}{3} \frac{ab}{a+b} = \frac{Pa^2b^2}{3EJ_1(a+b)^2} + \frac{Pa^2b^2}{3EJ_2(a+b)^2}$$

Если жесткости на изгиб участков I и II одинаковы:

$$EJ_1 = EJ_2 = EJ, \quad y = \frac{Pa^2b^2}{3EJ(a+b)^2}$$

Табличный метод расчета. При большом числе участков различной жесткости целесообразно применить табличный метод расчета непосредственно по формулам (41) и (45). Интеграл вычисляют приближенным методом по правилу трапеций. Последовательность расчета показана на следующем примере.

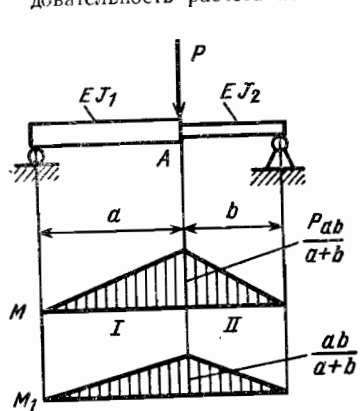


Рис. 26. Определение прогиба стержня переменного сечения

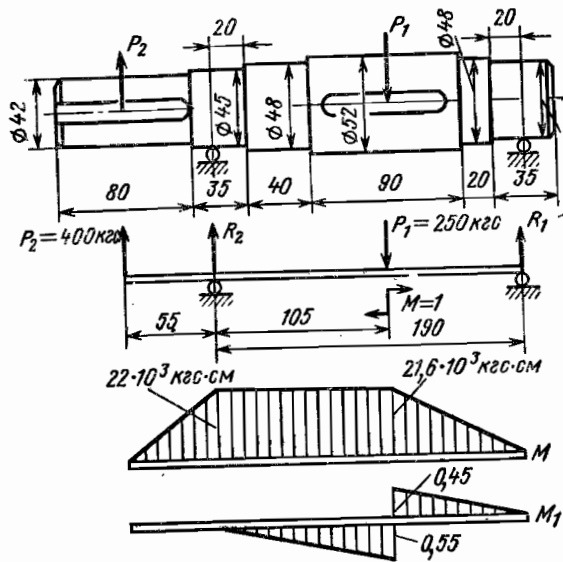


Рис. 27. Определение угла поворота стержня переменного сечения

Пример. Определить угол поворота вала в сечении А (в месте посадки зубчатого колеса). Размеры вала показаны на рис. 27. Усилыи $P_1 = 250$ кгс, $P_2 = 400$ кгс. Модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^4$ кгс/см².

Реакции определяем из условия равенства нулю моментов всех сил относительно левой опоры

$$R_1 = 250 \frac{105}{190} + 400 \frac{55}{190} = 254 \text{ кгс}; \quad R_2 = 396 \text{ кгс.}$$

Для расчета все расстояния между опорными сечениями делим на 10 равных участков длиной $\Delta = 1,9$ см каждый. Составляем расчетную таблицу (табл. 3).

3. Расчетная таблица для определения угла поворота сечения вала

Параметр	Значение параметров в сечениях										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z , см	0	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1	19,0
d , см	4,5	4,5	4,8	4,8	5,2	5,2	5,2	5,2	4,8	4,5	4,5
J_x , см ⁴	20,5	20,5	26,5	26,5	37,6	37,6	37,6	37,6	26,5	20,5	20,5
$M \cdot 10^{-3}$, кгс·см	22	21,9	21,8	21,7	21,6	21,6	19,2	14,4	9,6	4,8	0
M_1 , см	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$\frac{MM_1}{EJ} \cdot 10^4$	0	-0,51	-0,79	-1,17	-1,13	-1,37	0,97	0,55	0,34	0,11	0

Интеграл Мора по правилу трапеций будет иметь вид

$$\varphi = \int_0^l \frac{M(z) M_1(z)}{EJ(z)} dz = \Delta \left(\frac{M(0) M_1(0)}{2EJ(0)} + \sum_{i=1}^9 \frac{M(z_i) M_1(z_i)}{EJ(z_i)} + \frac{M(l) M_1(l)}{2EJ(l)} \right) = 1,9 (0 - 0,51 - 0,79 - 1,17 - 1,13 - 1,37 + 0,97 + 0,55 + 0,34 + 0,11 + 0) \cdot 10^{-4} = -5,7 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Угол поворота сечения

$$\varphi = -5,7 \cdot 10^{-4} \frac{360}{2\pi} = -0,2^\circ.$$

Знак минус означает, что угол поворота направлен в обратную сторону по отношению к единичному моменту.

ИЗГИБ СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В основе расчета лежит кривая деформирования (рис. 28), представляющая собой зависимость $\sigma = f(\epsilon)$, устанавливаемая из опытов на растяжение. Для конструкционных сталей эта зависимость имеет такой же вид и при сжатии.

Для расчета обычно используют схематизированную диаграмму деформирования, показанную на рис. 29.

Первая прямая соответствует упругим деформациям ($\tan \alpha = E$); вторая прямая проходит через точки, соответствующие пределу текучести и пределу прочности $\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_B - \sigma_T}{\epsilon_B - \epsilon_T}$. Угол наклона α_1 значительно меньше угла α ($\tan \alpha_1 \approx 0,01 \tan \alpha$), и для расчета вторая прямая иногда представляется горизонтальной линией, как показано на рис. 30 (кривая деформирования без упрочнения).

Наконец, если рассматриваются значительные пластические деформации, то участками кривых, соответствующих упругому деформированию, в практических расчетах можно пренебречь. Тогда схематизированные кривые деформирования имеют вид, показанный на рис. 31.

Распределение напряжений изгиба при упруго-пластических деформациях. Для упрощения задачи рассмотрим стержень прямоугольного сечения и предположим, что кривая деформирования не имеет упрочнения (см. рис. 30).

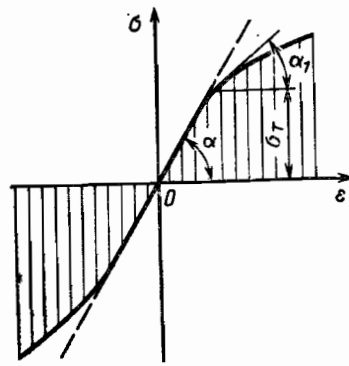


Рис. 28. Диаграмма деформирования

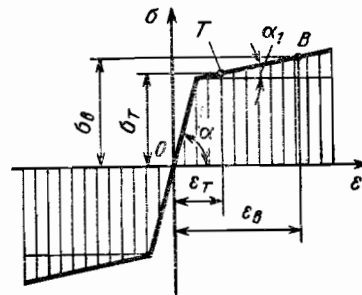


Рис. 29. Схематизированная кривая деформирования

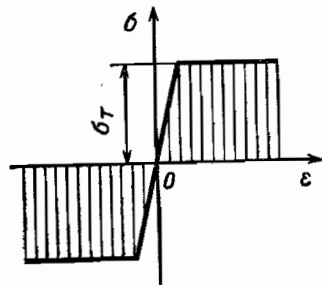


Рис. 30. Кривая деформирования без упрочнения

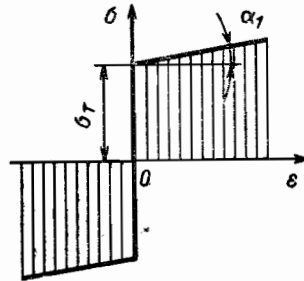


Рис. 31. Кривая деформирования при больших пластических деформациях

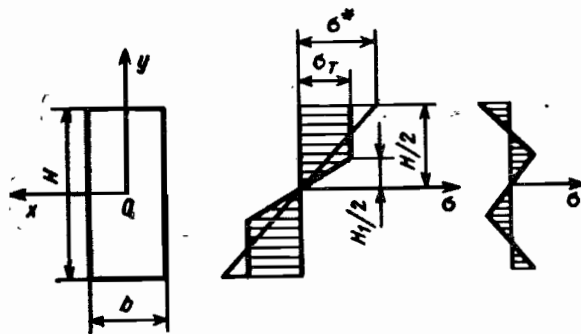


Рис. 32. Изгиб стержня прямоугольного сечения в упругопластической стадии

Если величина изгибающего момента такова, что наибольшее напряжение изгиба $\sigma \leq \sigma_T$ (рис. 32), то стержень работает в области упругой деформации

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{bH^2} \leq \sigma_T.$$

При дальнейшем возрастании изгибающего момента в крайних волокнах стержня возникают пластические деформации. Пусть при данном значении пла-

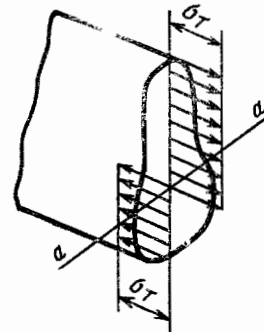


Рис. 33. Распределение напряжений при действии предельного пластического момента

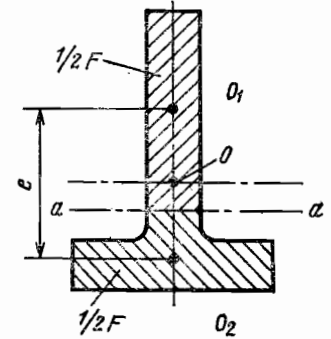


Рис. 34. К определению M_T

стическими деформациями охвачена область от $\frac{H_1}{2}$ до $\frac{H}{2}$ (рис. 32). В этой области $\sigma = \sigma_T$. При $y < \frac{H_1}{2}$ напряжения изменяются по линейному закону $\sigma = \sigma_T \frac{2y}{H_1}$.

Из условия равновесия момент внутренних сил

$$\sigma_T b \left(\frac{H^2}{4} - \frac{H_1^2}{4} \right) + \sigma_T \frac{bH_1^2}{6} = M,$$

откуда

$$H_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\sigma_T b}} \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_T b H^2 - M}. \quad (51)$$

Если бы материал оставался упругим при любых напряжениях, то наибольшее напряжение

$$\sigma^* = \frac{6M}{bH^2}$$

превышало предел текучести материала.

Напряжения при идеальной упругости материала показаны на рис. 32. С учетом пластической деформации напряжения, превосходящие предел текучести при расчете для идеально упругого тела, снижаются. Если эпюры распределения напряжений для действительного материала и для идеально упругого материала отличаются одна от другой (при одних и тех же нагрузках), то в теле после снятия внешней нагрузки возникают остаточные напряжения, эпюра которых представляет собой разность эпюр упомянутых напряжений. В местах наибольших напряжений остаточные напряжения противоположны по знаку напряжениям в рабочих условиях.

Предельный пластический момент. Из формулы (51) следует, что при

$$M = \sigma_T \frac{1}{4} bH^2$$

величина $H_1 = 0$, т. е. все сечение стержня находится в области пластической деформации.

Изгибающий момент, при котором во всех точках сечения возникают пластические деформации, называют предельным пластическим моментом. Распределение напряжений изгиба по сечению в этом случае показано на рис. 33.

В области растяжения $\sigma = \sigma_T$, в области сжатия $\sigma = -\sigma_T$. Так как из условия равновесия $\int_F \sigma dF = 0$, то нейтральная линия делит сечение на две равновеликие (по площади) части.

Для прямоугольного сечения предельный пластический момент

$$M_T = \sigma_T \frac{1}{4} bH^2 = \sigma_T W_T. \quad (52)$$

Изгибающий момент, при котором возникает пластическая деформация только в крайних волокнах,

$$M_y = \sigma_T \frac{1}{6} bH^2 = \sigma_T W.$$

Отношение пластического момента сопротивления W_T к обычному (упругому) моменту сопротивления для прямоугольного сечения

$$\frac{W_T}{W} = \frac{\frac{1}{4} bH^2}{\frac{1}{6} bH^2} = 1,5.$$

Для двутаврового сечения при изгибе в плоскости наибольшей жесткости это отношение составляет 1,15—1,20; для тонкостенного трубчатого ~1,3; для сплошного круглого сечения 1,7.

В общем случае величину M_T при изгибе в плоскости симметрии сечения можно определить следующим способом (рис. 34): разбить сечение линией aa на две равновеликие (по площади) части. Если расстояние между центрами тяжести этих частей обозначить через e , то

$$M_T = \sigma_T \frac{1}{2} Fe = \sigma_T Fc, \quad (53)$$

где F — площадь поперечного сечения; $c = \frac{1}{2} e$ — расстояние от центра тяжести какой-либо половины сечения до центра тяжести всего сечения (точку O находят на равном расстоянии от точек O_1 и O_2).

Предельный разрушающий момент. Изгибающий момент, при котором в какой-либо точке сечения возникает напряжение, равное пределу прочности материала, называют предельным разрушающим моментом.

При определении разрушающего момента будем исходить из кривых деформирования для полностью пластичного материала (см. рис. 31),

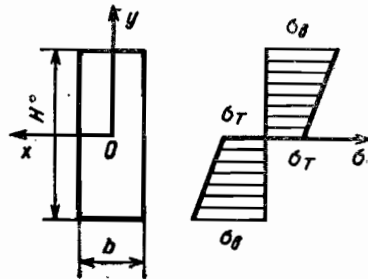


Рис. 35. Распределение напряжений при действии разрушающего момента

Рассмотрим сначала стержень прямоугольного сечения. Распределение изгибающих напряжений показано на рис. 35. В крайних волокнах напряжение равно σ_B . Напряжение на расстоянии y от оси

$$\sigma = \sigma_T + (\sigma_B - \sigma_T) \frac{2y}{H}.$$

Из условия равновесия разрушающий момент равен

$$2 \int_0^{\frac{H}{2}} \left[\sigma_T + (\sigma_B - \sigma_T) \frac{2y}{H} \right] yb dy = M_B$$

или

$$\sigma_T W_T + (\sigma_B - \sigma_T) W = M_B, \quad (54)$$

где пластический и упругий моменты сопротивления соответственно

$$W_T = \frac{bH^2}{4}; \quad W = \frac{bH^2}{6}.$$

Равенство (54) справедливо для любого поперечного сечения, имеющего две оси симметрии. Приближенно можно считать, что оно справедливо и для сечения с одной осью симметрии. Это равенство можно записать в другом виде:

$$M_B = M_T \left[1 + \left(\frac{\sigma_B}{\sigma_T} - 1 \right) \frac{W}{W_T} \right]. \quad (55)$$

Например, для стержня прямоугольного сечения при $\frac{W}{W_T} = \frac{1}{1,5}$ и $\frac{\sigma_B}{\sigma_T} = 1,5$ получаем $M_B \approx 1,33M_T$. При выводе формулы для M_B пренебрегали изменением сечения стержня в процессе деформации.

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

КРУГЛЫЙ ВАЛ

При кручении круглого вала (рис. 1) образующие цилиндра получают наклон к оси. Поперечные сечения вала остаются плоскими, радиальные направления остаются после деформации прямолинейными; поперечное сечение вала, не деформируясь, поворачивается вокруг оси.

Такая картина деформаций установлена экспериментально. Если угол поворота концевое сечения $\varphi(l)$, то угол сдвига на радиусе R

$$\gamma = \frac{\varphi(l) R}{l} \tag{1}$$

Величина

$$\frac{\varphi(l)}{l} = \theta \tag{2}$$

представляет собой *угол закрутки на единицу длины вала*. Касательное напряжение в соответствии с законом Гука (рис. 2)

$$\tau = G\gamma = G\theta r, \tag{3}$$

где G — модуль сдвига.

При кручении круглого вала касательные напряжения распределяются вдоль радиуса по линейному закону.

Из условия равновесия момент касательных напряжений должен быть равен внешнему крутящему моменту, т. е.

$$\int_0^R \tau r dF = M_k, \tag{4}$$

или

$$G\theta \int_0^R r^2 dF = M_k,$$

откуда следует

$$G\theta J_p = M_k, \tag{5}$$

где

$$J_p = \int_0^R r^2 dF = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \text{ — полярный момент инерции круга диаметром } d = 2R.$$

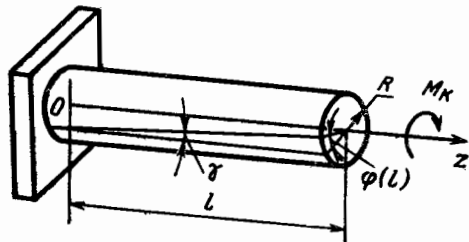


Рис. 1. Кручение круглого вала

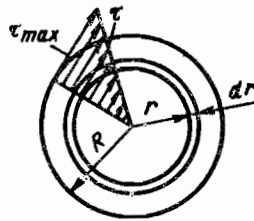


Рис. 2. Распределение напряжений при кручении вала сплошного сечения

Из формул (2) и (3) находим

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} r. \tag{6}$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{J_p} R = \frac{M_k}{W_p} = \frac{M_k}{\frac{\pi d^3}{16}} \approx \frac{M_k}{0,2d^3}. \tag{7}$$

Угол поворота концевое сечения

$$\varphi(l) = \frac{M_k l}{G J_p}. \tag{8}$$

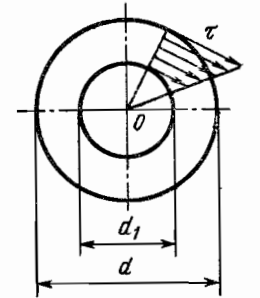


Рис. 3. Распределение напряжений при кручении круглого вала

Связь между максимальным касательным напряжением и углом закрутки $\varphi(l)$ выражается равенством

$$\varphi(l) = \frac{\pi d^3}{G} \frac{\tau_{max} l}{\pi d^4} = \frac{\tau_{max}}{G} \frac{2l}{d}. \tag{9}$$

У валов малого диаметра при одном и том же угле закручивания касательные напряжения меньше.

Формулы (6) и (8) остаются справедливыми для полого вала (рис. 3). Полярный момент инерции полого вала

$$J_p = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4).$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{M_k}{\frac{\pi}{16} d^3 \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right)}.$$

Если толщина стенки $\delta = \frac{1}{2} (d - d_1)$ мала по сравнению со средним радиусом $r_{cp} = \frac{1}{2} (d + d_1)$, то можно считать, что касательные напряжения постоянны по толщине.

В этом случае

$$\tau = \frac{M_k}{2\pi r_{cp}^2 \delta}. \tag{10}$$

СТЕРЖЕНЬ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

При кручении стержня некруглого сечения точки поперечного сечения после деформации не лежат в одной плоскости. Они получают не только поворотные смещения, но и смещения вдоль оси. Угол закрутки на единицу длины

$$\theta = \frac{M_k}{G T}, \tag{11}$$

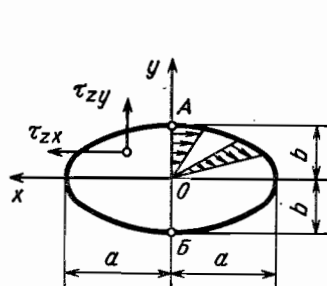


Рис. 4. Кручение стержня эллиптического сечения

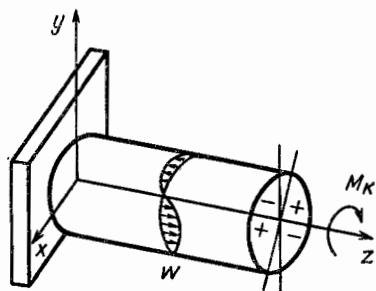


Рис. 5. Осевые перемещения при кручении стержня эллиптического сечения

где T — геометрическая жесткость на кручение стержня эллиптического сечения (рис. 4):

$$T = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (12)$$

Составляющие касательного напряжения

$$\tau_{zx} = -\frac{M_k}{\frac{\pi}{2} ab^3} y; \quad \tau_{zy} = \frac{M_k}{\frac{\pi}{2} ba^3} x. \quad (13)$$

В точках контура вектор полного касательного напряжения направлен по касательной к контуру. В точках прямой, проходящей через начало координат, векторы полных касательных напряжений параллельны. Наибольшее напряжение имеет место в концах малых полуосей:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\frac{\pi}{2} ab^2}. \quad (14)$$

Смещение точек в направлении оси z (депланация сечения) определяется равенством

$$\omega = \frac{M_k (a^2 - b^2)}{G \pi a^3 b^3} xy. \quad (15)$$

Распределение ω в точках контура показано на рис. 5.

Приведенное решение справедливо для случая чистого кручения стержня концевыми парами при свободных торцах. При стеснении осевых смещений (например, при заделке торца стержня) возникает стесненное кручение.

В зоне стесненного кручения в поперечном сечении возникают нормальные напряжения, распределенные приблизительно по такому же закону, как и величина ω . Максимальные нормальные напряжения в заделке

$$\sigma_{\max} \approx 1,5 \tau_{\max}.$$

Напряжения естественного кручения быстро убывают по мере удаления от заделки. Так, например, при $z = a$ величина σ_{\max} составляет только $0,2 \tau_{\max}$.

СТЕРЖНИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ И ТОНКОСТЕННЫЕ

Максимальное касательное напряжение действует на середине большей стороны ($a > b$), как показано на рис. 6:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{k_1 a b^2}. \quad (16)$$

Коэффициент k_1 с достаточной точностью может быть найден по приближенной формуле

$$k_1 = \frac{1}{3 + 1,8 \frac{b}{a}}.$$

Угол поворота на единицу длины стержня

$$\theta = \frac{M_k}{G k_2 a b^3}. \quad (17)$$

Для сечения в виде вытянутого прямоугольника

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{3}.$$

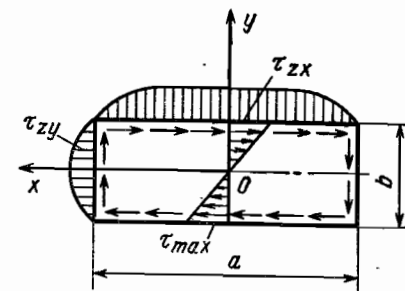


Рис. 6. Касательные напряжения при кручении стержня прямоугольного сечения

Таким образом,

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\frac{1}{3} a b^2} = \frac{M_k}{T}. \quad (18)$$

Для тонкостенных стержней (открытого профиля)

$$T = \frac{1}{3} \int_0^L \delta^3 (s) ds,$$

где $\delta (s)$ — толщина стенки; ds — элемент дуги средней линии, длина которой L . Наибольшее напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{T} \delta_{\max}. \quad (19)$$

При стесненном кручении стержня с сечением в виде вытянутого прямоугольника наибольшее нормальное напряжение в заделке может достигать величины $\sigma_{\max} \approx 2,5 \tau_{\max}$.

Эти напряжения быстро затухают, т. е. носят местный характер. У тонкостенных стержней (типа швеллера, двутавра) искажение напряженного состояния в районе заделки затухает медленно и при расчете следует учитывать стесненное кручение. Это составляет предмет исследований теории тонкостенных стержней. Если для сечения стержня параметр

$$k = \frac{J_{\min}}{T} \leq 3,$$

где J_{\min} — минимальный момент инерции сечения, то можно применять обычную теорию изгиба и кручения стержней.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Согласно гидродинамической аналогии касательное напряжение представляет собой скорость жидкости, вращающейся внутри цилиндрического сосуда, стенка которого совпадает с контуром сечения вала.

Эта аналогия позволяет сделать ряд практически важных выводов (рис. 7):
1. Во всех входящих углах (рис. 7, а) образуется концентрация напряжений. Если радиус закругления вершин входящего угла стремится к нулю, то касательное напряжение стремится к бесконечности.

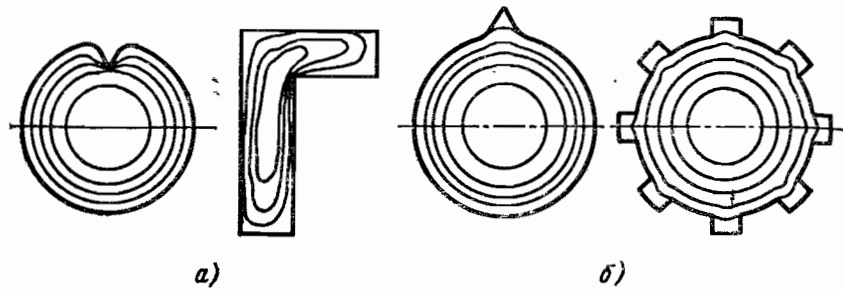


Рис. 7. Качественные особенности распределения касательных напряжений при кручении

2. Во внешних выступах (рис. 7, б) касательные напряжения уменьшаются (по гидродинамической аналогии здесь образуются застойные зоны с малой скоростью течения).

По мембранной аналогии касательное напряжение пропорционально уклону резиновой пленки, закрепленной по контуру сечения и находящейся под действием внутреннего давления.

Объем, образованный пленкой и плоскостью контура, пропорционален жесткости стержня на кручение.

УЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

При кручении круглого вала картина деформаций остается такой же, как и при упругих деформациях.

Из опытов на кручении тонкостенных труб получена зависимость (рис. 8)

$$\tau = \Phi(\gamma). \tag{20}$$

Для приближенного построения можно использовать обычную кривую деформирования (σ, ϵ), положив $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma, \gamma = \sqrt{3}\epsilon$.

Расчетную зависимость $\tau = \Phi(\gamma)$ часто принимают в виде диаграммы, показанной на рис. 9. Допустим, что до радиуса r_1 (рис. 10, а) материал вала работает в упругой области. Тогда на участке I (область упругости) $\tau = \frac{r}{r_1} \tau_T$ и на участке II (область пластичности) $\tau = \tau_T$.

Крутящий момент

$$M_k = \int_F \tau r dF = 2\pi \int_0^{r_1} \tau_T \frac{r^3}{r_1} dr + 2\pi \int_{r_1}^R \tau_T r^2 dr,$$

или

$$M_k = \tau_T 2\pi \left(\frac{R^3}{3} - \frac{r_1^3}{12} \right). \tag{21}$$

Из этого равенства

$$r_1 = \sqrt[3]{4R^3 - \frac{6M_k}{\pi\tau_T}}. \tag{22}$$

Предельное значение M_k , соответствующее работе стержня целиком в пластической области ($r_1 = 0$):

$$M_{kT} = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_T. \tag{23}$$

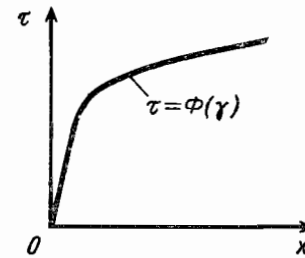


Рис. 8. Диаграмма деформирования

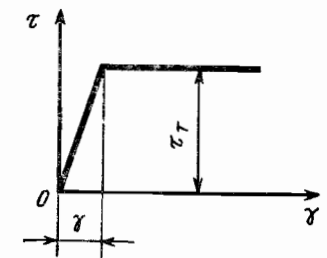


Рис. 9. Диаграмма деформирования без упрочнения

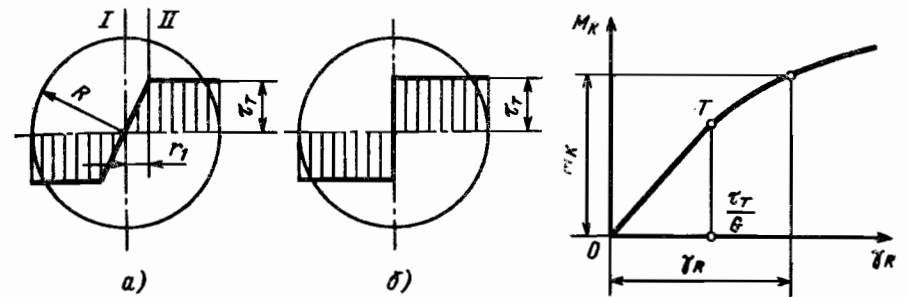


Рис. 10. Распределение касательных напряжений при упруго-пластических деформациях

Рис. 11. Зависимость $M_k = M_k(\gamma_R)$

Распределение напряжений в этом случае показано на рис. 10, б. Для угла сдвига справедлива зависимость $\gamma = \theta r$. Для радиуса r_1

$$\gamma_1 = \frac{\tau_T}{G} = \theta r_1. \tag{24}$$

В силу соотношения (22)

$$\theta = \frac{\tau_T}{G} \frac{1}{\sqrt[3]{4R^3 - \frac{6M_k}{\pi\tau_T}}}. \tag{25}$$

Из формулы (25) следует, что при приближении величины M_k к M_{kT} деформация вала сильно возрастает. Если исходить из точной кривой деформирования $\tau = \Phi(\gamma)$ (см. рис. 8), то значение угла сдвига на внешнем радиусе можно определить из соотношения

$$2\pi R^3 F(\gamma_R) = M_k, \tag{26}$$

где

$$F(\gamma_R) = \frac{1}{\gamma_R^3} \int_0^{\gamma_R} \Phi(\gamma) \gamma^2 d\gamma.$$

Функцию $F(\gamma_R)$ вычисляют, задаваясь различными значениями γ_R , и затем строят зависимость $M_k = M_k(\gamma_R)$ (рис. 11). Искомое значение γ_R соответствует заданной величине крутящего момента.

Расчет следует начинать при $\nu_R \geq \frac{\tau_r}{G}$, так как это соответствует началу пластичности в точках внешнего контура.

ТРУБЧАТЫЕ СТЕРЖНИ

При расчете трубчатых тонкостенных стержней на кручение предполагают, что вектор касательного напряжения параллелен касательной к средней линии контура, и напряжения распределяются равномерно по толщине стенки (рис. 12).

Из условия равновесия элемента стержня, показанного на рис. 13, следует

$$\delta_1 \tau_1 = \delta_2 \tau_2,$$

или

$$\delta(s) \tau(s) = \text{const.} \quad (27)$$

Сумма моментов всех касательных напряжений относительно оси, проходящей через произвольную точку сечения (рис. 14), равна $\int_L \rho \tau(s) \delta(s) ds$, где ρ — длина перпендикуляра, опущенного из точки O на касательную к контуру. Интеграл берется по всей длине L контура.

Приравняв этот суммарный момент внешнему крутящему моменту, в соответствии с равенством (27) получим

$$M_K = \tau(s) \delta(s) \int_L \rho ds. \quad (28)$$

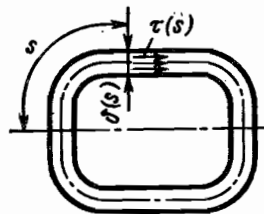


Рис. 12. Касательные напряжения при кручении трубчатого стержня

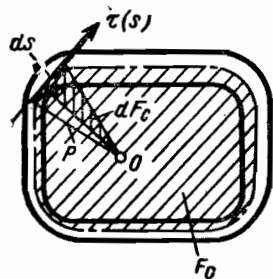


Рис. 14. К определению жесткости стержня на кручение

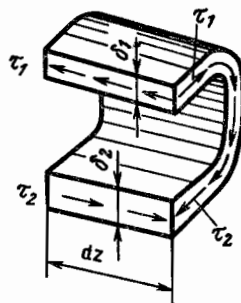


Рис. 13. Равновесие элемента стержня

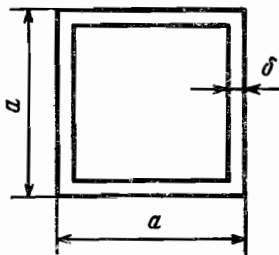


Рис. 15. Стержень коробчатого сечения

Так как $\rho ds = 2dF_c$, где dF_c — площадь заштрихованного на рис. 14 сектора, то

$$\int_L \rho ds = 2F_c,$$

где F_c — площадь, ограниченная средней линией сечения трубы. Из равенства (28) вытекает формула Бредта

$$\tau(s) = \frac{M_K}{2\delta(s) F_c}. \quad (29)$$

Жесткость стержня при кручении. Потенциальная энергия деформации стержня

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F \frac{\tau^2}{G} dF dz = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^L \frac{M_K^2 \delta(s)}{4G\delta^2(s) F_c^2} ds dz,$$

где l — длина стержня; L — длина дуги средней линии (периметр). Отсюда получаем

$$U = \frac{M_K^2}{8GF_c^2} \int_0^L \frac{ds}{\delta(s)}. \quad (30)$$

Из равенства работ $\frac{1}{2} M_K \varphi(l) = U$, откуда относительный угол поворота

$$\varphi(l) = \frac{M_K l}{GT},$$

где $T = \frac{4F_c^2}{L} \int_0^L \frac{ds}{\delta(s)}$ — геометрическая жесткость сечения стержня при кручении.

Для трубы с постоянной толщиной стенки

$$T = \frac{4F_c^2 \delta}{L}.$$

Например, для круглой трубы радиуса r с толщиной стенки δ

$$T = \frac{4\pi^2 r^4 \delta}{2\pi r} = 2\pi r^3 \delta;$$

для трубы коробчатого профиля постоянной толщины (рис. 15)

$$T = \frac{4a^4 \delta}{4a} = a^3 \delta.$$

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОЛЕЦ

Предполагается, что одна из главных осей сечения лежит в плоскости кольца. В этой же плоскости действуют внешние нагрузки. Замкнутое кольцо при действии произвольной нагрузки является 3 раза статически неопределимым.

При расчете на прочность тонкого кольца можно считать справедливыми зависимости, установленные в теории прямолинейных стержней. Основную (статически определимую) систему получим, разрезая кольцо в некотором сечении $\theta = 0$ (рис. 1). Неизвестные силовые факторы в сечении обозначим: X_1 — растягивающая (сжимающая) сила; X_2 — перерезывающая сила; X_3 — изгибающий момент. Пренебрегая влиянием нормальных и перерезывающих сил на деформацию, можно записать с помощью интеграла Мора обобщенное перемещение

$$\delta = \int \frac{M_P M_1}{EJ} ds, \tag{1}$$

где M_P — изгибающий момент в сечении кольца (в основной системе) от действия внешних нагрузок; M_1 — изгибающий момент в сечении кольца от единичной нагрузки; EJ — жесткость сечения на изгиб.

Для решения задачи в соответствии с равенством (1) следует определить изгибающие моменты от единичных силовых факторов, приложенных в направлении X_1, X_2, X_3 .

Из условия равенства нулю относительных перемещений получаем систему (канонических) уравнений:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \delta_{1P} = 0; \tag{2}$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \delta_{2P} = 0; \tag{3}$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \delta_{3P} = 0. \tag{4}$$

Коэффициенты, входящие в последние уравнения, называют коэффициентами влияния. Каждый из этих коэффициентов получается в результате умножения элер, указанных индексами коэффициентов.

Используя свойства симметричности и косимметричности элер, легко установить, что

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Из уравнения (3) находим

$$X_2 = - \frac{\delta_{2P}}{\delta_{22}}, \tag{5}$$

а из уравнений

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 + \delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 + \delta_{3P} = 0$$

следует

$$X_1 = \frac{\delta_{3P} \delta_{13} - \delta_{1P} \delta_{33}}{\delta_{11} \delta_{33} - \delta_{13} \delta_{31}}; \tag{6}$$

$$X_3 = \frac{\delta_{1P} \delta_{31} - \delta_{3P} \delta_{11}}{\delta_{11} \delta_{33} - \delta_{13} \delta_{31}}. \tag{7}$$

Перейдем к вычислению коэффициентов влияния. Изгибающий момент в элоре «1» $M_{1(1)}(\theta) = 1 \cdot R (1 - \cos \theta)$.

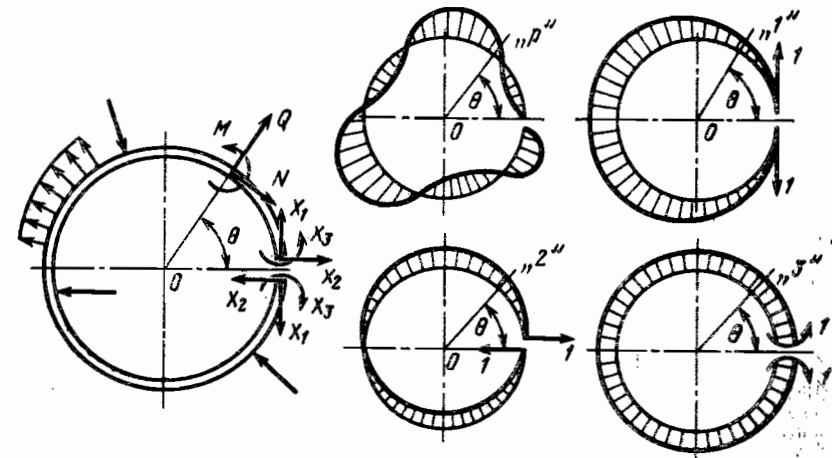


Рис. 1. Статически определимая система и элоры изгибающих моментов от внешних нагрузок и единичных силовых факторов

Момент считают положительным, если он уменьшает кривизну стержня (см. рис. 1).

Изгибающие моменты в элорах «2» и «3»

$$M_{1(2)}(\theta) = 1 \cdot R \sin \theta; \quad M_{1(3)}(\theta) = 1.$$

Для кольца постоянного сечения

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_0^{2\pi} M_{1(1)}^2 R d\theta = \frac{R^3}{EJ} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi R^3}{EJ};$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EJ} \int_0^{2\pi} M_{1(1)} M_{1(3)} R d\theta = \frac{R}{EJ} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{2\pi R^2}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \int_0^{2\pi} M_{1(2)}^2 R d\theta = \frac{R^3}{EJ} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^3}{EJ};$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} \int_0^{2\pi} M_{1(3)}^2 R d\theta = \frac{R}{EJ} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi R}{EJ}.$$

Далее имеем

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \int_0^{2\pi} M_P M_{1(1)} R d\theta = \frac{R^2}{EJ} \int_0^{2\pi} M_P (1 - \cos \theta) d\theta;$$

$$\delta_{2P} = \frac{1}{EJ} \int_0^{2\pi} M_P M_{1(2)} R d\theta = \frac{R^2}{EJ} \int_0^{2\pi} M_P \sin \theta d\theta;$$

$$\delta_{3P} = \frac{1}{EJ} \int_0^{2\pi} M_P M_{1(3)} R d\theta = \frac{R}{EJ} \int_0^{2\pi} M_P d\theta,$$

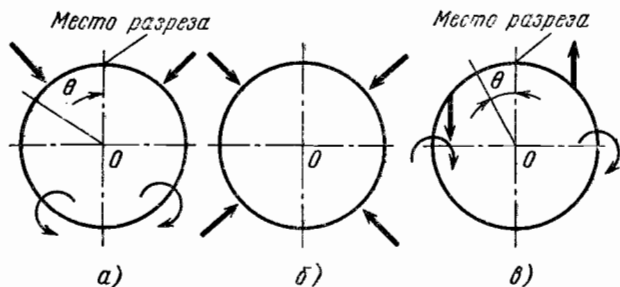


Рис. 2. Симметричная (а, б) и косимметричная (в) нагрузки на кольцо

здесь M_P — изгибающий момент в сечении θ в эпюре P , т. е. момент от внешних сил в разрезанном кольце.

Теперь, подставляя эти значения в равенства (5) — (7), получаем

$$X_1 = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_P(\theta) \cos \theta d\theta; \quad (8)$$

$$X_2 = -\frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_P(\theta) \sin \theta d\theta; \quad (9)$$

$$X_3 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_P(\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M_P(\theta) \cos \theta d\theta. \quad (10)$$

Изгибающий момент в сечении θ

$$M(\theta) = M_P(\theta) + X_1 R (1 - \cos \theta) + X_2 R \sin \theta + X_3,$$

или с учетом равенств (8) — (10)

$$M(\theta) = M_P(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_P(\theta) d\theta - \frac{\cos \theta}{\pi} \int_0^{2\pi} M_P(\theta) \cos \theta d\theta - \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{2\pi} M_P(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (11)$$

Для вычисления изгибающего момента в сечении кольца следует определить изгибающий момент в разрезанном кольце $M_P(\theta)$ и вычислить интегралы, входящие в равенство (11)*.

При вычислении интегралов можно пользоваться приближенными методами, например правилом трапеций.

Угол θ отсчитывают от произвольного сечения разреза ($\theta = 0$).

Если внешние нагрузки имеют ось симметрии, то разрез целесообразно делать по этой оси (рис. 2, а, б).

Для симметрично нагруженного кольца

$$M(\theta) = M_P(\theta) - \frac{2 \cos \theta}{\pi} \int_0^{\pi} M_P(\theta) \cos \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M_P(\theta) d\theta. \quad (12)$$

* Момент в сечении кольца равен моменту в разрезанном кольце за вычетом трех первых членов разложения этого момента в ряд Фурье.

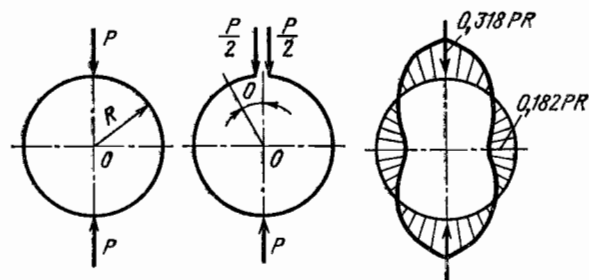


Рис. 3. Кольцо под действием двух сосредоточенных сил

При косимметричной нагрузке (рис. 2, в)

$$M(\theta) = M_P(\theta) - \frac{2 \sin \theta}{\pi} \int_0^{\pi} M_P(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (13)$$

Пример. Кольцо нагружено двумя сосредоточенными силами (рис. 3). Разрез проводим по оси симметрии, разделяя нагрузку поровну по краям разреза, в результате получим

$$M_P(\theta) = -\frac{P}{2} \sin \theta.$$

Находим

$$\int_0^{\pi} M_P(\theta) d\theta = -\frac{PR}{2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = -PR; \quad \int_0^{\pi} M_P(\theta) \cos \theta d\theta = 0.$$

Из равенства (12) следует

$$M(\theta) = PR \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \theta \right).$$

При $\theta = 0$ имеем

$$M(0) = \frac{1}{\pi} PR = 0,318 PR.$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) PR = -0,182 PR.$$

Пример. Кольцо нагружено двумя сосредоточенными моментами (рис. 4).

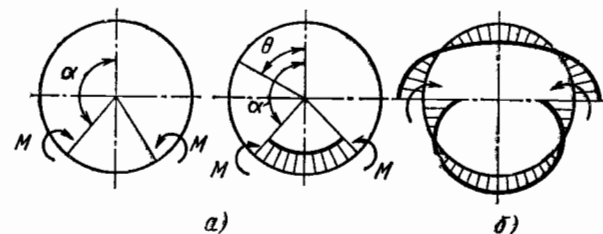
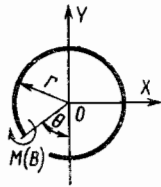


Рис. 4. Кольцо под действием двух сосредоточенных моментов

Формулы для расчета колец



Обозначения: $M(\theta)$ — изгибающий момент в сечении кольца; положительное направление момента принято, как указано на рисунке; θ — текущий угол (α, β — фиксированные углы, определяющие положение действующей нагрузки); δ_x, δ_y — изменения диаметра кольца в направлениях x и y ; J — момент инерции сечения; E — модуль упругости.
Эпюры изгибающих моментов даны для значений α , указанных на эскизах

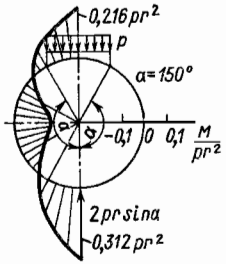
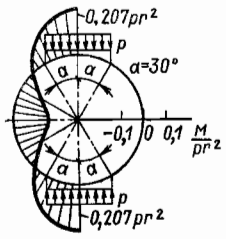
Эпюры изгибающих моментов	Расчетные формулы	
	<p>При $0 \leq \theta \leq \alpha$</p> $M(\theta) = Pr \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos(\frac{\alpha}{2} - \theta)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right);$ $N(\theta) = -\frac{P}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cos(\frac{\alpha}{2} - \theta),$ <p>где $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ рад (n — число сосредоточенных пар сил). Перемещение точки приложения силы относительно центра кольца</p> $w = \frac{Pr^3}{EJ} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{4} \sin \alpha - \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \right) + \frac{Pr}{EF} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\sin \alpha}{4} \right).$ <p>При малых углах ($\alpha < 20^\circ$)</p> $w = \frac{Pr^3}{EJ} \frac{\alpha^3}{720} + \frac{Pr}{EF} \frac{1}{\alpha}$	
	<p>$0 \leq \theta \leq \alpha$</p> $M(\theta) = Pr \left[\frac{1}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \theta - \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta) - \cos \theta + \cos \alpha \right]$	<p>$\alpha \leq \theta \leq \pi$</p> $M(\theta) = Pr \left[\frac{1}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \theta) - \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta \right]$
<p>Кольцо под действием двух горизонтальных сил</p>	<p>$0 \leq \theta \leq \alpha$</p> $M(\theta) = Pr \left[\frac{1}{\pi} (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \cos \theta \sin^2 \alpha + \cos \theta \sin^2 \beta) - \sin \beta + \sin \alpha \right],$ <p>$\alpha \leq \theta \leq \beta$</p> $M(\theta) = Pr \left[\frac{1}{\pi} (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \cos \theta \sin^2 \alpha + \cos \theta \sin^2 \beta) - \sin \beta + \sin \theta \right],$ <p>$\beta \leq \theta \leq \pi$</p> $M(\theta) = Pr \left[\frac{1}{\pi} (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \cos \theta \sin^2 \alpha + \cos \theta \sin^2 \beta) \right]$	

¹ В этом случае учитывают влияние нормального усилия $N(\theta)$, которое при $n > 8$ оказывается существенным. Влиянием перерезывающих сил можно пренебречь

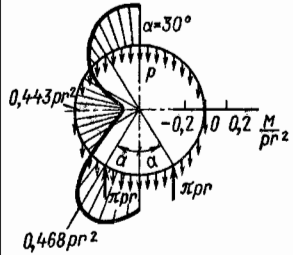
Продолжение табл.

Эпюры изгибающих моментов	Расчетные формулы	
	$\delta_x = \frac{Pr^3}{EJ} \left[\frac{2}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \frac{1}{2} (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) \right];$ $\delta_y = \frac{Pr^3}{EJ} \left[\frac{2}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} - 1 \right]$	
	<p>$0 \leq \theta \leq \alpha$</p> $M(\theta) = M_0 \left[\frac{1}{\pi} (\alpha + 2 \cos \theta \sin \alpha) - 1 \right]$	<p>$\alpha \leq \theta \leq \pi$</p> $M(\theta) = M_0 \left[\frac{1}{\pi} (\alpha + 2 \cos \theta \sin \alpha) \right]$
	<p>$0 \leq \theta \leq \alpha$</p> $M(\theta) = Pr \left[\frac{1}{\pi} (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \cos \theta \sin^2 \alpha + \cos \theta \sin^2 \beta) - \sin \beta + \sin \alpha \right],$ <p>$\alpha \leq \theta \leq \beta$</p> $M(\theta) = Pr \left[\frac{1}{\pi} (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \cos \theta \sin^2 \alpha + \cos \theta \sin^2 \beta) - \sin \beta + \sin \theta \right],$ <p>$\beta \leq \theta \leq \pi$</p> $M(\theta) = Pr \left[\frac{1}{\pi} (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \cos \theta \sin^2 \alpha + \cos \theta \sin^2 \beta) \right]$	
<p>Кольцо под действием двух вертикальных сил</p>	$\delta_x = \frac{Pr^3}{EJ} \left[\frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) + \frac{2}{\pi} (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) + 1 - 2 \sin \beta \right];$ $\delta_y = \frac{Pr^3}{EJ} \left[\frac{1}{2} (\sin \beta \cos \beta + \beta - \sin \alpha \cos \alpha - \alpha) + \frac{2}{\pi} (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) + \sin \alpha - \sin \beta \right]$	

Продолжение табл.

Эпюры изгибающих моментов	Расчетные формулы
 <p>Кольцо под действием распределенной нагрузки и уравновешивающей вертикальной силы</p>	$\theta = 0$ $M(\theta) = pr^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\sin \alpha - \frac{\alpha \sin^2 \alpha}{2} - \frac{\sin^3 \alpha}{3} - \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{4} - \frac{\alpha}{4} \right) \right]$ $0 \leq \theta \leq \alpha$ $M(\theta) = M(0) - pr^2 \left[\sin \alpha \cos \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3\pi} (1 - \cos \theta) \right]$ $\alpha \leq \theta \leq \pi$ $M(\theta) = M(0) + pr^2 \left[\frac{\sin^3 \alpha}{3\pi} (1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \theta) \right]$ $\delta_x = \frac{2pr^4}{EJ} \left[\frac{1}{4} - \frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{2} - \frac{\sin^3 \alpha}{12} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\alpha \sin^2 \alpha}{2} - \sin \alpha \right) \right];$ $\delta_y = \frac{2pr^4}{EJ} \left[\frac{1}{12} + \frac{\sin^2 \alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{12} - \frac{\alpha \sin \alpha}{4} - \frac{\cos \alpha}{6} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha \sin^2 \alpha}{2} + \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\alpha}{4} - \sin \alpha \right) \right]$
 <p>Кольцо под действием двух распределенных нагрузок</p>	$\theta = 0$ $M(0) = pr^2 \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha}{2} + \alpha \sin^2 \alpha + \frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right]$ $0 \leq \theta \leq \alpha$ $M(\theta) = M(0) - \frac{pr^2}{2} \sin^2 \theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $M(\theta) = M(0) - pr^2 \left(\sin \alpha \sin \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right)$ $\delta_x = \frac{pr^4}{EJ} \left[-\sin \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} + \frac{1}{\pi} (\alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \sin^2 \alpha) \right];$ $\delta_y = \frac{pr^4}{EJ} \left[\sin^2 \alpha - \alpha \sin \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{3} \cos \alpha - \frac{2}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} + \frac{\pi \sin \alpha}{2} - \frac{1}{\pi} (2 \alpha \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha) \right]$

Продолжение табл.

Эпюры изгибающих моментов	Расчетные формулы
 <p>Кольцо под действием вертикальной распределенной нагрузки постоянной интенсивности и двух уравновешивающих вертикальных сил</p>	$\theta = 0$ $M(0) = pr^2 \left(\frac{1}{2} + \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - \pi \sin \alpha + \sin^2 \alpha \right);$ $N(0) = pr \left(\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \right).$ $0 \leq \theta \leq \alpha$ $M(\theta) = M(0) - N(0) r (1 - \cos \theta) + pr^2 (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1).$ $\alpha \leq \theta \leq \pi$ $M(\theta) = M(0) - N(0) r (1 - \cos \theta) + pr^2 (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1 - \pi \sin \theta + \pi \sin \alpha)$ $\delta_x = \frac{pr^4}{EJ} \left[-\frac{\pi}{2} (1 + \sin^2 \alpha) + 2 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) \right];$ $\delta_y = \frac{pr^4}{EJ} \left[-2.467 + \frac{\pi}{2} (\sin \alpha \cos \alpha + \alpha - 2 \sin \alpha) + 2 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) \right].$

В этом случае (рис. 4, а) $M_P(\theta) = 0$ при $0 \leq \theta \leq \alpha$;

$$M_P(\theta) = -M \text{ при } \alpha \leq \theta \leq \pi.$$

Вычисляем

$$\int_0^{\pi} M_P(\theta) d\theta = -\int_0^{\pi} M d\theta = -M(\pi - \alpha);$$

$$\int_0^{\pi} M_P(\theta) \cos \theta d\theta = -M \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = M \sin \alpha.$$

Пользуясь равенством (12), находим

$$M(\theta) = M_P(\theta) + \frac{M}{\pi} (\pi - \alpha) - \frac{2 \cos \theta}{\pi} M \sin \alpha.$$

При $\theta < \alpha$

$$M(\theta) = M \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sin \alpha \cos \theta \right).$$

При $\theta > \alpha$

$$M(\theta) = -M \left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sin \alpha \cos \theta \right).$$

Расчетные формулы для некоторых случаев нагрузки колец даны в таблице. Эпюра изгибающих моментов приведены на рис. 4, б.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОЛЕЦ

Под действием осевой силы (рис. 5) кольцо испытывает осесимметричную деформацию — сечение кольца поворачивается на некоторый угол. В общем случае на кольцо могут действовать равномерно распределенные усилия и моменты (рис. 6,

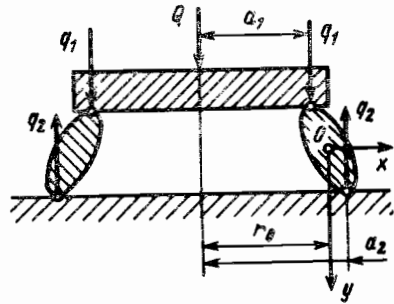


Рис. 5. Осесимметричная деформация кольца (кручение кольца) под действием осевой силы

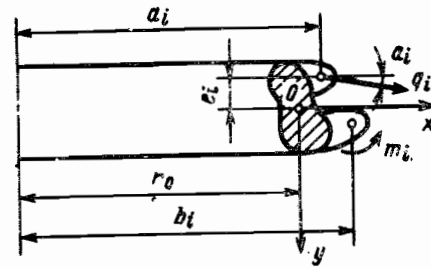


Рис. 6. Распределенные внешние силы и моменты, приложенные к кольцу

усилие q_i в кгс/см распределено по окружности радиуса a_i , момент m_i в кгс·см/см — по окружности радиуса b_i и сечение кольца получит радиальное перемещение u_0 и поворот на угол φ против часовой стрелки (рис. 7). Рассмотрим приближенное решение, основанное на допущении, что деформации в плоскости сечения кольца отсутствуют (физическая модель такой расчетной схемы — кольцо состоит из жестких шайб, связанных кольцевыми упругими нитями). Начало координат помещено в центре тяжести сечения. Относительное удлинение в окружном направлении

$$\epsilon = \frac{u_0}{r} + y \frac{\varphi}{r}. \quad (14)$$

По закону упругости напряжение в окружном направлении

$$\sigma = E\epsilon = E \left(\frac{u_0}{r} + y \frac{\varphi}{r} \right), \quad (15)$$

где E — модуль упругости материала.

Неизвестные величины u_0 и φ , входящие в это равенство, определяют из условий равновесия половины кольца (рис. 8).

$$\int \sigma dF = N; \quad \int \sigma y dF = M, \quad (16)$$

где N и M — растягивающее усилие и момент в сечении кольца. Эти усилия уравновешивают половину кольца. Плоскость действия момента перпендикулярна оси.

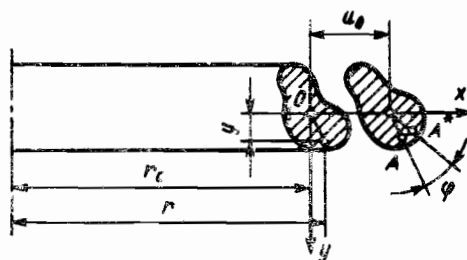


Рис. 7. Деформация кольца

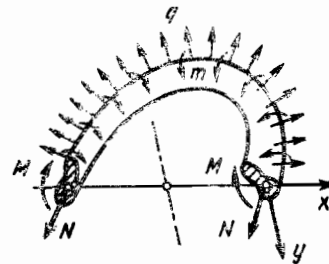


Рис. 8. Растягивающее усилие и момент M в поперечном сечении кольца

Для вычисления N и M используют формулы (рис. 6)

$$N = \sum_{i=1}^n a_i q_i \cos \alpha_i; \quad (17)$$

$$M = \sum_{i=1}^n (b_i m_i - a_i^2 q_i \sin \alpha_i - a_i r_i q_i \cos \alpha_i), \quad (18)$$

где суммирование распространяется на все приложенные нагрузки. Внося равенство (15) в условия (16), находим

$$u_0 E \int \frac{dF}{r} + \varphi E \int \frac{y dF}{r} = N; \quad (19)$$

$$u_0 E \int \frac{y dF}{r} + \varphi E \int \frac{y^2 dF}{r} = M. \quad (20)$$

Разберем два основных случая.

Размеры поперечного сечения кольца малы по сравнению с радиусом. В этом случае можно считать $r = r_0$, где r_0 — радиус окружности центров тяжести сечений. Учитывая, что

$$\int y dF = 0,$$

так как ось x проходит через центр тяжести сечения, из уравнений (19) и (20) получаем

$$\frac{u_0}{r_0} = \frac{N}{EF}; \quad \frac{\varphi}{r_0} = \frac{M}{EJ_x}, \quad (21)$$

где F — площадь поперечного сечения кольца; $J_x = \int y^2 dF$ — момент инерции сечения кольца относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к оси кольца.

Из равенства (15) вытекает

$$\sigma = \frac{N}{F} + y \frac{M}{J_x}. \quad (22)$$

Кольцо под действием осевой силы. В этом случае (см. рис. 5) общее осевое усилие

$$Q = 2\pi a_1 q_1 = 2\pi a_2 q_2.$$

По формулам (17) и (18)

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{2};$$

$$N = 0; \quad M = -a_1^2 q_1 + a_2^2 q_2 = \frac{Q}{2\pi} c,$$

где $c = a_2 - a_1$ — разность радиусов опорных окружностей. Угол поворота кольца

$$\varphi = \frac{r_0 M}{EJ_x} = \frac{r_0 (a_2^2 q_2 - a_1^2 q_1)}{EJ_x} = \frac{r_0 Q c}{2\pi EJ_x}.$$

Осадка кольца (вертикальное перемещение точки приложения силы)

$$\delta = \varphi c = \frac{r_0 Q c^2}{2\pi EJ_x}.$$

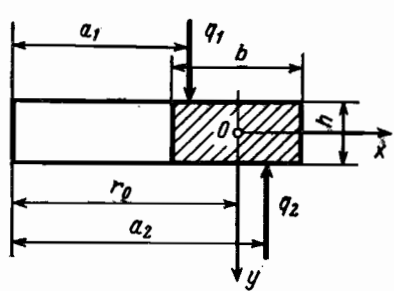


Рис. 9. Кольцо прямоугольного сечения под действием осевой силы

Напряжения в поперечном сечении кольца

$$\sigma = y \frac{Qc}{2\pi J_x}$$

Для кольца прямоугольного сечения (рис. 9)

$$\varphi = \frac{6r_0 Qc}{\pi E b h^3}; \quad \sigma = y \frac{6Qc}{\pi b h^3}$$

Наибольшие напряжения

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{3Qc}{\pi b h^2}$$

Растягивающие напряжения действуют при $y = \frac{h}{2}$, сжимающие — при $y = -\frac{h}{2}$.

Кольцо под действием радиальной нагрузки. В этом случае (рис. 10) $\alpha_1 = 0$; $N = a_1 q$; $M = a_1 e q$.

Далее находим

$$\frac{u_0}{r_0} = \frac{a_1 q}{E h b} \frac{\varphi_0}{r_0} = \frac{12 a_1 e q}{E b h^3}$$

Напряжение в кольце

$$\sigma = \frac{a_1 q}{b h} + y \frac{12 a_1 e q}{b h^3}$$

Температурные напряжения. Рассмотрим неравномерно нагретое кольцо при действии внешних нагрузок. Вследствие влияния температуры модуль упругости в различных точках сечения может иметь различные значения, Деформация кольца

$$\frac{u_0}{r_0} = \frac{N}{\int_F E dF} + \frac{\int_F E \alpha T dF}{\int_F E dF}; \quad (23)$$

$$\frac{\varphi}{r_0} = \frac{M}{\int_F E y^2 dF} + \frac{\int_F E \alpha T y dF}{\int_F E y^2 dF}. \quad (24)$$

Начало координат осей x, y помещено в приведенный центр тяжести сечения, так что

$$\int_F E y dF = 0; \quad \int_F E x dF = 0.$$

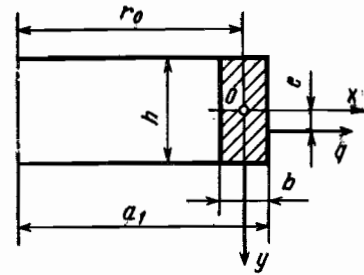


Рис. 10. Кольцо прямоугольного сечения под действием радиальной нагрузки

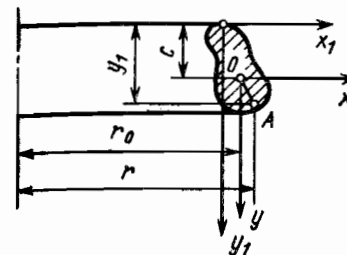


Рис. 11. Общий случай расчета осесимметричной деформации кольца, когда размеры поперечного сечения соизмеримы с радиусом

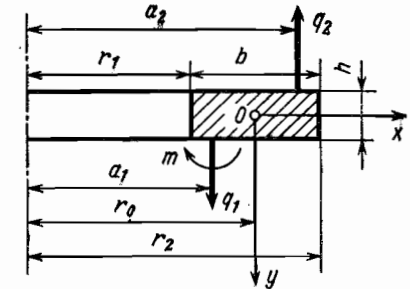


Рис. 12. Кольцо прямоугольного сечения под действием распределенных усилий и момента

При его определении единице площади поперечного сечения приписывают «вес» E . Напряжение в кольце

$$\sigma = E \left(\frac{N}{\int_F E dF} + y \frac{M}{\int_F E y^2 dF} \right) + E \left(\frac{\int_F E \alpha T dF}{\int_F E dF} + y \frac{\int_F E \alpha T y dF}{\int_F E y^2 dF} - \alpha T \right). \quad (25)$$

Вторая группа членов в этой формуле выражает температурные напряжения. Размеры поперечного сечения кольца соизмеримы с радиусом. В этом случае равенство $r = r_0$ не используют, а положение оси (размер c , рис. 11) определяют из условия

$$\int_F \frac{y dF}{r} = \int_F \frac{(y_1 - c) dF}{r} = 0, \quad (26)$$

что дает

$$c = \frac{\int_F \frac{y_1}{r} dF}{\int_F \frac{dF}{r}}. \quad (27)$$

Расстояния y_1 и c можно отсчитывать от произвольной оси, в данном случае вспомогательная ось проходит через верхнюю точку сечения.

Ось y направлена параллельно оси кольца и проходит через центр тяжести сечения.

Из уравнений (19) и (20) при условии (7) находим

$$u_0 = \frac{N}{E \int_F \frac{dF}{r}}; \quad (28)$$

$$\varphi = \frac{M}{E \int_F \frac{y^2}{r} dF}. \quad (29)$$

Напряжения в поперечном сечении кольца

$$\sigma = \frac{N}{r} + \frac{y}{r} \frac{M}{\int_F \frac{y^2}{r} dF} \quad (30)$$

Кольцо прямоугольного сечения под действием осевых сил. На кольцо действуют распределенные усилия q_1 и q_2 и распределенный момент m (рис. 12).

Силловые факторы определяем по формулам (17) и (18)

$$N=0; \quad M = -ma_1 - a_1^2 q_1 + a_2^2 q_2.$$

Равенство (26) будет удовлетворено, если ось x проходит через центр тяжести сечения.

Далее вычисляем

$$\int_F \frac{y^2}{r} dF = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y^2 dy dx}{r_0 + x} = \frac{h^3}{12} \ln \frac{r_0 + \frac{b}{2}}{r_0 - \frac{b}{2}} = \frac{h^3}{12} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Угол поворота кольца по формуле (29)

$$\varphi = \frac{12(a_2^2 q_2 - a_1^2 q_1 - a_1 m)}{E h^3 \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (31)$$

Напряжения в кольце

$$\sigma = \frac{y}{r} \frac{12(a_2^2 q_2 - a_1^2 q_1 - a_1 m)}{h^3 \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (32)$$

Если r_2 и r_1 близки между собой, то $\ln \frac{r_2}{r_1} \approx r_2 - r_1 = b$; $r \approx r_0$ и формулы (31) и (32) совпадают (при $m=0$) с полученным ранее решением для кольца, размеры поперечного сечения которого малы по сравнению с радиусом.

Коническое кольцо. Тонкостенное кольцо ($\delta \ll r$) находится под действием осевых распределенных сил q_1 и q_2 (рис. 13).

Введем вспомогательные координаты ξ и η , тогда

$$y_1 = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha; \quad r = r_1 + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha.$$

С достаточной точностью можно положить $r = r_1 + \xi \cos \alpha$.

Для определения c по равенству (27) вычисляем

$$\int_F \frac{dF}{r} = \int_0^l \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{d\xi d\eta}{r_1 + \xi \cos \alpha} = \frac{\delta}{\cos \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1};$$

$$\int_F \frac{y_1 dF}{r} = \int_0^l \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha}{r_1 + \xi \cos \alpha} d\xi d\eta = \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \left(r_2 - r_1 - r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \right)$$

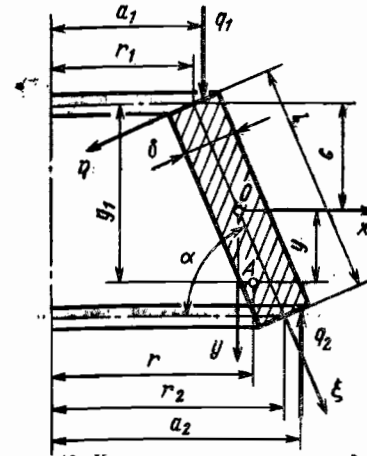


Рис. 13. Коническое кольцо под действием распределенных осевых сил

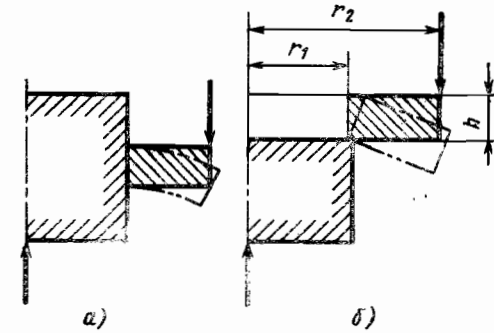


Рис. 14. Области применения приближенного решения для осесимметричной деформации колец:

а — кольцо заделано в массивное тело — решение не применимо; б — кольцо опёрто и имеет возможность поворота — решение может быть использовано

и находим

$$c = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} - r_1 \right).$$

Далее определяем

$$J^* = \int_F \frac{y^2 dF}{r} = \int_F \frac{y_1^2 dF}{r} - c^2 \int_F \frac{dF}{r} = \delta \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos \alpha} \left[\frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) - 2r_1 (r_2 - r_1) + r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right] + \frac{\delta^3}{12} \cos \alpha \ln \frac{r_2}{r_1} - c^2 \frac{\delta}{\cos \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Напряжения в кольце

$$\sigma = \frac{y}{r} \frac{q_2 a_2^2 - q_1 a_1^2}{J^*}.$$

Осадка кольца (сближение точек приложения усилий q_1 и q_2)

$$\delta = \varphi (a_2 - a_1) = \frac{(q_2 a_2^2 - q_1 a_1^2) (a_2 - a_1)}{E J^*}.$$

Пределы применимости приближенного решения. Приведенное решение основано на допущении, что сечение кольца не деформируется. Следовательно, для случая, показанного на рис. 14, а, изложенное решение неприменимо, тогда как для случая, изображенного на рис. 14, б, изложенное решение можно использовать.

Если $\frac{r_2}{r_1} < 1,4$, то целесообразно применять решение, основанное на формулах

(21) и (22), при $\frac{r_2}{r_1} > 1,4$ — более сложное решение [формулы (28) — (30)].

Для тонких пластинок ($\frac{h}{r_2 - r_1} < 0,2$) при $\frac{r_2}{r_1} > 2$ приближенное решение часто дает большие погрешности и приходится использовать теорию пластинок (см. гл. 23).

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Если тонкий прямой стержень сжимать вдоль оси, постепенно увеличивая силу P , то вначале он будет оставаться прямым, но затем при некоторой нагрузке $P_{кр}$, называемой *критической*, стержень начнет резко изгибаться. Это явление называют *потерей устойчивости* (рис. 1). При потере устойчивости напряжения быстро возрастают, что может привести к разрушению детали. Для нормальной работы большинства конструкций потеря устойчивости недопустима. Обычно допускаемая нагрузка не превышает $(0,5-0,7) P_{кр}$.

Чтобы найти величину критической силы $P_{кр}$, рассмотрим условия, при которых сжатый стержень может находиться в изогнутом состоянии в условиях равновесия (рис. 2). При малых прогибах справедливо обычное уравнение изгиба

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M = -Py$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0, \tag{1}$$

где

$$k^2 = \frac{P}{EJ}. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1)

$$y = A \sin kx + B \cos kx$$

для опертого по концам стержня должно удовлетворять граничным условиям

$$y(0) = y(l) = 0,$$

что возможно, если $B = 0$, $A \sin kl = 0$. Стержень может прогнуться ($A \neq 0$) только при условии $\sin kl = 0$. Пока сжимающая сила P мала, так что величина $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} <$

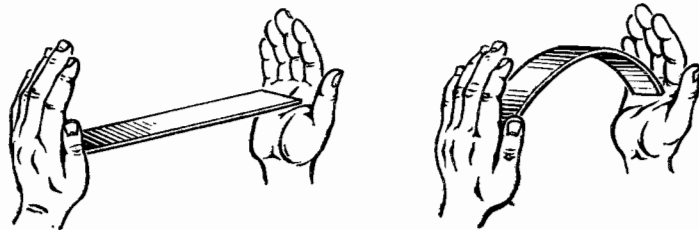


Рис. 1. Потеря устойчивости стержня при сжатии

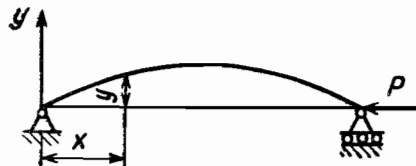


Рис. 2. Осевое сжатие двухопорного стержня

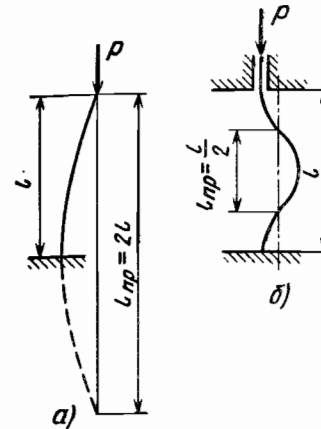


Рис. 3. Формы прогибов при потере устойчивости стержней

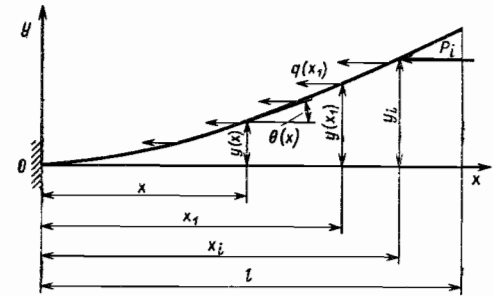


Рис. 4. К общему случаю расчета критической нагрузки

$< \frac{\pi}{l}$, значение $\sin kl \neq 0$, и стержень остается прямолинейным. При $k = \pi/l$ или

$$P = P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \tag{3}$$

прямолинейная форма становится неустойчивой, и стержень начинает изгибаться. При дальнейшем увеличении силы прогиба растут очень быстро. Так, для $1,0 \leq P/P_{кр} \leq 1,1$

$$\frac{y_{max}}{l} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{P_{кр}}{P}}, \tag{4}$$

т. е. если сжимающая сила превысит критическую всего на 1,5%, то стержень длиной в 1 м прогнется на 11 см.

Критическую силу определяют по минимальному моменту инерции сечения. Величина $P_{кр}$ зависит от условий закрепления, характера нагружения и конфигурации сечений стержня.

Из сравнения форм прогибов двухопорного стержня, консольного (рис. 3, а) и с двумя заделанными концами (рис. 3, б) видно, что условия потери устойчивости будут у них одинаковыми, если заменить длину стержня l «приведенной» длиной $l_{пр} = \nu l$; для консольного стержня $\nu = 2$, а для стержня с заделанными концами $\nu = 0,5$.

В общем случае формулу Эйлера можно представить в виде

$$P_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}, \tag{5}$$

где

$$\eta = \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^2. \tag{6}$$

Критической нагрузке соответствует напряжение сжатия

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{7}$$

где коэффициент λ характеризует приведенную гибкость стержня с учетом условий его опирания и нагружения:

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i} = \nu \frac{l}{i} = \frac{\pi}{\sqrt{\eta}} \frac{l}{i} \quad (8)$$

и

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}}.$$

С учетом выражения (7) формулу Эйлера (5) можно записать в виде

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EF}{\lambda^2}. \quad (9)$$

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ РАСЧЕТА КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Дифференциальное уравнение изгиба (1) можно записать в углах поворота $\theta = \frac{dy}{dx}$ как

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EJ}, \quad (10)$$

откуда

$$\theta(x) = \theta_0 + \int_0^x \frac{M(x_1) dx_1}{EJ(x_1)}; \quad \theta_0 = \theta(0). \quad (11)$$

При действии на стержень в сечениях x_i нескольких продольных сжимающих сил P_i и распределенной продольной нагрузки $q(x)$ (рис. 4)

$$M(x) = \sum_{i=1}^n P_i S_i [y_i - y(x)] + \int_x^l q(x_1) [y(x_1) - y(x)] dx_1, \quad (12)$$

где

$$S_i = S(x_i, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq x_i; \\ 0 & \text{при } x > x_i. \end{cases} \quad (13)$$

Учтя, что при защемлении стержня в сечении $x=0$

$$y(x) = \int_0^x \theta(x_1) dx_1; \quad \theta_0 = 0, \quad (14)$$

перейдем к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \bar{J} = \frac{J}{J_0}; \quad \bar{P}_i = \frac{P_i}{P_{\text{кр}}}; \quad \bar{q} = \frac{q}{q_0}; \quad \bar{Q} = \frac{Q}{P_{\text{кр}}}; \quad \eta = \frac{P_{\text{кр}} l^2}{EJ_0}, \quad (15)$$

где J_0 — значение J при $x=0$; $P_{\text{кр}}$ — критическое значение одной из нагрузок или их суммы; q_0 — значение q в некоторой выбранной точке; $Q = \int_0^l q(x) dx = \frac{q_0 l}{c}$;

$c^{-1} = \int_0^1 \bar{q}(\xi) d\xi$; \bar{P}_i , \bar{Q} — заданные отношения нагрузок при потере устойчивости.

Тогда из (11) — (15)

$$\theta(\xi) = \eta K[\theta(\xi)], \quad (16)$$

где $K[\theta(\xi)]$ — интегральный оператор;

$$K[\theta(\xi)] = \int_0^{\xi} \frac{1}{\bar{J}(\xi_1)} \left[\sum_{i=1}^n \bar{P}_i S_i \int_{\xi_i}^{\xi_2} \theta(\xi_2) d\xi_2 + \bar{Q} c \int_{\xi_1}^1 \theta(\xi_2) \int_{\xi_2}^1 \bar{q}(\xi_3) d\xi_3 d\xi_2 \right] d\xi_1. \quad (17)$$

Уравнение (16) решают методом последовательных приближений: по функции $\theta^{(m-1)}(\xi)$ находят $K^{(m)} = K[\theta^{(m-1)}(\xi)]$ и из условия минимума среднего квадратического отклонения [1] — значение

$$\eta^{(m)} = \frac{\int_0^1 \theta^{(m-1)}(\xi) K^{(m)}(\xi) d\xi}{\int_0^1 [K^{(m)}(\xi)]^2 d\xi} \quad (18)$$

и

$$\theta^{(m)}(\xi) = \eta^{(m)} K^{(m)}(\xi).$$

В качестве исходного приближения $\theta^{(0)}(\xi)$ выбирают функцию, удовлетворяющую кинематическим граничным условиям (для защемленного стержня $\theta(0) = 0$).

Пример. Найти коэффициент η для консольного стержня постоянного сечения, сжимаемого силой на конце ($\bar{J} = 1$, $\bar{Q} = 0$, $\bar{P}_1 = 1$, $\xi_1 = 1$). Приняв $\theta^{(0)} = \xi$, находим

$$K^{(1)}(\xi) = \int_0^{\xi} \int_{\xi_1}^1 \xi_2 d\xi_2 d\xi_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right);$$

$$\eta^{(1)} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right) d\xi}{\int_0^1 \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right)^2 d\xi} = \frac{42}{17} \approx 2,471,$$

что мало отличается от точного решения $\eta = \pi^2/4 \approx 2,467$.

В общем случае интегралы находят численно. При других граничных условиях меняется только вид оператора (17).

ТАБЛИЦЫ ДЛЯ РАСЧЕТА КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Значения коэффициента η для различных расчетных случаев, рассчитанные методом последовательных приближений, приведены в табл. 1. Чем больше величина η , тем лучше сопротивляется стержень потере устойчивости. При нагружении несколькими сжимающими силами коэффициентом η определяется сумма этих сил

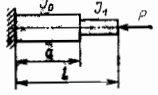
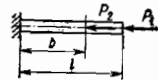

$$P_{\text{кр}} = \sum_{i=1}^n P_i + Q = \eta \frac{EJ_0}{l^2},$$

при нагружении сжимающей P_1 и растягивающими ($P < 0$) силами — величина

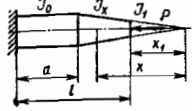
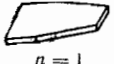



$$P_{\text{кр}} = P_{\text{кр}1} = \eta \frac{EJ_0}{l^2}.$$

* Расчеты выполнены Н. М. Малинкиной.


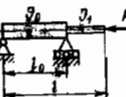
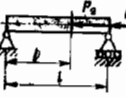
1. Таблицы для расчета коэффициента η

Схема и расчетная формула	λ	m									
		0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
 <p> $m = \frac{a}{l}$ $\lambda = \frac{J_1}{J_0}$ $P_{кр} = \eta \frac{EJ_0}{l^2}$ </p>	0,01	0,03	0,04	0,05	0,07	0,10	0,15	0,27	0,59	1,86	2,47
	0,05	0,15	0,19	0,24	0,32	0,45	0,67	1,08	1,81	2,39	
	0,10	0,30	0,37	0,46	0,61	0,82	1,14	1,63	2,17	2,43	
	0,20	0,59	0,70	0,86	1,08	1,34	1,69	2,07	2,34	2,45	
	0,30	0,86	1,01	1,19	1,41	1,68	1,97	2,23	2,40	2,46	
	0,40	1,12	1,28	1,46	1,68	1,92	2,14	2,32	2,42	2,46	
	0,50	1,37	1,53	1,70	1,89	2,08	2,24	2,37	2,44	2,46	
	0,60	1,61	1,75	1,90	2,05	2,20	2,32	2,40	2,45	2,47	
	0,80	2,06	2,14	2,22	2,30	2,36	2,41	2,44	2,46	2,47	
	1,00	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	
	1,50	3,35	3,08	2,88	2,73	2,62	2,55	2,50	2,48	2,47	
2,00	4,06	3,50	3,12	2,87	2,69	2,58	2,52	2,48	2,47		
5,00	6,50	4,58	3,66	3,19	2,84	2,66	2,55	2,49	2,47		
10,00	8,02	5,07	3,88	3,25	2,89	2,70	2,56	2,49	2,47		
 <p> $m = \frac{b}{l}$ $n = \frac{P_0}{P_1}$ При $P_2 > 0$ $(P_1 + P_2)_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}$ При $P_2 < 0$ $P_{1кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}$ </p>	100,00	191,41	57,60	27,18	15,20	9,75	6,79	5,00	3,84	3,04	2,47
	10,00	26,67	23,30	17,16	11,80	8,30	6,11	4,67	3,69	2,99	2,47
	5,00	14,68	13,78	11,75	9,27	7,12	5,53	4,38	3,55	2,94	2,47
	2,00	7,38	7,21	6,77	6,08	5,28	4,50	3,83	3,28	2,83	2,47
	1,00	4,93	4,87	4,72	4,47	4,13	3,76	3,38	3,04	2,73	2,47
	0,50	3,70	3,68	3,62	3,52	3,38	3,21	3,02	2,83	2,64	2,47
	0,30	3,21	3,20	3,17	3,12	3,04	2,94	2,83	2,71	2,58	2,47
	0,20	2,96	2,95	2,94	2,90	2,86	2,79	2,72	2,64	2,55	2,47
	0,10	2,71	2,71	2,70	2,69	2,67	2,64	2,60	2,56	2,51	2,47
	0,00	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47
	-0,10	2,47	2,47	2,48	2,49	2,51	2,54	2,58	2,63	2,68	2,74
-0,20	2,47	2,47	2,49	2,52	2,56	2,62	2,71	2,81	2,94	3,08	
-0,30	2,47	2,48	2,50	2,54	2,61	2,70	2,84	3,02	3,25	3,53	
-0,50	2,47	2,48	2,52	2,59	2,71	2,88	3,14	3,53	4,10	4,94	
-0,80	2,47	2,49	2,55	2,66	2,86	3,18	3,71	4,66	6,68	12,34	
-1,00	2,47	2,49	2,57	2,71	2,96	3,39	4,16	5,77	10,71	—	
-2,00	2,48	2,53	2,67	2,95	3,45	4,63	7,26	—	—	—	
-5,00	2,49	2,61	2,88	3,64	—	—	—	—	—	—	
-10,00	2,50	2,70	3,30	—	—	—	—	—	—	—	
 <p> $n = \frac{P_1}{P_2}$ $\lambda = \frac{J_1}{J_0}$ При $P_0 > 0$ $(P_1 + P_2)_{кр} = \eta \frac{EJ_0}{l^2}$ При $P_0 < 0$ $P_{1кр} = \eta \frac{EJ_0}{l^2}$ </p>	100,00	8,80	9,84	9,80	9,76	9,75	9,75	9,74	9,74	9,73	9,73
	10,00	1,09	6,82	7,74	8,20	8,28	8,30	8,33	8,34	8,35	8,35
	5,00	0,59	4,45	5,97	6,85	7,06	7,12	7,20	7,23	7,29	7,30
	2,00	0,30	2,39	3,64	4,84	5,16	5,28	5,42	5,49	5,61	5,65
	1,00	0,20	1,62	2,57	3,67	4,01	4,13	4,30	4,38	4,53	4,58
	0,50	0,15	1,22	1,97	2,93	3,26	3,38	3,55	3,63	3,79	3,84
	0,20	0,12	0,98	1,60	2,43	2,74	2,86	3,01	3,10	3,25	3,30
	0,10	0,11	0,90	1,47	2,26	2,56	2,67	2,82	2,90	3,05	3,10
	0,00	0,10	0,82	1,35	2,08	2,36	2,47	2,62	2,69	2,84	2,89
	-0,10	0,10	0,82	1,35	2,11	2,40	2,51	2,67	2,76	2,91	2,97
	-0,20	0,10	0,83	1,36	2,13	2,44	2,56	2,73	2,82	2,99	3,05
-0,50	0,10	0,83	1,38	2,21	2,57	2,71	2,91	3,02	3,23	3,31	
-1,00	0,10	0,83	1,41	2,34	2,78	2,96	3,24	3,40	3,71	3,83	
-2,00	0,10	0,84	1,44	2,54	3,16	3,45	3,94	4,24	4,96	5,26	
-5,00	0,10	0,87	1,56	—	—	—	—	—	—	—	
-10,00	0,10	0,89	—	—	—	—	—	—	—	—	

Продолжение табл. 1

Схема и расчетная формула	λ	m									
		0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
 <p> $\frac{J_x}{J_1} = \left(\frac{x}{x_1}\right)^n$; $m = \frac{a}{l}$; $\lambda = \frac{J_1}{J_0}$; $P_{кр} = \eta \frac{EJ_0}{l^2}$ </p>	0,01	1,47	1,62	1,78	1,94	2,10	2,24	2,34	2,41	2,45	2,47
	0,05	1,54	1,69	1,84	1,99	2,14	2,26	2,36	2,42	2,45	2,47
	0,10	1,62	1,76	1,90	2,04	2,17	2,28	2,37	2,43	2,45	2,47
	0,20	1,75	1,88	2,00	2,12	2,23	2,32	2,39	2,43	2,46	2,47
	0,30	1,87	1,97	2,08	2,18	2,27	2,35	2,40	2,44	2,46	2,47
	0,40	1,97	2,06	2,15	2,24	2,31	2,37	2,42	2,45	2,46	2,47
	0,50	2,06	2,14	2,22	2,29	2,35	2,39	2,43	2,45	2,46	2,47
	0,60	2,15	2,22	2,28	2,33	2,38	2,41	2,44	2,45	2,46	2,47
	0,80	2,32	2,35	2,38	2,40	2,43	2,44	2,45	2,46	2,47	2,47
	1,00	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47
	2,00	3,12	2,94	2,80	2,70	2,61	2,55	2,51	2,49	2,47	2,47
5,00	4,63	3,86	3,37	3,04	2,82	2,67	2,57	2,51	2,48	2,47	
 <p>$n = 1$</p>	0,01	0,86	1,01	1,18	1,40	1,65	1,91	2,16	2,33	2,43	2,46
	0,05	1,16	1,32	1,49	1,69	1,90	2,10	2,26	2,38	2,44	2,46
	0,10	1,35	1,50	1,67	1,85	2,02	2,18	2,31	2,40	2,45	2,47
	0,20	1,59	1,73	1,87	2,02	2,15	2,27	2,36	2,42	2,45	2,47
	0,30	1,76	1,88	2,01	2,12	2,23	2,32	2,39	2,43	2,46	2,47
	0,40	1,90	2,01	2,11	2,20	2,29	2,36	2,41	2,44	2,46	2,47
	0,50	2,02	2,11	2,19	2,27	2,33	2,38	2,42	2,45	2,46	2,47
	0,60	2,13	2,20	2,26	2,32	2,37	2,41	2,44	2,45	2,46	2,47
	0,80	2,31	2,34	2,38	2,40	2,42	2,44	2,45	2,46	2,47	2,47
	1,00	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47
	2,00	3,05	2,90	2,77	2,68	2,60	2,55	2,51	2,49	2,47	2,47
5,00	4,14	3,59	3,21	2,95	2,76	2,64	2,56	2,51	2,48	2,47	
 <p>$n = 2$</p>	0,01	0,64	0,76	0,91	1,11	1,36	1,68	2,00	2,26	2,41	2,46
	0,05	1,02	1,17	1,35	1,55	1,78	2,01	2,21	2,36	2,43	2,46
	0,10	1,25	1,40	1,58	1,76	1,96	2,14	2,29	2,39	2,44	2,46
	0,20	1,53	1,67	1,82	1,98	2,12	2,25	2,35	2,42	2,45	2,47
	0,30	1,73	1,85	1,98	2,10	2,22	2,31	2,38	2,43	2,46	2,47
	0,40	1,88	1,99	2,09	2,19	2,28	2,35	2,41	2,44	2,46	2,47
	0,50	2,01	2,10	2,18	2,26	2,33	2,38	2,42	2,45	2,46	2,47
	0,60	2,12	2,19	2,26	2,31	2,36	2,41	2,43	2,45	2,46	2,47
	0,80	2,31	2,34	2,37	2,40	2,42	2,44	2,45	2,46	2,47	2,47
	1,00	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47
	2,00	3,03	2,88	2,76	2,67	2,60	2,54	2,51	2,48	2,47	2,47
5,00	4,00	3,50	3,16	2,92	2,75	2,63	2,55	2,50	2,48	2,47	
 <p>$n = 3$</p>	0,01	0,54	0,64	0,78	0,97	1,21	1,52	1,88	2,20	2,39	2,46
	0,05	0,95	1,10	1,28	1,48	1,72	1,96	2,18	2,34	2,43	2,46
	0,10	1,20	1,38	1,53	1,72	1,92	2,11	2,27	2,38	2,44	2,46
	0,20	1,51	1,65	1,80	1,96	2,11	2,24	2,34	2,41	2,45	2,47
	0,30	1,71	1,84	1,96	2,09	2,21	2,31	2,38	2,43	2,46	2,47
	0,40	1,87	1,98	2,08	2,18	2,27	2,35	2,40	2,44	2,46	2,47
	0,50	2,00	2,09	2,18	2,26	2,32	2,38	2,42	2,45	2,46	2,47
	0,60	2,12	2,19	2,25	2,31	2,36	2,40	2,43	2,45	2,46	2,47
	0,80	2,31	2,34	2,37	2,40	2,42	2,44	2,45	2,46	2,47	2,47
	1,00	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47
	2,00	3,02	2,88	2,76	2,67	2,59	2,54	2,51	2,48	2,47	2,47
5,00	3,93	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,55	2,50	2,48	2,47	
 <p>$n = 4$</p>	0,01	0,54	0,64	0,78	0,97	1,21	1,52	1,88	2,20	2,39	2,46
	0,05	0,95	1,10	1,28	1,48	1,72	1,96	2,18	2,34	2,43	2,46
	0,10	1,20	1,38	1,53	1,72	1,92	2,11	2,27	2,38	2,44	2,46
	0,20	1,51	1,65	1,80	1,96	2,11	2,24	2,34	2,41	2,45	2,47
	0,30	1,71	1,84	1,96	2,09	2,21	2,31	2,38	2,43	2,46	2,47
	0,40	1,87	1,98	2,08	2,18	2,27	2,35	2,40	2,44	2,4	

Продолжение табл. 1

Схема и расчетная формула	λ	m										
		0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
 <p>$n = 0,5$</p>	0,01	1,96	2,06	2,15	2,24	2,31	2,37	2,42	2,45	2,46	2,47	2,47
	0,05	1,96	2,06	2,15	2,24	2,31	2,37	2,42	2,45	2,46	2,47	
	0,10	1,97	2,06	2,16	2,24	2,32	2,38	2,42	2,45	2,46	2,47	
	0,20	1,99	2,09	2,17	2,25	2,32	2,38	2,42	2,45	2,46	2,47	
	0,30	2,03	2,12	2,20	2,27	2,34	2,39	2,43	2,45	2,46	2,47	
	0,40	2,08	2,16	2,23	2,30	2,35	2,40	2,43	2,45	2,46	2,47	
	0,50	2,13	2,20	2,26	2,32	2,37	2,41	2,44	2,45	2,46	2,47	
	0,60	2,19	2,25	2,30	2,35	2,39	2,42	2,44	2,46	2,46	2,47	
	0,80	2,32	2,36	2,38	2,41	2,43	2,44	2,46	2,46	2,47	2,47	
	1,00	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	
	5,00	5,79	4,45	3,69	3,22	2,92	2,72	2,60	2,52	2,48	2,47	
 <p>$i = \frac{l_0}{l}$</p> <p>$\lambda = \frac{l_0}{J_0}$</p> <p>$P_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}$</p>	λ	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	9,87
	0,01	0,03	0,04	0,05	0,07	0,10	0,16	0,28	0,64	2,62		
	0,05	0,15	0,19	0,25	0,34	0,49	0,76	1,32	2,82	7,86		
	0,10	0,31	0,38	0,50	0,67	0,94	1,43	2,42	4,74	8,95		
	0,20	0,61	0,76	0,97	1,28	1,76	2,58	4,07	6,74	9,37		
	0,30	0,90	1,11	1,41	1,88	2,47	3,49	5,17	7,62	9,49		
	0,40	1,19	1,46	1,85	2,33	3,08	4,22	5,93	8,07	9,54		
	0,50	1,48	1,79	2,21	2,79	3,61	4,81	6,47	8,35	9,58		
	0,60	1,76	2,11	2,58	3,21	4,08	5,28	6,86	8,52	9,60		
	0,80	2,31	2,72	3,25	3,94	4,84	6,00	7,39	8,75	9,62		
	1,00	2,83	3,28	3,85	4,55	5,44	6,51	7,73	8,88	9,64		
1,50	4,08	4,54	5,08	5,72	6,45	7,29	8,20	9,06	9,66			
2,00	5,22	5,60	6,03	6,52	7,09	7,73	8,44	9,13	9,69			
5,00	10,44	9,50	8,91	8,59	8,49	8,59	8,77	9,28	9,69			
10,00	15,44	12,18	10,46	9,51	9,04	8,90	9,02	9,33	9,69			
 <p>$m = \frac{b}{l}$</p> <p>$n = \frac{P_2}{P_1}$</p> <p>При $P_2 > 0$</p> <p>$(P_1 + P_2)_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}$</p> <p>При $P_2 < 0$</p> <p>$P_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}$</p>	n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00	9,87
	100,0	36,4	22,9	19,49	18,67	18,67	18,20	16,55	14,24	11,95	9,87	
	10,0	31,6	21,2	18,28	17,52	17,50	17,15	15,82	13,83	11,77	9,87	
	5,0	27,5	19,73	17,22	16,54	16,51	16,24	15,16	13,45	11,60	9,87	
	2,0	20,7	16,75	15,16	14,67	14,63	14,48	13,81	12,63	11,24	9,87	
	1,0	16,37	14,50	13,45	13,13	13,09	13,01	12,62	11,86	10,88	9,87	
	0,5	13,46	12,55	12,03	11,85	11,82	11,78	11,53	11,14	10,53	9,87	
	0,3	12,11	11,5	11,28	11,17	11,15	11,13	11,06	10,72	10,32	9,87	
	0,2	11,46	11,0	10,86	10,78	10,76	10,75	10,67	10,48	10,20	9,87	
	0,1	10,65	10,45	10,35	10,35	10,34	10,33	10,29	10,19	10,05	9,87	
	0,0	9,87	9,87	9,87	9,87	9,87	9,87	9,87	9,87	9,87	9,87	
-0,1	10,07	10,28	10,34	10,38	10,39	10,40	10,44	10,55	10,7	10,97		
-0,2	10,26	10,61	10,84	10,94	10,96	10,98	11,07	11,33	11,76	12,34		
-0,3	10,47	11,06	11,39	11,56	11,60	11,62	11,78	12,21	12,99	14,10		
-0,5	10,83	11,86	12,62	13,01	13,09	13,12	13,45	14,39	16,27	19,74		
-0,8	11,53	13,28	14,85	15,86	16,10	16,14	16,78	19,03	25,9	49,4		
-1,0	11,97	14,30	16,65	18,34	18,82	18,82	19,64	23,2	37,0	—		
-2,0	13,99	18,79	24,3	31,3	—	—	—	—	—	—		

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРОГИБА И ВНЕЦЕНТРЕННОГО ПРИЛОЖЕНИЯ СИЛЫ НА ВЫПУЧИВАНИЕ СТЕРЖНЯ

Если в ненагруженном состоянии стержень имеет не вполне прямую ось, а сжимающая сила приложена с эксцентриситетом, так что с самого начала нагружения возникает изгибающий момент $M_0 = -Py_0$ (рис. 5), то уравнение изгиба для деформированного состояния принимает вид

$$EJ \frac{d^2(y-y_0)}{dx^2} = -Py \tag{19}$$

при граничных условиях $y(0) = y(l) = e$.
Положив, например,

$$y_0 = e + a \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{20}$$

получим из (19)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = -a \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \left(k^2 = \frac{P}{EJ}\right), \tag{21}$$

откуда, с учетом указанных граничных условий,

$$y = e \frac{\cos \left[0,5kl \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)\right]}{\cos 0,5kl} + \frac{a}{1 - \left(\frac{kl}{\pi}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{l}. \tag{22}$$

Максимальный упругий прогиб при $x/l = 0,5$

$$(y-y_0)_{\max} = e \left[\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{кр}}}} - 1 \right] + a \frac{\frac{P}{P_{кр}}}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}, \tag{23}$$

где $P_{кр}$ определяют по формуле (6).

Зависимость $\frac{(y-y_0)_{\max}}{l} = f\left(\frac{P}{P_{кр}}, \frac{e}{l}\right)$ при $a=0$ показана на рис. 6. В отличие от идеально прямого центрально нагружаемого стержня изгибные деформации (выпучивание) появляются с самого начала действия сжимающей силы. При приближении величины силы P к ее критическому значению $P_{кр}$ прогибы резко возрастают.

РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

В реальных конструкциях неизбежны некоторые отклонения оси стержня от прямолинейного направления и эксцентричное приложение сжимающих сил. Поэтому уже при нагрузках меньше критических начинается боковое выпучивание стержня

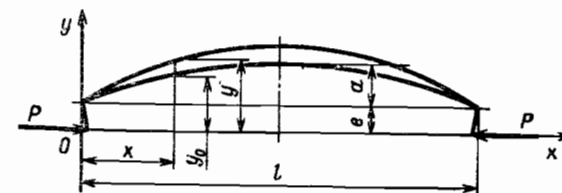


Рис. 5. Сжатие стержня с начальным прогибом и эксцентриситетом приложения силы

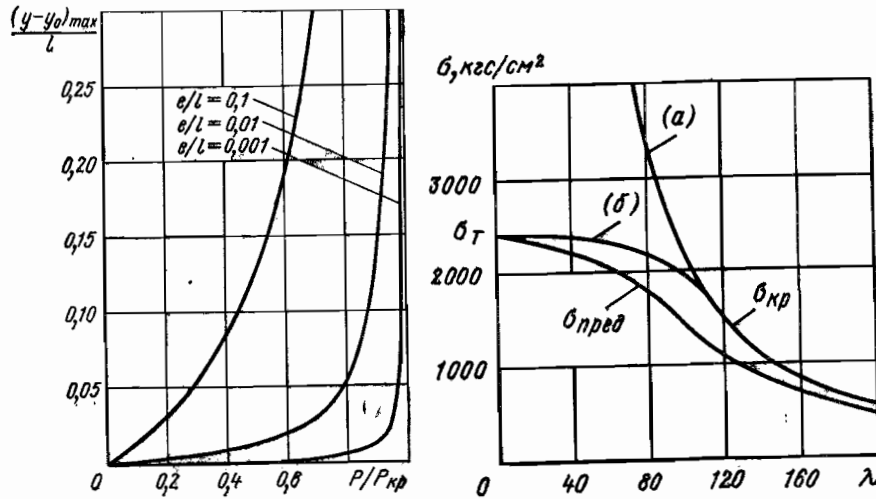


Рис. 6. Зависимость упругого прогиба эксцентрично сжатого стержня от величины сжимающей силы и эксцентриситета

Рис. 7. Зависимость предельного напряжения $\sigma_{пред}$ от гибкости λ для стали Ст3: a — критическое напряжение для упругого состояния; b — с учетом пластических деформаций

и напряжения в его поперечных сечениях распределяются неравномерно. Максимальное напряжение в сжато-изогнутом стержне при начальном прогибе a (рис. 5)

$$\sigma_{max} = \sigma \left(1 + \frac{F}{W} y_{max} \right), \quad (24)$$

где $\sigma = \frac{P}{F}$; W — момент сопротивления сечения при изгибе:

$$y_{max} = \frac{a}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_{кр}}}. \quad (25)$$

С учетом формул (7) — (9) получим

$$\sigma_{max} = \sigma \left(1 + \frac{N\lambda}{1 - \frac{\sigma\lambda^2}{\pi^2 E}} \right), \quad (26)$$

где

$$N = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{FJ}{W}}. \quad (27)$$

Когда максимальные напряжения σ_{max} достигнут предела текучести при сжатии σ_T , величина σ , определяющая сжимающую нагрузку, будет $\sigma = \sigma_{пред}$. Обозначив

$$\varphi = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_T} \leq 1 \quad (28)$$

и подставив в (26) соответствующие значения $\sigma_{max} = \sigma_T$ и $\sigma = \sigma_{пред}$, получим уравнение

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{N\lambda}{1 - \frac{\sigma_{пред}\lambda^2}{\pi^2 E}}, \quad (29)$$

связывающее коэффициент φ с гибкостью λ , свойствами материала σ_T/E и геометрическим параметром N .

На основании статистических данных можно считать, что влияние начального прогиба и эксцентриситета достаточно надежно учитываются, если принять

$$\frac{a}{l} \approx (1 + 2,5) 10^{-3}.$$

Величина $\frac{\sqrt{FJ}}{W} = 1$ для двутаврового, $\sqrt{3} = 1,73$ — для прямоугольного и 2 для круглого сечений. Считая в среднем $N \approx \sqrt{3} \cdot 10^{-3} = const$, можно из уравнения (29) найти для данного материала зависимость $\varphi(\lambda)$, определяющую величину $\sigma_{пред}$, как показано на рис. 7. При $\lambda \rightarrow 0$ величина $\varphi \rightarrow 1$, т. е. $\sigma_{пред} = \sigma_T$; при $\lambda \rightarrow \infty$ величина $\varphi \rightarrow \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \sigma_T}$, т. е. $\sigma_{пред} = \sigma_{кр}$.

Значения $\varphi(\lambda)$ для некоторых материалов приведены в табл. 2.

2. Значения коэффициента φ

Гибкость λ	Стали				Чугуны			Дерево	Гибкость λ	Стали				Дерево
	Ст2, Ст4	Ст5	15ГФ, 10Г2С1, 15ХСНД	10ХСНД	СЧ 15-32, СЧ 12-28, СЧ 18-36, СЧ 21-40	СЧ 24-44, СЧ 28-48	Ст2, Ст4			Ст5	15ГФ, 10Г2С1, 15ХСНД	10ХСНД		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	120	0,45	0,37	0,33	0,31	0,22	
10	0,99	0,98	0,98	0,98	0,97	0,95	0,99	130	0,40	0,32	0,29	0,27	0,18	
20	0,96	0,96	0,95	0,95	0,91	0,87	0,97	140	0,36	0,28	0,25	0,23	0,16	
30	0,94	0,93	0,92	0,92	0,81	0,75	0,93	150	0,32	0,25	0,23	0,20	0,14	
40	0,92	0,89	0,89	0,88	0,69	0,60	0,87	160	0,29	0,23	0,21	0,18	0,12	
50	0,89	0,85	0,84	0,82	0,57	0,43	0,80	170	0,26	0,21	0,19	0,16	0,11	
60	0,86	0,80	0,78	0,77	0,44	0,32	0,71	180	0,23	0,19	0,17	0,14	0,10	
70	0,81	0,74	0,71	0,68	0,34	0,23	0,61	190	0,21	0,17	0,15	0,12	0,09	
80	0,75	0,67	0,63	0,59	0,26	0,18	0,48	200	0,19	0,15	0,13	0,11	0,08	
90	0,69	0,59	0,54	0,50	0,20	0,14	0,38	210	0,17	0,14	0,12	0,10	—	
100	0,60	0,50	0,46	0,43	0,16	0,12	0,31	220	0,16	0,13	0,11	0,09	—	
110	0,52	0,43	0,39	0,36	—	—	0,26	—	—	—	—	—	—	

С учетом необходимого коэффициента запаса прочности n (для стали обычно $n = 1,6$) допускаемые максимальные напряжения при сжатии

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}, \quad (30)$$

а допускаемая величина средних по сечению напряжений

$$[\sigma]_{cp} = \varphi [\sigma]. \quad (31)$$

Поэтому условие прочности сжатых стержневых элементов конструкций с учетом возможности их бокового выпучивания принимает вид

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi [\sigma] \quad (32)$$

или, в часто употребляемой записи,

$$\frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]. \quad (33)$$

В формулы (32) — (33) подставляют площадь брутто (всю площадь сечения без учета местных ослаблений). При наличии значительных местных ослаблений производят дополнительную проверку на прочность по площади нетто F_n , учитывающей эти ослабления, по формуле

$$\frac{P}{F_n} \leq [\sigma]. \quad (34)$$

В общем случае нагружения гибкость λ определяют по формуле (8) с учетом значений коэффициента η по данным табл. 1.

В ряде случаев работоспособность конструкции может ограничиваться допустимыми значениями прогибов при боковом выпучивании сжатых стержневых элементов. Если нет специальных ограничений, то вводят допустимые предельные гибкости $[\lambda]$. Для основных строительных конструкций принимают $[\lambda] = 120$, для остальных допускают $[\lambda] = 150 \div 200$ [3].

Пример. Подобрать размеры двутаврового сечения для шарнирно опертого стержня длиной 2 м, сжатого силой 20 тс. Материал — Ст3 с $[\sigma] = 1600$ кгс/см².
 Задаемся произвольным значением коэффициента φ , например $\varphi = 0,5$, и определяем

$$F = \frac{P}{\varphi [\sigma]} = \frac{20\,000}{0,5 \cdot 1600} = 25 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем двутавр № 16 ($F = 26,1$ см², $i = 1,89$ см).
 Определяем гибкость

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{200}{1,89} = 106.$$

По табл. 2 находим $\varphi = 0,552$, что близко к принятому выше значению. Величина

$$\frac{P}{\varphi F} = \frac{20\,000}{0,552 \cdot 26,1} = 1385 \text{ кгс/см}^2$$

Условие прочности удовлетворительно, так как $1385 < 1600$.

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Формула (7) справедлива, пока напряжение $\sigma_{кр}$ не превышает предела пропорциональности материала $\sigma_{пц}$, т. е. для стержней достаточно большой гибкости $\lambda \geq \lambda_{пред}$, где

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$$

В качестве значений $\lambda_{пред}$ обычно принимают: для стали 90—105, дюралюминия 50—60, чугуна 55—80, дерева 110.

На практике многие элементы конструкций имеют гибкость меньше предельной $\lambda < \lambda_{пред}$. Потеря устойчивости таких стержней зависит от вида кривой деформирования материала. Стержни из материалов с выраженной площадкой текучести (малоуглеродистая сталь) теряют устойчивость, как только сжимающие

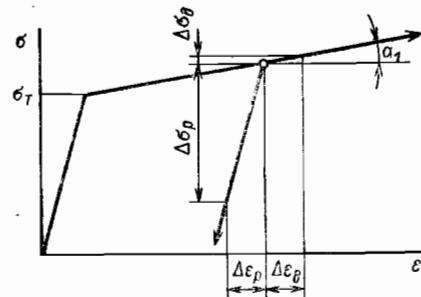


Рис. 8. Диаграмма деформирования линейно упрочняющегося материала

напряжения достигнут предела текучести, так как при $\sigma_{кр} = \sigma_T$ дальнейшее повышение напряжений невозможно, и возникающий при случайном малом отклонении стержня изгибающий момент остается неуравновешенным.

При определении критической силы стержней из упрочняющихся материалов, диаграмма деформирования которых приведена на рис. 8, учитывают, что если при постоянном значении сжимающей силы P произойдет случайное искривление оси стержня, то волокна у вогнутой (сжатой) стороны догрузятся по закону $\Delta \sigma_d = E_k \Delta \epsilon_d$, где $E_k = \text{tg } \alpha_1$ — касательный модуль, зависящий от положения точки на кривой деформирования, а волокна у выпуклой стороны — упруго разгрузятся по закону $\Delta \sigma_p = E \Delta \epsilon_p$. В этих условиях жесткость сечения стержня на изгиб определяют с помощью приведенного модуля $E_{пр}$ (модуля Кармана) из соотношения

$$E_{пр} J = \int_F E_1 y_1^2 dF = E \int_{F_p} y_1^2 dF + E_k \int_{F_d} y_1^2 dF,$$

где F_p и F_d — площади частей сечения, испытывающих соответственно разгрузку и догрузку. Граница между этими частями (положение нейтральной линии, от которой отсчитывают координату y_1) определяется условием

$$\int_F E_1 y_1 dF = E \int_{F_p} y_1 dF + E_k \int_{F_d} y_1 dF = 0,$$

Для прямоугольного сечения

$$E_{пр} = \frac{4EE_k}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_k})^2}, \quad (35)$$

для двутаврового сечения с тонкой стенкой

$$E_{пр} = \frac{2EE_k}{E + E_k}. \quad (36)$$

Напряжение, соответствующее критической силе

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E_{пр}}{\lambda^2}. \quad (37)$$

Так как $E_{пр} = f(\sigma_{кр})$, то для расчетов по формуле (37) вначале строят обратную зависимость

$$\lambda(\sigma_{кр}) = \pi \sqrt{\frac{E_{пр}(\sigma_{кр})}{\sigma_{кр}}}$$

Приведенный модуль $E_{пр}$ всегда меньше модуля упругости E , поэтому критическая сила с учетом упруго-пластических деформаций всегда меньше критической силы по формуле Эйлера.

ВЫПУЧИВАНИЕ СТЕРЖНЯ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Критическая нагрузка $P_{кр}$ определяет момент, когда малое случайное отклонение оси стержня при постоянном значении сжимающей силы приводит к внезапному интенсивному росту прогибов (теоретически, в линейной постановке, — до бесконечности). Пока нагрузка меньше критической и напряжения ниже предела пропорциональности, стержень сохраняет устойчивую прямолинейную форму и при постепенном возрастании сжимающей силы. Однако в упруго-пластической стадии нагружения, начиная с некоторого значения нагрузки $P_{кр} < P_{кр}$, прямолинейная форма равновесия при возрастающей нагрузке становится неустойчивой, что ведет к выпу-

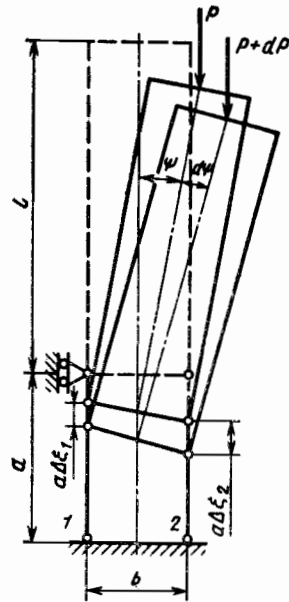


Рис. 9. Сжимаемая жесткая стойка на упруго-пластических стержнях

чиванию стержня, резко увеличивающемуся при приближении силы P к ее критическому значению $P_{кр}$, т. е. стержень ведет себя так же, как при внецентренном приложении силы.

Рассмотрим это явление на примере сжимаемой жесткой стойки, опирающейся на два упруго-пластических стержня, каждый площадью F (рис. 9). Пусть при некоторой нагрузке P и отклонении оси стойки на малый угол ψ она находилась в положении равновесия. Если при увеличении нагрузки на dP равновесие сохраняется, то должны удовлетворяться соотношения:

а) совместности деформаций

$$d\epsilon_2 - d\epsilon_1 = \frac{b}{a} d\psi; \quad (38)$$

б) равновесия *

$$d\sigma_1 + d\sigma_2 = \frac{dP}{F}; \quad d\sigma_2 - d\sigma_1 = \frac{2l}{bF} (P d\psi + \psi dP); \quad (39)$$

в) физические соотношения

$$d\epsilon_1 = \frac{d\sigma_1}{E_1}; \quad d\epsilon_2 = \frac{d\sigma_2}{E_2}, \quad (40)$$

где E_1, E_2 зависят от положения точки на диаграмме деформирования $\sigma = f(\epsilon)$ и знаков $d\sigma_1, d\sigma_2$. Исключив из выражений (38) — (40) приращение деформаций и $d\sigma$, получим

$$\frac{d\sigma_1}{dP} = \frac{1 - \frac{P}{P^*} - \frac{2l}{b} \psi}{2F \left(1 - \frac{P}{P^{**}}\right)}; \quad (41)$$

$$\frac{d\psi}{dP} = \frac{a}{b} \left[\frac{1}{E_2 F} - \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \right) \frac{d\sigma_1}{dP} \right], \quad (42)$$

где

$$P^* = \frac{b^2 E_2 F}{2la}; \quad P^{**} = P^* \frac{2E_1}{E_1 + E_2}. \quad (43)$$

Подставив $\frac{d\sigma_1}{dP}$ в выражение (42) и решив полученное дифференциальное уравнение при $E_1, E_2 = \text{const}$ и начальном условии $\psi = \psi_0$ при $P = P_0$, найдем закон изменения углов $\psi(P)$ для равновесных состояний:

$$\psi = \psi_0 \frac{P^{**} - P_0}{P^{**} - P} + \frac{b(E_1 - E_2)}{2l(E_1 + E_2)} \frac{P - P_0}{P^{**} - P}. \quad (44)$$

Пока напряжения в стержнях меньше предела пропорциональности, $E_1 = E_2 = E$, $P^* = P^{**} = P_{кр}^0$ и

$$\psi = \psi_0 \frac{P_{кр}^0 - P_0}{P_{кр}^0 - P},$$

* Положительные приращения $d\sigma$ здесь соответствуют сжатию.

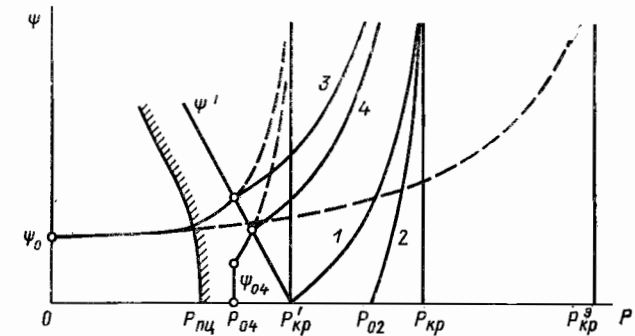


Рис. 10. Характер отклонения стойки при упруго-пластических деформациях

где $P_{кр}^0 = \frac{b^2 E F}{2la}$, т. е. при упругих деформациях равновесие в отклоненном положении при $P < P_{кр}^0$ возможно только при наличии начального отклонения $\psi_0 \neq 0$, как это было рассмотрено выше.

За пределом пропорциональности при догрузке стержня 2 и упругой разгрузке стержня 1, когда $d\sigma_1 < 0, d\sigma_2 > 0$, величины E_1 и E_2 различны ($E_1 = E, E_2 = E_k$, см, рис. 8). В этом случае

$$P^* = P'_{кр} = \frac{b^2 E_k F}{2la},$$

что соответствует замене в формуле для $P_{кр}^0$ величины E на касательный модуль E_k , а

$$P^{**} = P_{кр} = \frac{b^2 E_{пр} F}{2la},$$

где приведенный модуль $E_{пр}$ определяется формулой (36).

Согласно (41) условие упругой разгрузки $d\sigma_1 < 0$ выполняется, если величина P_0 находится в пределах

$$\left(1 - \frac{2l}{b} \psi_0\right) P'_{кр} < P_0 < P_{кр}. \quad (45)$$

В частности, при $\psi_0 = 0$ стержень будет оставаться прямолинейным, пока величина P_0 не достигнет значения $P'_{кр}$, так как при $P_0 < P'_{кр}$ из формулы (41) следует $d\sigma_1 > 0$, но тогда надо принять $E_1 = E_2 = E_k$ и $\psi = 0$. Как только P_0 превысит значение $P'_{кр}$, стойка начнет отклоняться от прямолинейного направления, при этом в соответствии с уравнением (44)

$$\psi = \frac{b(E - E_k)}{2l(E + E_k)} \frac{P - P'_{кр}}{P_{кр} - P}. \quad (46)$$

Зависимость (46) показана схематически на рис. 10 (кривая 1). Если искусственно задержать стойку в прямолинейном положении до некоторого значения $P_{о2} > P'_{кр}$, дальнейшее отклонение пойдет по линии 2. Там же показан характер протекания кривых выпучивания при начальном отклонении $\psi_0 \neq 0$ при $P_0 = 0$ (кривая 3, имеющая на разных участках разные асимптоты, как это показано штриховыми линиями), и при начальном отклонении $\psi_{о4}$, связанном с остаточными деформациями

после случайного наклона стойки при $P_{04} > P_{nc}$ (кривая 4). Линия

$$\psi' = \frac{b}{2l} \left(1 - \frac{P}{P'_{кр}} \right)$$

соответствует $\frac{d\sigma_1}{dP} = 0$, т. е. началу упругой разгрузки стержня 1 (при $P < P'_{кр}$).

Линия P_{nc} характеризует начало пластических деформаций. При слабом упрочнении величина $P'_{кр}$ может оказаться меньше P_{nc} , и тогда боковое выпучивание при возрастающей нагрузке начинается сразу, как только сжимающая сила достигнет величины P_{nc} . Если же и $P_{кр}$ станет меньше P_{nc} , то при $P = P_{nc}$ наступает потеря устойчивости.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ. ДЕЙСТВИЕ СЛЕДЯЩИХ НАГРУЗОК

В некоторых случаях нагружения стержней оценка потери устойчивости условно возможности появления формы статического равновесия в изогнутом состоянии (подход Эйлера) оказывается недостаточной.

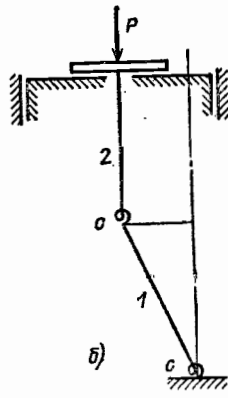
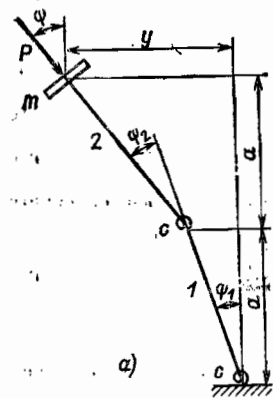


Рис. 11. Действие следящей нагрузки: а — общий случай; б — при $\bar{\rho} \rightarrow \infty$

в зависимости от деформации стержня (например, реактивная сила струи, электромагнитные силы в деформируемых проводниках и т. п.) критическую нагрузку можно найти только динамическим анализом.

Найдем критическое значение следящей касательной силы $P_{кр}$ в случае консольного стержня с сосредоточенной массой m на конце, момент инерции которой равен $\rho^2 m$, где ρ — радиус инерции. Для простоты заменим стержень системой из двух жестких стержней 1 и 2, связанных двумя упругими шарнирами с коэффициентами жесткости c (рис. 11, а).

При малом отклонении стержней перемещение y и угол поворота ψ массы соответственно равны:

$$y = a(2\psi_1 + \psi_2); \quad \psi = \psi_1 + \psi_2$$

и уравнения вращательного движения стержней принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 m \frac{d^2 \psi}{dt^2} + m \frac{d^2 y}{dt^2} a + c \psi_2 &= m \left[(2a^2 + \rho^2) \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + (a^2 + \rho^2) \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} \right] + c \psi_2 = 0; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} a + c (\psi_1 - \psi_2) + Pa \psi_2 &= ma^2 \left(2 \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} \right) + c \psi_1 + (Pa - c) \psi_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Если ψ_{10}, ψ_{20} — начальные отклонения, и $\frac{d\psi_1}{dt}(0) = \frac{d\psi_2}{dt}(0) = 0$, то устойчивому состоянию стержня будут соответствовать гармонические колебания

$$\psi_1 = \psi_{10} \cos \omega t; \quad \psi_2 = \psi_{20} \cos \omega t,$$

при которых из (47) получим однородную систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (2a^2 + \rho^2) \omega^2 \psi_{10} + \left[(a^2 + \rho^2) \omega^2 - \frac{c}{m} \right] \psi_{20} &= 0; \\ \left(2a^2 \omega^2 - \frac{c}{m} \right) \psi_{10} + \left[a^2 \omega^2 - \frac{Pa - c}{m} \right] \psi_{20} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Система (48) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю, т. е.

$$\omega^4 - 2\rho\omega^2 + q = 0, \quad (49)$$

где

$$\rho = \frac{1}{2a^2 \rho^2 m} [(5a^2 + 2\rho^2)c - (2a^2 + \rho^2)Pa]; \quad (50)$$

$$q = \left(\frac{c}{a\rho m} \right)^2.$$

Корни уравнения (50) определяются формулой

$$\omega^2 = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - q}. \quad (51)$$

В отсутствие сжимающей нагрузки $\rho^2 - q > 0$ и система имеет две различные собственные частоты колебаний

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{5c}{2a^2 m} \frac{1 + 0,4\bar{\rho}^2 \pm \sqrt{1 + 0,64\bar{\rho}^2 + 0,16\bar{\rho}^4}}{\bar{\rho}^2}, \quad (52)$$

где $\bar{\rho} = \frac{\rho}{a}$.

По мере увеличения сжимающей нагрузки P величина коэффициента ρ уменьшается и при

$$P_{кр} = \frac{5c}{2a} \frac{1 - 0,4\bar{\rho} + 0,4\bar{\rho}^2}{1 + 0,5\bar{\rho}^2} \quad (53)$$

выражение $\rho^2 - q$ обращается в нуль, а обе частоты колебаний системы принимают одинаковое значение:

$$\omega_{кр}^2 = \frac{c}{a^2 m \bar{\rho}}. \quad (54)$$

При увеличении силы P сверх критического значения система становится динамически неустойчивой, и ее движение после малого начального отклонения будет представлять собой колебания с неограниченно возрастающими амплитудами. Потеря устойчивости происходит в общем случае при значении $\omega_{кр} \neq 0$, поэтому отклоненной статической формы равновесия система не имеет. Но при очень большом моменте инерции концевой массы, когда $\bar{\rho} \rightarrow \infty$, значение $\omega_{кр} \rightarrow 0$, и в этом случае динамическая величина $P_{кр} = 2 \frac{c}{a}$ совпадает со статическим значением $P_{кр}$ для соответствующей системы с неповорачивающимся стержнем 2 (рис. 11, б).

Для упругого консольного стержня с сосредоточенной массой на конце коэффициент η критической величины следящей силы в формуле (5) равен $\eta = 20,19$ при $\bar{\rho} \rightarrow 0$ и $\eta = \pi^2 = 9,87$ при $\bar{\rho} \rightarrow \infty$. Для свободного стержня, к одному из концов которого приложена следящая толкающая сила, величина $\eta \approx 110$.

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАГРЕВЕ

Стержень, зажатый между неподвижными плоскостями, при нагреве до критической температуры $T_{кр}$ выпучивается. Свободный стержень при нагреве до $T_{кр}$ удлинился бы на величину $\alpha l T_{кр}$, где α — коэффициент линейного расширения. Сила, возвращающая его в прежнее положение,

$$P = EF\alpha T_{кр}. \quad (55)$$

Приравнивая силу P ее критическому значению $P_{кр} = \frac{\pi^2 EF}{\lambda^2}$, получим для стержня с шарнирно опертыми концами

$$T_{кр} = \frac{\pi^2}{\alpha \lambda^2}. \quad (56)$$

При дальнейшем нагреве стержень получит прогиб

$$y_{\max} \approx 2l \sqrt{\frac{T}{T_{кр}} - 1}. \quad (57)$$

Пример. Балка двутаврового сечения № 24а длиной $l = 6$ м, жестко заделанная по концам, равномерно нагревается по всей длине. Определить $T_{кр}$.

По сортаменту для двутавровых профилей находим $i = 2,42$ см. Для двусторонней заделки $\psi = 0,5$, поэтому

$$\lambda = \frac{\psi l}{i} = \frac{0,5 \cdot 600}{2,42} = 124;$$

$$T_{кр} = \frac{\pi^2}{\alpha \lambda^2} = \frac{\pi^2}{11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 124^2} = 55,7^\circ \text{C}.$$

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Простейшая динамическая система, состоящая из массы, закрепленной на пружине, показана на рис. 1.

Если в начальный момент отклонить массу на величину a и предоставить систему самой себе, то возникнут колебания, причем смещение центра массы в момент t будет

$$y = \cos pt, \quad (1)$$

где p — круговая частота колебания, $1/\text{с}$;

$$p = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (2)$$

здесь c — коэффициент жесткости пружины, кгс/см (усилие при осадке пружины на 1 см); m — масса груза.

Амплитуда колебаний, т. е. максимальное отклонение центра массы от положения равновесия, в данном случае равна a .

Наименьшее время между двумя совершенно одинаковыми положениями колеблющейся системы называют *периодом колебания*.

Если обозначить период колебания (в с) через T , то из равенства (1) вытекает

$$\cos pt = \cos p(t + T),$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{p}.$$

Частота колебания $f = 1/T$ — число полных колебаний в единицу времени (секунду). Частоту колебаний измеряют в Гц (герц — одно колебание в секунду).

Колебания системы без воздействия внешних сил называют *свободными*.

Так как в системе всегда имеются силы трения, то свободные колебания со временем затухают.

Если к системе приложена внешняя периодическая сила

$$Q = Q_0 \cos \omega t,$$

то возникают вынужденные колебания с частотой этой внешней силы,

Отклонение

$$y = a_0 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \cos \omega t, \quad (3)$$

где $a_0 = \frac{Q_0}{c}$ — осадка пружины при статическом действии амплитуды внешней силы; c — коэффициент жесткости пружины.

При совпадении частоты возбуждающей силы с частотой свободных колебаний амплитуда колебаний стремится к бесконечности. Этот случай называют *резонансом*.

В действительных условиях при наличии трения амплитуды при резонансе остаются конечными, но достигают значительной величины.

Резонанс представляет собой большую опасность для конструкции, и его следует избегать.

Одна из основных задач расчета конструкции на

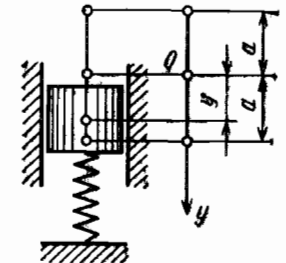


Рис. 1. Колебания одномассовой системы

вибрацию состоит в определении собственных частот колебаний и выявлении опасных (резонансных) частот.

Резонансы устраняют обычно изменением собственной частоты системы; в ряде случаев оказывается возможным изменить частоту возбуждающей силы.

Для определения частот собственных колебаний системы весьма эффективным оказывается метод динамических жесткостей.

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКИХ ЖЕСТКОСТЕЙ

Этот метод позволяет провести частотный анализ сложной механической системы при известных динамических жесткостях отдельных ее частей.

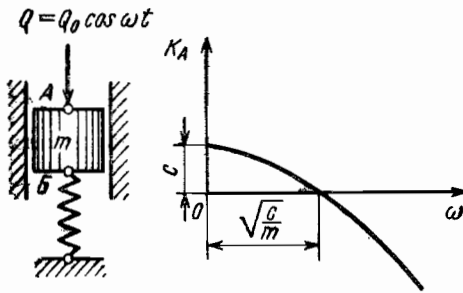


Рис. 2. Вынужденные колебания одномассовой системы

Рассмотрим вынужденные колебания одномассовой системы (рис. 2).

Частное решение уравнения движения

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + cy = Q_0 \cos \omega t, \quad (4)$$

соответствующее вынужденным колебаниям, будем искать в виде

$$y = a \cos \omega t. \quad (5)$$

Подставляя зависимость (5) в равенство (4), находим

$$a = \frac{Q_0}{-m\omega^2 + c}. \quad (6)$$

Отношение амплитудного значения силы к амплитудному значению смещения называют динамической жесткостью. Из равенства (6) следует, что динамическая жесткость

$$K_A = \frac{Q_0}{a} = -m\omega^2 + c, \quad (7)$$

здесь m — масса груза.

Зависимость K_A от ω показана на рис. 2. Размерность K_A — кг/см.

Динамическая жесткость определяется для заданной точки системы. Главной особенностью динамической жесткости является ее зависимость от частоты приложенной силы.

Если частота внешней силы равна нулю (статическая сила), то динамическая жесткость совпадает со статической, т. е. $K_A = c$.

Это равенство справедливо и для любых значений ω , если система не обладает массой.

Динамическая жесткость свободной от закреплений массы будет

$$K_m = -m\omega^2.$$

Статическая жесткость свободной массы равна нулю, но при действии периодической нагрузки масса оказывает сопротивление смещению подобно обычной пружине (силами инерции).

Равенство (7) можно представить в виде

$$K_A = K_B - m\omega^2, \quad (8)$$

где $K_B = c$ — динамическая жесткость системы в точке B .

Это равенство оказывается справедливым для любой цепной системы. Если известна динамическая жесткость в точке B , то динамическая жесткость после «перехода» через массу (K_A) получается добавлением ($-m\omega^2$). Определим теперь динами-

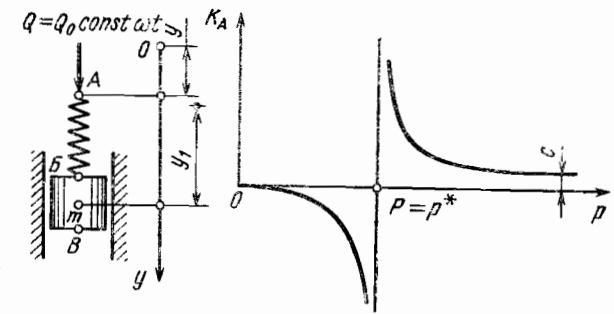


Рис. 3. Определение динамической жесткости

ческую жесткость в точке A системы, показанной на рис. 3. Уравнение движения массы

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = Q_0 \cos \omega t,$$

где y_1 — смещение центра массы от начального положения O_1 , откуда

$$y_1 = -\frac{Q_0}{m\omega^2} \cos \omega t.$$

Так как разность перемещений концов пружины равна $(y - y_1)$, то

$$c(y - y_1) = Q_0 \cos \omega t,$$

что вместе с предыдущим соотношением дает

$$y = Q_0 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{m\omega^2} \right) \cos \omega t = a \cos \omega t,$$

Динамическая жесткость

$$K_A = \frac{Q_0}{a} = \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{1}{m\omega^2}}. \quad (9)$$

Это равенство представим в виде

$$\frac{1}{K_A} = \frac{1}{c} - \frac{1}{m\omega^2} = \frac{1}{K_B} + \frac{1}{c}$$

или

$$K_A = \frac{K_B c}{K_B + c}, \quad (10)$$

где $K_B = -m\omega^2$ — динамическая жесткость в точке B ; c — статическая жесткость, равная динамической жесткости пружины.

Равенство (10) справедливо для любой системы. Если известна динамическая жесткость в точке B , то по этому равенству определяют динамическую жесткость в точке A после «перехода» через участок, обладающий только жесткостью.

Выясним зависимость величины K_A от частоты внешней силы. Запишем формулу (9) в виде

$$K_A = -m\omega^2 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p_*^2}}, \quad (11)$$

где $p_* = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — частота колебаний системы при закреплении в точке A .

Зависимость K_A от ω показана на рис. 3. При очень большой частоте масса становится «точкой опоры», $K_A \rightarrow c$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКИХ ЖЕСТКОСТЕЙ

Пусть система, показанная на рис. 4, совершает собственные колебания с частотой p . Если разрезать систему в какой-либо точке A , то на каждую ветвь системы будет действовать периодическая сила X , неизвестная по величине. Допустим, что положительное амплитудное смещение точки A , равно a , направлено вверх. Тогда динамическая жесткость в точке A для верхней ветви

$$K_{Av} = \frac{X}{a}$$

и соответственно для нижней ветви

$$K_{An} = -\frac{X}{a}.$$

Из этих равенств следует основное соотношение

$$K_{Av} + K_{An} = 0. \quad (12)$$

Так как динамические жесткости зависят от частоты p , то равенство (12) представляет собой алгебраическое уравнение для определения p (*характеристическое уравнение системы*). Корни уравнения (12) являются частотами собственных колебаний.

Для многомассовых систем уравнение (12) решают графическим методом: строят функции $f(p) = K_{An}$ и $\varphi(p) = -K_{Av}$, абсциссы точек пересечения которых дают значения собственных частот.

Уравнение (12) получено для сечения системы по внутренней точке.

Если сечение проходит через опору, то

$$K_A = \infty, \quad (13)$$

так как перемещение этой точки равно нулю.

В крайней точке системы

$$K_A = 0, \quad (14)$$

если эта точка свободна от закрепления.



Рис. 4. Сечение системы по методу динамических жесткостей

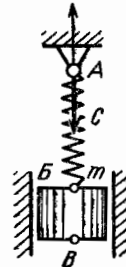


Рис. 5. Определение частот собственных колебаний одномассовой системы

Рассмотрим в качестве примера систему, показанную на рис. 5. Динамическую жесткость в точке A найдем с помощью «формулы перехода». В точке B

$$K_B = 0.$$

Переходя через участок с массой, будем иметь в силу равенства (8)

$$K_B = K_B - mp^2 = -mp^2.$$

Далее, переходя через участок с жесткостью, получим в соответствии с равенством (10)

$$K_A = \frac{K_B c}{K_B + c} = -\frac{mp^2 c}{c - mp^2}.$$

Так как сечение проходит через опору, то

$$K_A = \infty$$

и, следовательно,

$$c - mp^2 = 0,$$

откуда получаем частоту

$$p = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

В этом же примере можно найти частоту из условия $K_B = 0$, переходя от точки A к точке B .

В точке A

$$K_A = \infty.$$

Переходя к точке B , будем иметь

$$K_B = \frac{K_A c}{K_A + c} = c.$$

Далее находим

$$K_B = K_B - mp^2 = c - mp^2 = 0,$$

что дает полученное ранее значение p .

Для двухмассовой системы выберем сечение в точке возле массы m_1 (рис. 6). Для верхней ветви найдем последовательно

$$K_B = 0; \quad K_{Av} = K_B - m_1 p^2 = -m_1 p^2.$$

Для нижней ветви

$$K_{\Gamma} = 0; \quad K_B = K_{\Gamma} - m_2 p^2 = -m_2 p^2;$$

$$K_{An} = \frac{K_B c}{K_B + c} = -m_2 p^2 \frac{c}{c - m_2 p^2}.$$

Из уравнения (12) следует

$$-m_2 p^2 \frac{c}{c - m_2 p^2} - m_1 p^2 = 0, \quad (15)$$

что дает

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

Графическое решение уравнения (15) представлено на рис. 6.

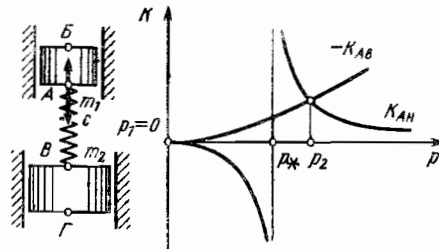


Рис. 6. Определение частоты собственных колебаний двухмассовой системы

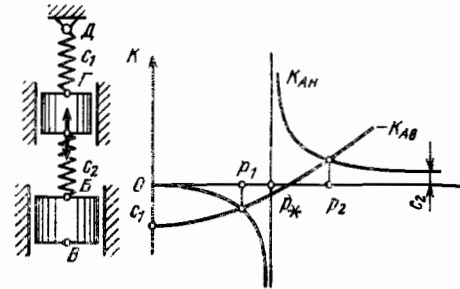


Рис. 7. Определение частоты собственных колебаний двухмассовой системы

Динамическая жесткость $K_{Ан}$ при значениях $p = \sqrt{\frac{c}{m_2}} = p_*$ имеет вертикальную асимптоту.

Определим частоты собственных колебаний системы (рис. 7): для нижней ветви

$$K_B = 0; \quad K_B = -m_2 p^2; \quad K_{Ан} = -\frac{m_2 p^2 c}{c_2 - m_2 p^2};$$

для верхней ветви

$$K_D = \infty; \quad K_D = \frac{K_D c_1}{K_D + c_1} = c_1;$$

$$K_{Ав} = c_1 - m_1 p^2;$$

из уравнения (12) следует

$$-\frac{m_2 p^2 c_2}{c_2 - m_2 p^2} + c_1 - m_1 p^2 = 0, \tag{16}$$

что дает два значения собственной частоты.

Графическое решение уравнения (16) дано на рис. 7. Величина $p_* = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$.

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В валах поршневых машин (в двигателях внутреннего сгорания, поршневых компрессорах и т. п.) нередко возникают *крутильные колебания*, связанные с неравномерностью (по времени) вращающего момента или момента сопротивления. Такие колебания могут возникать и в валах других машин, если крутящий момент, передаваемый валом, не является постоянным.

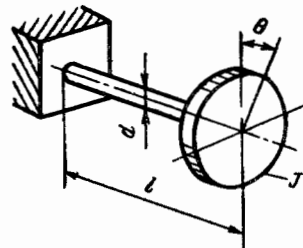


Рис. 8. Крутильные колебания

Расчет крутильных колебаний строят так же, как расчет односвязной цепной системы, изложенный ранее. Одной из основных задач расчета является определение собственных частот системы для выявления *резонансных оборотов*.

Одномассовая система. Пусть имеется вал постоянного сечения с закрепленным на нем диском (рис. 8),

Рассмотрим уравнение движения (вращения) диска при отклонении его от положения равновесия на угол θ :

$$J_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -M, \tag{17}$$

где J_m — момент инерции массы диска, кгс·см·с²; θ — угол поворота, рад; M — момент, действующий на диск, кгс·см.

Знак минус в правой части равенства показывает, что момент создается силами упругости, препятствующими отклонению. Если жесткость вала обозначить через c , причем эта величина представляет собой момент в кгс·см, необходимый для закрутки вала на 1 рад, то

$$M = c\theta. \tag{18}$$

Из равенства (17) получаем

$$J_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + c\theta = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\theta = A \cos pt + B \sin pt,$$

где p — круговая частота колебания:

$$p = \sqrt{\frac{c}{J_m}}. \tag{19}$$

Произвольные постоянные A и B определяют из начальных условий.

Если в момент $t = 0$, $\theta = a$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, то

$$\theta(t) = a \cos pt; \tag{20}$$

здесь a — амплитудное значение угла поворота при колебаниях.

Уравнение (20) полностью аналогично уравнению (1), причем вместо линейного смещения имеем угол поворота, вместо массы — момент инерции. Соответственным образом переносится и понятие динамической жесткости.

Жесткость вала на кручение. Для прямолинейного вала имеем

$$c = \frac{G J_p}{l}, \tag{21}$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль упругости материала на сдвиг, для сталей $G = (0,78 \div 0,83) 10^8$ кгс/см²; J_p — полярный момент инерции сечения; для сплошного вала

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32};$$

для вала с отверстием

$$J_p = \frac{\pi (d^4 - d_1^4)}{32};$$

здесь d — наружный диаметр; d_1 — диаметр отверстия.

Если сечение вала ослаблено шпоночными канавками или шлицами (рис. 9), то в формуле (21) следует принимать

$$J_p = \frac{\pi (d - kh)^4}{32},$$

где h — глубина канавки,

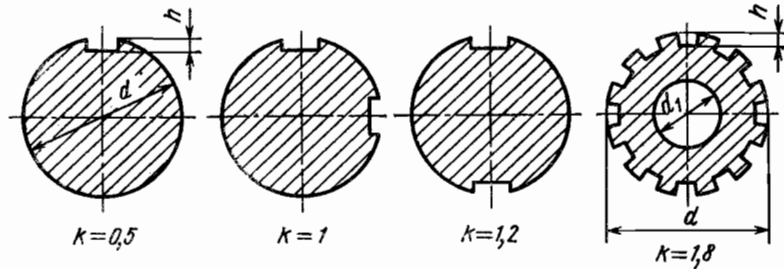


Рис. 9. Сечения валов

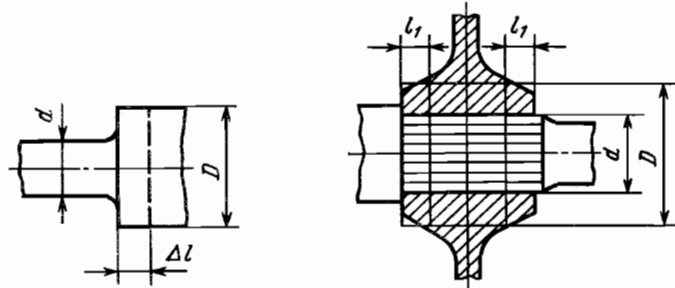


Рис. 10. Переходной участок вала

Рис. 11. Совместное кручение вала и втулки

Значения коэффициента k приведены на рис. 9. Для полого вала со шлицами

$$J_p = \frac{\pi [(d - 1,8h)^4 - d_1^4]}{32}$$

Если вал имеет ступенчатый переход (рис. 10), то участок с большим диаметром не сразу включается в работу.

В равенстве (21) длину с меньшим диаметром увеличивают на $\Delta l = kd$, причем при радиусе закругления $r = 0,1d$ можно принимать $k = 0,055$, если $\frac{D}{d} \leq 1,85$ и $k = 0,125$, если $\frac{D}{d} > 4$.

Если имеются часто повторяющиеся кольцевые выступы типа лабиринтных уплотнений, то при определении жесткости их не учитывают.

При совместной работе на кручение двух деталей, например при шлицевом соединении (рис. 11) или при прессовой посадке, принимают, что внутренний вал закручивается с каждой стороны на длине $l_1 \approx 0,25d$. При подсчете жесткости средней части учитывают жесткость втулки.

Момент инерции. Моментом инерции массы относительно оси называют сумму $\sum r^2 \Delta m$, распространенную на все частицы тела (здесь r — расстояние до оси вращения):

$$J_m = \int_V r^2 \rho dV,$$

где ρ — плотность материала; V — объем тела.

Для диска (рис. 12) будем иметь

$$J_m = 2\pi\rho \int_0^R r^3 h dr = \frac{1}{2} \pi R^4 h = \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2, \quad (22)$$

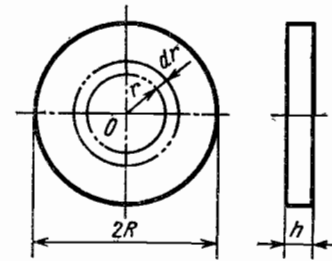


Рис. 12. К определению момента инерции диска

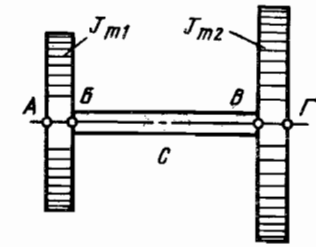


Рис. 13. Двухмассовая крутильная система

где G — вес диска, кгс; $g = 981$ см/сек² — ускорение свободного падения. Размерность момента инерции — кгс · см · с².

Для деталей сложной формы момент инерции определяют экспериментально. Один из методов состоит в том, что на тонком валу (проволоке) подвешивают деталь, момент инерции которой требуется определить. Отклоняя деталь от положения равновесия, вызывают крутильные колебания с периодом T . Затем к той же проволоке подвешивают диск, момент инерции которого J_{m1} известен. Если период колебания этого диска равен T_1 , то

$$J_m = J_{m1} \frac{T^2}{T_1^2}. \quad (23)$$

Частота крутильных колебаний. Для определения частот будем использовать метод динамических жесткостей.

Для двухмассовой системы (рис. 13) частоту можно определить из условия равенства нулю динамической жесткости в крайнем сечении.

Последовательно находим

$$\left. \begin{aligned} K_A &= 0; & K_B &= -J_{m1} p^2; & K_B &= \frac{-J_{m1} p^2 c}{c - J_{m1} p^2}; \\ K_{\Gamma} &= K_B - J_{m2} p^2 = -\frac{J_{m1} p^2 c}{c - J_{m1} p^2} - J_{m2} p^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Из равенства (24) получаем

$$p = \sqrt{\frac{c(J_{m1} + J_{m2})}{J_{m1} J_{m2}}}. \quad (25)$$

Эта система обладает еще и нулевой частотой, которая не представляет интереса при анализе колебаний.

Рассмотрим систему со многими массами (рис. 14) и в соответствии с методом динамических жесткостей разделим эту систему в сечении Γ .

Так как амплитудный угол поворота в сечении Γ для левых и правых частей одинаков, а направление крутящих моментов различно, то сумма динамических жесткостей левых ($K_{\Gamma л}$) и правых ($K_{\Gamma п}$) частей

$$K_{\Gamma л} + K_{\Gamma п} = 0. \quad (26)$$

Переходя от участка к участку, находим

$$\left. \begin{aligned} K_A &= 0; & K_B &= -J_{m1} p^2; \\ K_B &= -\frac{J_{m1} p^2 c_1}{c_1 - J_{m1} p^2}; \end{aligned} \right\}$$

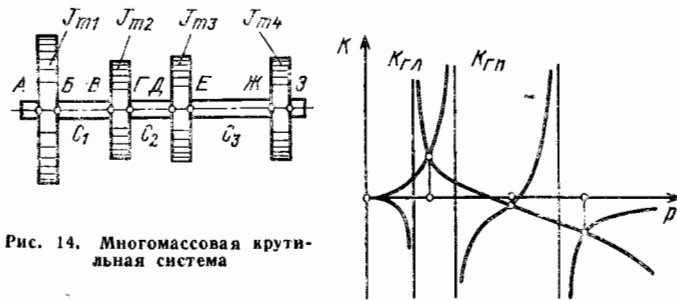


Рис. 14. Многомассовая крутильная система

далее

$$K_{ГЛ} = K_B - J_{m2} p^2 = \frac{J_{m1} J_{m2} p^4 - c_1 (J_{m1} + J_{m2}) p^2}{c_1 - J_{m1} p^2}.$$

Подобным способом получаем

$$K_3 = 0; \quad K_Ж = K_3 - J_{m4} p^2;$$

$$K_E = \frac{-J_{m4} p^2 c_3}{c_3 - J_{m4} p^2};$$

$$K_D = -\frac{J_{m4} p^2 c_3}{c_3 - J_{m4} p^2} - J_{m3} p^2 = \frac{J_{m3} J_{m4} p^4 - c_3 (J_{m3} + J_{m4}) p^2}{c_3 - J_{m4} p^2};$$

$$K_{ГП} = \frac{K_D c_2}{K_D + c_2} = \frac{c_2 [J_{m3} J_{m4} p^4 - c_3 (J_{m3} + J_{m4}) p^2]}{J_{m3} J_{m4} p^4 - [c_3 (J_{m3} + J_{m4}) + c_2 J_{m4}] p^2 + c_2 c_3}.$$

Затем строят графики $K_{ГЛ}$ и $K_{ГП}$ и находят точки их пересечения (резонансные частоты).

Предварительно определяют значения p_{i*} , при которых знаменатели обращаются в нуль (вертикальные асимптоты), и значения p_i , при которых числители обращаются в нуль.

Если представить динамические жесткости в виде отношения

$$K_{ГЛ} = \frac{f_1(p)}{\varphi_1(p)}; \quad K_{ГП} = \frac{f_2(p)}{\varphi_2(p)},$$

то отыскиваются, следовательно, нули функций $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ и функций $f_1(p)$ и $f_2(p)$.

В практических задачах при большом числе масс нули функций находят построением графиков функции. В рассматриваемом случае указанные значения можно получить из аналитических формул.

На рис. 14 показано решение уравнения, дающее собственные частоты колебаний.

Рассматриваемая система имеет четыре частоты, если считать также нулевую частоту.

В более сложных случаях частоту определяют с помощью специальных методов, из которых наиболее эффективным является метод Толле (метод остатка).

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебания этого вида связаны с изгибной деформацией стержней (например, колебания груза на несущих балках, колебания лопаток турбин и осевых компрессоров и т. д.).

Одномассовая система. Рассмотрим колебания груза на невесомом стержне (рис. 15).

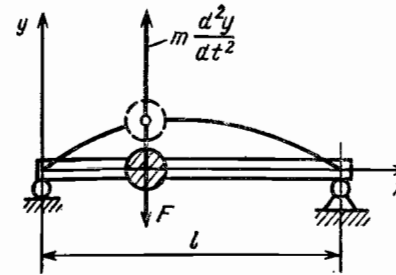


Рис. 15. Изгибные колебания одномассовой системы

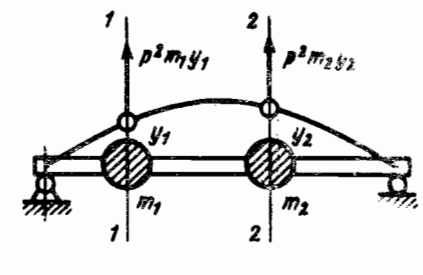


Рис. 16. Изгибные колебания двухмассовой системы

Уравнение движения массы

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -F, \quad (27)$$

где сила упругости

$$F = \frac{1}{\alpha} y. \quad (28)$$

В этом равенстве α — прогиб балки (в месте приложения груза) под действием единичной силы (коэффициент податливости).

Из уравнения (27) получаем

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{\alpha} y = 0. \quad (29)$$

Круговую частоту изгибных колебаний определяют по формуле

$$p = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}}.$$

Это равенство справедливо для любой *одномассовой системы*; груз может быть расположен между опорами или консольно, различие только в величине α .

Решение уравнения (29) при произвольных начальных условиях будет таким:

$$y = y_0 \cos(pt + \varphi),$$

где y_0 — амплитуда колебаний; φ — сдвиг фазы, зависящий от начальных условий.

Если подставить это соотношение в уравнение (29), то получим

$$p^2 m y_0 = \frac{1}{\alpha} y_0.$$

Последнее равенство можно истолковать следующим образом: сила упругости $\frac{1}{\alpha} y_0$ равна инерционному усилию $p^2 m y_0$, иными словами — амплитудный прогиб y_0 вызывается силой $p^2 m y_0$. Статическая аналогия состоит в том, что вместо колебаний рассматривают амплитудные отклонения системы, вызванные амплитудными величинами инерционных сил ($p^2 m y_0$ представляет собой инерционную силу в крайнем положении системы).

Двухмассовая система. Пусть балка несет две массы m_1 и m_2 (рис. 16). Амплитудный прогиб создается усилиями $p^2 m_1 y_1$ и $p^2 m_2 y_2$, поэтому

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} p^2 m_1 y_1 + \alpha_{12} p^2 m_2 y_2; \\ y_2 &= \alpha_{21} p^2 m_1 y_1 + \alpha_{22} p^2 m_2 y_2; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где коэффициенты податливости означают: α_{11} — прогиб в сечении 1—1 от единичной силы, приложенной в том же сечении; α_{12} — прогиб в сечении 1—1 от единичной силы, приложенной в сечении 2—2; α_{21} — прогиб в сечении 2—2 от единичной силы, приложенной в сечении 1—1; α_{22} — прогиб в сечении 2—2 от единичной силы, приложенной в том же сечении.

Коэффициенты податливости могут быть определены с помощью интеграла Мора. Из условия взаимности для упругих систем следует

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}.$$

Уравнения (30) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} (p^2\alpha_{11}m_1 - 1)y_1 + p^2\alpha_{12}m_2y_2 &= 0; \\ p^2\alpha_{21}m_1y_1 + (p^2\alpha_{22}m_2 - 1)y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Отсюда находим

$$\frac{y_1}{y_2} = -\frac{p^2\alpha_{12}m_2}{p^2\alpha_{11}m_1 - 1}; \quad \frac{y_1}{y_2} = -\frac{p^2\alpha_{22}m_2 - 1}{p^2\alpha_{21}m_1}.$$

Приравнявая эти отношения, получаем условие для определения собственной частоты ¹ (характеристическое уравнение):

$$p^4m_1m_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2) - p^2(\alpha_{11}m_1 - \alpha_{22}m_2) + 1 = 0.$$

Из последнего уравнения получены два значения частоты p_1 и p_2 :

$$p_1^2 = \frac{\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 - \sqrt{(\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2)^2 - 4m_1m_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}}{2m_1m_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}, \quad (32)$$

$$p_2^2 = \frac{\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 + \sqrt{(\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2)^2 - 4m_1m_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}}{2m_1m_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}. \quad (33)$$

Низшей частоте (p_1) соответствует форма колебания, когда обе массы движутся в одну сторону; частоте p_2 соответствует движение масс в разные стороны. Если система имеет n сосредоточенных масс, то она обладает таким же числом частот и форм колебаний ², причем каждой частоте соответствует своя форма колебаний (распределение амплитудных отклонений по массам).

Изгибные колебания стержней постоянного сечения. Задача имеет точное решение. Частоты колебаний определяют по формуле

$$p_n = \lambda_n \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (34)$$

где λ_n — безразмерный коэффициент, зависит от формы колебаний (наименьшая частота соответствует первой форме колебаний $n = 1$) и от условий закрепления. Значения λ_n приведены в табл. 1; n — номер формы колебаний ($n = 1, 2, 3, \dots$); l — длина стержня; E — модуль упругости материала; J — момент инерции сечения стержня; m — масса единицы длины стержня.

Если стержень не имеет равномерно распределенных присоединенных масс, то

$$m = \rho F,$$

где ρ — плотность материала стержня; F — площадь поперечного сечения,

Частота колебания в Гц

$$f_n = \frac{p_n}{2\pi}.$$

¹ В более общем случае характеристическое уравнение получается после приравнения нулю детерминанта системы однородных уравнений.

² Теоретически возможен случай, когда двум разным формам колебаний соответствует одинаковое значение частоты, но такой случай кратных частот не имеет практического значения.

1. Значения коэффициента λ в формуле (34)

Эскиз	Форма колебаний	Значение λ
		$\lambda_1 = 22,4$ $\lambda_2 = 61,7$ $\lambda_3 = 121,0$
		$\lambda_1 = 15,4$ $\lambda_2 = 50,0$ $\lambda_3 = 104,0$
		$\lambda_1 = 15,4$ $\lambda_2 = 50,0$ $\lambda_3 = 104,0$
		$\lambda_1 = 3,52$ $\lambda_2 = 22,04$ $\lambda_3 = 61,7$
		$\lambda_1 = \pi^2 = 9,87$ $\lambda_2 = 4\pi^2 = 39,5$ $\lambda_3 = 9\pi^2 = 88,9$
		$\lambda_1 = 22,4$ $\lambda_2 = 61,7$ $\lambda_3 = 121,0$

2. Формулы для определения собственной (круговой) частоты некоторых систем

Эскиз	Частота
	$\rho = \sqrt{\frac{c}{m}}$
	$\rho = \sqrt{\frac{C}{J_m}}$
	$\rho_1 = 0;$ $\rho_2 = \sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$
	$\rho_1 = 0;$ $\rho_2 = \sqrt{\frac{c(J_{m1} + J_{m2})}{J_{m1} J_{m2}}}$
 Зубчатая передача при несомых шестернях и валах	$\rho_1 = 0;$ $\rho_2 = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{i^2}{c_2}} \frac{i^2 (J_{m1} + J_{m2})}{J_{m1} J_{m2}}}$
	$\rho_{1,2}^2 = \frac{c_2(m_1 + m_2) + c_1 m_2}{2m_1 m_2} \mp \sqrt{\frac{[c_2(m_1 + m_2) + c_1 m_2]^2 - 4m_1 m_2 c_1 c_2}{2m_1 m_2}}$
	$\rho = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$
	$\rho = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} \frac{1}{m}}$
	$\rho_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{J_{m1}} + \frac{c_2}{J_{m3}} + \frac{c_1 + c_2}{J_{m2}} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1}{J_{m1}} + \frac{c_2}{J_{m3}} + \frac{c_1 + c_2}{J_{m2}} \right)^2 - \frac{4c_1 c_2}{J_{m1} J_{m2} J_{m3}}}$

Продолжение табл. 2

Эскиз	Частота
 Стержень с распределенной массой (крутильные колебания)	$\rho_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GT}{\rho J_p}}$ $n = 1, 2, 3, \dots$
	$\rho_n = n \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GT}{\rho J_p}}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Обозначения: m — масса груза; J_m — момент инерции массы, кгс · см²; J_p — полярный момент инерции; c — жесткость; GT — жесткость сечения стержня на кручение; ρJ_p — полярный момент инерции единицы длины; $i = \frac{z_2}{z_1}$ — передаточное число.

3. Коэффициенты податливости α при изгибных колебаниях

Эскиз	α	Эскиз	α
	$\frac{l^3}{3EJ}$		$\frac{a^3 b^2}{3EJ_1 l^2} + \frac{a^2 b^3}{3EJ_2 l^2}$
	$\frac{l^3}{48EJ}$		$\frac{ab^2}{3EJ_1} + \frac{b^3}{3EJ_2}$

Обозначения: m — масса груза; EJ — жесткость стержня на изгиб.

Изгибные колебания колец. Рассмотрим изгибные колебания кольца постоянного сечения с равномерно распределенными массами.

Плоские колебания кольца с двумя узловыми диаметрами показаны на рис. 17, а. Круговую частоту колебаний определяют по формуле

$$\rho_n = \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{EJ_1}{m}}, \quad (35)$$

где n — число узловых диаметров (номер формы колебаний¹), ($n = 1, 2, 3, \dots$); r — радиус кольца; EJ_1 — жесткость сечения на изгиб в плоскости кольца; m — масса единицы длины.

¹ Колебанию с одним узловым диаметром ($n = 1$) соответствует нулевая частота.

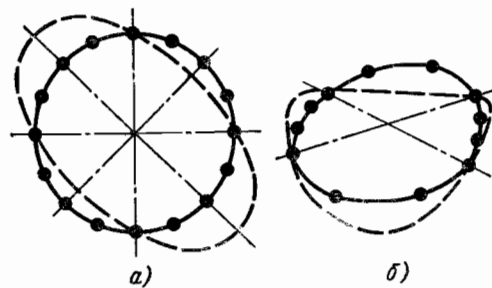


Рис. 17. Колебания колец с равномерно распределенными присоединенными массами

Поперечные колебания струны. Круговую частоту поперечных колебаний струны определяют по формуле

$$\rho_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}}, \quad (37)$$

где n — номер формы колебаний ($n = 1, 2, 3, \dots$); l — длина струны; H — усилие натяжения струны; m — масса единицы длины струны.

ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Значения круговых частот колебаний некоторых динамических систем приведены в табл. 2, а коэффициент податливости при изгибных колебаниях — в табл. 3.

Для колебаний, перпендикулярных к плоскости кольца (рис. 17, б), будем иметь

$$\rho_n = \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + \frac{EJ_2}{GT}}} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{m}}, \quad (36)$$

где GT — жесткость сечения кольца на кручение; EJ_2 — жесткость сечения на изгиб относительно главной оси, лежащей в плоскости кольца. Остальные обозначения те же, что и в формуле (35).

Глава 22

КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ ВАЛОВ

ВАЛ С ОДНИМ ДИСКОМ

Понятие критической частоты вращения. Рассмотрим вал на двух опорах с диском посередине (рис. 1), вращающийся с угловой скоростью ω .

Для того чтобы выяснить, является ли вращение вала с прямолинейной осью устойчивым, предположим, что вал получил некоторое отклонение и центр тяжести диска стал двигаться по окружности радиуса y . Тогда на диск действуют центробежная сила и сила упругости

$$C = \omega^2 m y; \quad F = \frac{1}{\alpha} y,$$

где m — масса диска; α — прогиб среднего сечения вала от действия единичной силы для вала постоянного сечения

$$\alpha = \frac{l^3}{48EJ}.$$

Если $C < F$, то после отклонения вал снова вернется в первоначальное положение, т. е. прямолинейное положение оси является *устойчивым*.

В момент равновесия, т. е. в момент начала потери устойчивости, когда $C = F$, прогибы могут безгранично возрастать. В этом случае центробежные силы в отклоненном положении равны силам упругости, стремящимся вернуть вал в исходное состояние. Частоты вращения, при которых наступает равенство центробежных сил и сил упругости, называют *критическими*.

При критическом значении ω величина $C = F$, отсюда

$$\omega_k^2 m y = \frac{1}{\alpha} y$$

или

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}}. \quad (1)$$

Критическая частота вращения в об/мин

$$n_k = \frac{30\omega_k}{\pi}.$$

Равенство центробежных сил и сил упругости имеет место при любой величине прогиба, так как в пределах применимости линейной теории обе указанные силы пропорциональны прогибам.

Можно представить, что при критической частоте вращения вал совершенно теряет жесткость на изгиб; даже малая сила может вызвать значительные прогибы.

Из равенства (1) следует, что критическая угловая скорость совпадает с круговой частотой поперечных (изгибных) колебаний вала. Этот вывод справедлив и в общем случае, если детали, закрепленные на валу, рассматривают как точечные массы.

Учет начального эксцентриситета центра тяжести диска. В практических задачах центр тяжести диска имеет некоторое смещение относительно своей геометрической оси и, следовательно, оси вала.

Для уменьшения этого эксцентриситета быстровращающиеся валы подвергают балансировке, которая,

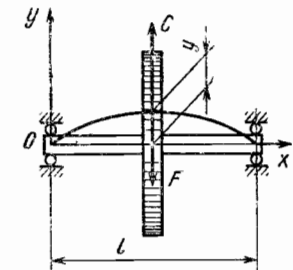


Рис. 1. Вал на двух опорах с диском посередине

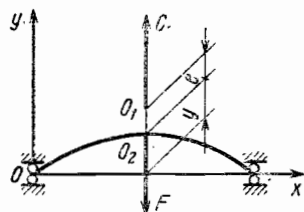


Рис. 2. Начальный эксцентриситет диска

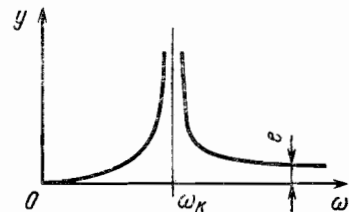


Рис. 3. Зависимость прогиба вала от угловой скорости

однако, имеет ограниченную точность. Например, детали весом 100—300 кгс балансируют обычно с точностью порядка 50—100 кгс·см. Кроме того, следует учесть, что в рабочих условиях вследствие нагрева, остаточных деформаций и других причин дисбаланс возрастает.

При наличии эксцентриситета вал получает прогибы даже при малой угловой скорости, так как к нему приложена неуравновешенная сила.

Обозначим абсолютную величину эксцентриситета диска e (величине e соответствует дисбаланс Ge , где G — вес диска).

На диск действуют сила инерции C и сила упругости F (рис. 2).

Предполагая величины y и e положительными, получим

$$C = \omega^2 m (y + e); \quad F = \frac{1}{\alpha} y. \quad (2)$$

Из условия равновесия следует $C = F$.

Подставляя в это равенство зависимости (2), находим

$$y = \frac{e\omega^2 m}{\frac{1}{\alpha} - \omega^2 m} = \frac{e}{\frac{\omega_k^2}{\omega^2} - 1}. \quad (3)$$

Если угловая скорость вращения ω меньше критической угловой скорости ω_k , то решение соответствует положительной величине y (направление прогиба и эксцентриситета совпадают, см. рис. 2).

При $\omega > \omega_k$ (закритический режим) величина $y < 0$ (направление эксцентриситета и прогиба противоположны). В закритической области центр тяжести диска расположен ближе к оси вращения, чем точка крепления диска к валу.

Из уравнения (3) следует, что при очень больших угловых скоростях ($\omega \rightarrow \infty$) $y = -e$, т. е. центр тяжести диска оказывается на оси вращения.

Такое явление называют *самоустановлением вала* в закритической области. Рассмотрим теперь критический режим, когда $\omega = \omega_k$.

Из уравнения (3) следует, что при совпадении угловой скорости с критической угловой скоростью прогибы вала неограниченно возрастают.

Зависимость прогиба вала от ω показана на рис. 3. Подобным образом возрастает и реакция на опоры.

В действительности прогибы при $\omega = \omega_k$ остаются конечными, так как всегда существуют ограничения (защемление в подшипниках, трение и т. п.), и, кроме того, при больших деформациях нарушается линейная зависимость между силой и перемещением.

Однако приближение угловой скорости к критической может оказаться опасным, и поэтому зону частот вращения от $0,7 n_k$ до $1,3 n_k$ не рекомендуется использовать для рабочих режимов.

Во всех случаях желательно работать с жесткими роторами (валами), для которых $\omega < 0,7 \omega_k$.

Работа вала с одним диском при $\omega \geq \omega_k$ возможна, но при этом часто требуются специальные деформирующие опоры для прохождения через критические частоты

и для успокоения вибрации в закритической области.

Если вал имеет несколько дисков и соответственно несколько критических угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, то критическое состояние наступает при совпадении угловой скорости с любой из критических скоростей.

Для устойчивой работы вала диапазон частот вращения

$$0,7\omega_i < \omega < 1,3\omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

рекомендуется исключить из рабочих режимов.

Для вала с несколькими дисками условия для устойчивой работы в закритической области ($\omega > \omega_1$) более благоприятны, чем для вала с одним диском.

Учет упругости опор. В действительных условиях опоры вовлекаются в колебания. Если пренебречь массой опоры, то в простейшем случае ее можно схематизировать в виде пружины (рис. 4).

Предположим для простоты, что опоры обладают одинаковой жесткостью. Для определения критических частот вращения следует рассмотреть равновесие системы при изогнутой оси вала. Центр тяжести диска будет перемещаться по окружности радиуса y , центры опор — по окружности радиуса y_0 .

Если α_0 — коэффициент податливости опоры в см/кгс, то

$$y_0 = \alpha_0 R.$$

Далее следует учесть равенства

$$C = \omega_k^2 m y; \quad (4)$$

$$C = \frac{1}{\alpha} (y - y_0), \quad (5)$$

где α — коэффициент податливости вала.

Так как $R = 0,5 C$, то из уравнения (5) следует

$$C = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} y. \quad (6)$$

Приравнявая соотношения (4) и (6), находим

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\alpha}}} = \omega_{kж} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\alpha}}}, \quad (7)$$

где

$$\omega_{kж} = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}} \quad (8)$$

является критической угловой скоростью вала на жестких опорах.

Из формулы (7) следует, что поправка, связанная с учетом податливости опор, зависит от податливости вала.

Одни и те же опоры можно рассматривать как жесткие или как податливые в зависимости от жесткости вала. В практических конструкциях податливость опор составляет обычно $\alpha_0 = (5 + 20) \cdot 10^{-6}$ см/кгс, причем податливость подшипников качения для вала диаметром 60—80 мм приблизительно равна $(1 + 3) \cdot 10^{-6}$ см/кгс.

При критических частотах вращения в валу возникают постоянные по времени напряжения, тогда как в опорах напряжения будут изменяться по времени, что способствует увеличению сил демпфирования.

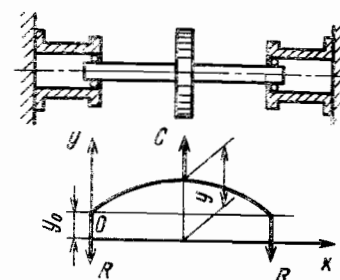


Рис. 4. Вал на упругих опорах

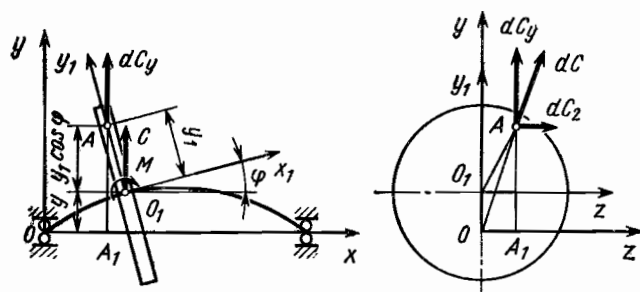


Рис. 5. Гироскопический эффект диска

В технике применяют конструкции, в которых относительно жесткий ротор закреплен на податливых опорах. В силу этого критическая частота может лежать в рабочем диапазоне ($\omega_k < \omega$), но, как показала практика, это не нарушает нормальную работу.

Прогибы ротора при критических частотах вращения всей системы оказываются малыми, если критическая частота вращения ротора на жестких опорах превышает максимальную ($\omega_{кж} > \omega$).

Учет гироскопического эффекта дисков. Рассмотрим центробежные силы, действующие на диск (рис. 5). Ось x является осью вращения, ось x_1 направлена по оси диска. Пусть элемент массы dm находится в точке A . К нему приложена центробежная сила dC , действующая в плоскости вращения, причём

$$dC = dm\omega^2 r,$$

где r — длина отрезка OA .

Центробежная сила dC может быть разложена на две составляющие dC_y и dC_z , но усилия dC_z вследствие симметрии образуют взаимно уравновешенную систему сил и для дальнейшего не существенны.

Усилие

$$dC_y = \omega^2 dm (y + y_1 \cos \varphi), \quad (9)$$

так как отрезок $AA_1 = y + y_1 \cos \varphi$ представляет собой проекцию отрезка OA на плоскость xy .

Приведем все нагрузки, действующие на диск, к силе C и паре сил M , приложенным в центре тяжести диска.

Сила

$$C = C_y = \int dC_y = \omega^2 \int (y + y_1 \cos \varphi) dm,$$

интеграл распространяется на весь объем диска.

Величины y (смещение центра тяжести) и φ (угол поворота плоскости диска) одинаковы для всех точек диска и могут быть вынесены из-под знака интеграла.

Тогда

$$C = \omega^2 y \int dm + \omega^2 \cos \varphi \int y_1 dm.$$

Учитывая, что

$$\int y_1 dm = 0,$$

как статический момент относительно прямой, проходящей через центр тяжести, получим

$$C = \omega^2 m y, \quad (10)$$

где m — масса всего диска,

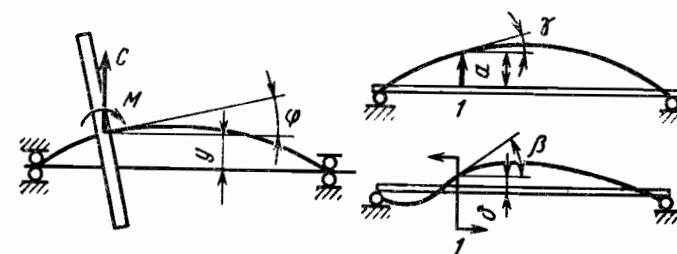


Рис. 6. Влияние гироскопического эффекта на критическую частоту вращения вала

Но центробежные силы создают еще и момент, который для рассматриваемого вида движения¹ (диск неподвижен относительно плоскости, содержащей изогнутую ось вала) может быть легко определен.

Этот момент называют *гироскопическим*

$$M = \int dC_y y_1 \sin \varphi dm$$

или с учетом соотношения (9)

$$M = \omega^2 \int (y + y_1 \cos \varphi) y_1 \sin \varphi dm.$$

Последний интеграл разбивается на два:

$$M = \omega^2 y \sin \varphi \int y_1 dm + \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi \int y_1^2 dm,$$

из которых первый равен нулю.

Таким образом,

$$M = \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi J_m,$$

где $J_m = \int y_1^2 dm$ — осевой момент инерции, кгс·см·с².

Для тонких дисков $J_m = 0,5 J_p$.

Так как рассматриваются малые отклонения вала от прямолинейной формы, то $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$.

Момент, создаваемый диском,

$$M = \omega^2 J_m \varphi, \quad (11)$$

При малых углах поворота

$$\varphi \approx \frac{dy}{dx};$$

$$M = \omega^2 J_m \frac{dy}{dx}.$$

Существенно, что этот момент препятствует прогибу. Следовательно, с учетом гироскопического момента критические числа оборотов повышаются.

Перейдем к определению критических частот вращения вала с одним диском с учетом гироскопического момента (рис. 6).

¹ Это движение называют прямой синхронной прецессией. Возможны и другие более сложные движения вала, напоминающие движение гибкого валика во вращающейся трубчатой обойме. Такого рода движения на практике встречаются очень редко.

Под действием силы C и момента M вал в месте крепления диска прогибается на величину y и поворачивается на угол φ :

$$y = \alpha C - \delta M; \quad \varphi = \gamma C - \beta M, \quad (12)$$

где α и γ — прогиб и угол поворота от действия единичной силы; δ и β — прогиб и угол поворота от действия единичного момента.

Направление единичных силовых факторов показано на рис. 6. По условию взаимности упругих систем величины γ и δ численно равны.

Подставляя равенства (10) и (11) в уравнение (12), получим

$$y = \omega^2 \alpha m y - \omega^2 \gamma J_m \varphi;$$

$$\varphi = \omega^2 \gamma m y - \omega^2 \beta J_m \varphi$$

или

$$y (\omega^2 \alpha m - 1) - \varphi \omega^2 \gamma J_m = 0; \quad (13)$$

$$y \omega^2 \gamma m - \varphi (\omega^2 \beta J_m + 1) = 0. \quad (14)$$

Приравняв отношение y к φ из равенств (13) и (14), находим

$$\frac{\omega^2 \gamma J_m}{\omega^2 \alpha m - 1} = \frac{\omega^2 \beta J_m + 1}{\omega^2 \gamma m}$$

или

$$\omega^4 (\alpha \beta - \gamma^2) m J_m + \omega^2 (\alpha m - \beta J_m) - 1 = 0.$$

Из последнего уравнения получаем величину критической угловой скорости

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} (\alpha m - \beta J_m) + \sqrt{\frac{1}{4} (\alpha m - \beta J_m)^2 + m J_m (\alpha \beta - \gamma^2)}}}. \quad (15)$$

Если $J_m = 0$, то получим известный результат

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}}.$$

Влияние гироскопического момента особенно существенно для дисков, расположенных вблизи опор.

Если вал имеет концевые опоры и несет несколько дисков, то повышение критических частот вращения вследствие влияния гироскопического эффекта дисков невелико.

Учет массы вала. В приближенных расчетах массу вала учитывают увеличением массы диска. Обычно к массе диска добавляют половину массы вала. Приближенный расчет допустим, если масса вала составляет не более 30% массы диска.

ВАЛ С НЕСКОЛЬКИМИ ДИСКАМИ

Рассмотрим определение критических частот вращения вала с двумя дисками (рис. 7). Гироскопическими моментами дисков пренебрегаем. Прогибы вала создаются двумя силами

$$C_1 = \omega^2 m_1 y_1; \quad C_2 = \omega^2 m_2 y_2. \quad (16)$$

Введем обозначения: α_{11} — прогиб в сечении 1—1 от единичной силы в том же сечении; $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ — прогиб в сечении 1—1 от единичной силы в сечении 2—2; α_{22} — прогиб в сечении 2—2 от единичной силы в том же сечении.

Запишем

$$y_1 = \alpha_{11} C_1 + \alpha_{12} C_2; \quad y_2 = \alpha_{21} C_1 + \alpha_{22} C_2.$$

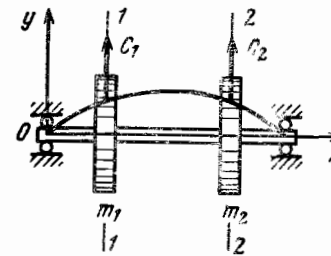


Рис. 7. Вал с двумя дисками

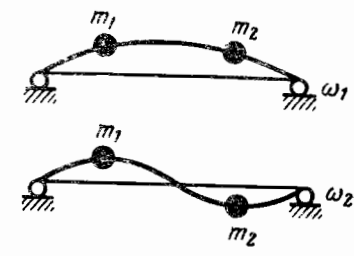


Рис. 8. Форма прогибов вала с двумя дисками при критических угловых скоростях

Подставляя равенства (16), находим

$$(\omega^2 \alpha_{11} m_1 - 1) y_1 + \omega^2 \alpha_{12} m_2 y_2 = 0;$$

$$\omega^2 \alpha_{21} m_1 y_1 + (\omega^2 \alpha_{22} m_2 - 1) y_2 = 0.$$

Приравняв отношения $\frac{y_1}{y_2}$ из последних уравнений, получаем

$$\omega^4 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2) - \omega^2 (\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2) + 1 = 0,$$

Отсюда находим две критические угловые скорости ω_1 и ω_2 :

$$\omega_1^2 = \frac{\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2 - \sqrt{(\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2)^2 - 4 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}}{2 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}; \quad (17)$$

$$\omega_2^2 = \frac{\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2 + \sqrt{(\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2)^2 - 4 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}}{2 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}. \quad (18)$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (32) и (33) гл. 21, можно видеть, что критические угловые скорости совпадают с круговыми частотами поперечных колебаний¹. Этот вывод справедлив при произвольном числе масс. Вал, несущий n дисков, имеет такое же число критических скоростей.

Каждой критической скорости соответствует своя форма прогибов. Для вала с двумя дисками формы прогибов при первой и второй критических скоростях показаны на рис. 8.

ВАЛ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ МАССАМИ

Рассмотрим вал с непрерывно распределенными массами с концевыми шарнирными опорами (рис. 9).

Пусть $m(x)$ — масса единицы длины вала в сечении x .

Величина $m(x)$ должна учитывать как массу диска, так и массу вала.

Если, например, на участке вала длиной $\Delta l = 10$ см расположен диск весом 20 кгс, а вес самого вала в пределах участка 2 кгс, то

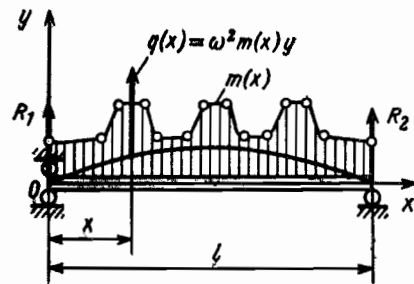
$$m(x) = \frac{20 + 2}{981 \cdot 10} = 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 / \text{см}^2.$$

Величину $m(x)$ принимаем постоянной на всем участке.

В изогнутом положении вала на него действует распределенная нагрузка

$$q(x) = \omega^2 m(x) y(x). \quad (19)$$

¹ Критические скорости рассматриваются без учета влияния гироскопических моментов.



Перерезывающая сила в сечении

$$Q(x) = R_1 + \int_0^x q(x_1) dx_1,$$

где величина x_1 представляет собой переменную интегрирования ($0 \leq x_1 \leq x$). Так как изгибающий момент в сечении x и усилие $Q(x)$ связаны равенством

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx},$$

Рис. 9. Вал с распределенными массами

$$M(x) = \int_0^x Q(x_1) dx_1 = R_1 x + \int_0^x \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 dx_1. \quad (20)$$

Из условия равенства нулю изгибающего момента в сечении $x = l$ получаем

$$M(l) = R_1 l + \int_0^l \int_0^x q(x_2) dx_2 dx_1 = 0,$$

откуда

$$R_1 = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^x q(x_2) dx_2 dx_1.$$

Внося значение R_1 в формулу (20), находим

$$M(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^x q(x_2) dx_2 dx_1. \quad (21)$$

Полученное равенство выражает изгибающий момент в шарнирно опертой по концам балке при произвольной эпюре $q(x)$.

Для рассматриваемого случая $q(x)$ выражается равенством (19) и потому

$$M(x) = \omega^2 \left\{ \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^x m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 \right\}. \quad (22)$$

Последнее соотношение запишем в более краткой форме:

$$M(x) = \omega^2 A_y(x), \quad (23)$$

где

$$A_y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^x m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1. \quad (24)$$

Далее следует учесть основное уравнение изгиба вала

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)}, \quad (25)$$

где $EJ(x)$ — жесткость сечения вала на изгиб.

Проинтегрировав обе части равенства в пределах от 0 до x , найдем

$$\frac{dy(x)}{dx} = \int_0^x \frac{M(x_1)}{EJ(x_1)} dx_1 + y'(0);$$

повторив операцию, получим

$$y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)x + y(0). \quad (26)$$

В рассматриваемом случае $y(0) = 0$, а из условия $y(l) = 0$ следует

$$\int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)l = 0$$

или

$$y'(0) = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1.$$

Подставив это равенство в уравнение (25), будем иметь

$$y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1. \quad (27)$$

Это уравнение выражает прогибы вала при произвольном распределении изгибающего момента.

Если учесть соотношение (23), то уравнение (27) можно представить в следующей форме:

$$y = \omega^2 Ky, \quad (28)$$

где Ky — сокращенная запись интегральных операций (интегральный оператор):

$$Ky = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1. \quad (29)$$

Уравнение (28) представляет собой интегральное уравнение для определения критических угловых скоростей. Его решают методом последовательных приближений, причем в практических расчетах больше двух приближений не требуется (второе приближение — для контроля).

Исходное приближение $y_{(0)}$ можно выбрать в виде плавной кривой, удовлетворяющей условиям $y(0) = 0$ и $y(l) = 0$, например

$$y_{(0)}(x) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (30)$$

или

$$y_{(0)}(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}. \quad (31)$$

Окончательный результат не зависит от выбора исходного приближения. Следующее приближение для прогибов $y_{(1)}$ определяем в соответствии с равенством

$$y_{(1)} = \omega_{(1)}^2 Ky_{(0)}, \quad (32)$$

$Ky_{(0)}$ — означает, что величина $y_{(0)}$ должна быть внесена в соотношение (24), и затем после вычисления $A_y(x)$ следует определить интегралы, входящие в равенство (29). Интегралы определяем приближенно по правилу трапеций.

Первое приближение для определения критической угловой скорости находим из условия равенства исходного и последующего приближения

$$y_{(1)} = y_{(0)}. \tag{33}$$

Это равенство (в приближенном расчете) не может быть справедливым для всех сечений, поэтому ограничиваются удовлетворением его лишь в сечении, где прогибы наибольшие.

В рассматриваемом случае можно принять в качестве такого сечения $x = l/2$ (середину пролета).

Тогда по соотношениям (32) и (33)

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{y_{(0)}}{Ky_{(0)}} \Big|_{x=\frac{l}{2}}. \tag{34}$$

Для контроля можно привести еще одно приближение.

Величину $y_{(1)}$ вычисляем из соотношения (32), так как $\omega_{(1)}^2$ и $Ky_{(0)}$ известны. Величину $Ky_{(1)}$ определяем так же, как $Ky_{(0)}$, но функцию y_0 заменяем $y_{(1)}$.

Значение ω_2 находим из равенства

$$\omega_{(2)}^2 = \frac{y_{(1)}}{Ky_{(1)}} \Big|_{x=\frac{l}{2}}. \tag{35}$$

Так определяют первую (наименьшую) критическую угловую скорость.

Расчетные сечения нужно выбирать так, чтобы были отражены резкие изменения в распределении масс и жесткостей системы (см. рис. 9).

Пример. Требуется определить первое критическое число оборотов ротора центробежного компрессора. Основные данные: мощность $N = 15\,300$ кВт; производительность $Q = 160\,000$ м³/ч; давление $p = 10$ кгс/см²; частота вращения вала $n = 3000$ об/мин.

Эскиз ротора показан на рис. 10. Расчет ведем по форме табл. 1. Вал разбит на расчетные сечения. В графе 1 даны расстояния сечения до левой опоры, в графе 2 — величины

$$\frac{1}{2} \Delta x_i (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i; i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

В графы 3 и 4 заносят значения $m(x)$ — массы на единицу длины вала и $EJ(x)$ — жесткости сечения на изгиб.

В графу 5 вписывают величины $y_{(0)}(x)$, полученные по равенству (31).

В графе 6 записывают произведения чисел, стоящих в графах 3 и 5.

Далее вычисляем полусумму значений $my_{(0)}$ для сечения i и следующего $i+1$ и умножаем на величину $\frac{1}{2} \Delta x_i$; результат заносят в эту же строку.

В соответствии с этим в первой строке графы 7 стоит $(0 + 0,002534) \cdot 15$, во второй строке $(0,002534 + 0,01772) \cdot 25$.

Числа, помещенные в этой графе, представляют собой по физическому смыслу площади отдельных трапеций, на которые разбивается интегрируемая площадь.

Интеграл $\int_0^x my_{(0)} dx$ представляет собой сумму значений, стоящих в графе 7, взятую с нарастающим итогом. При $x = 0$ этот интеграл также равен нулю (оба предела интегрирования совпадают).

Далее интегрируют функции

$$f = \int_0^x my_{(0)} dx.$$

В последней строке графы 10 стоит значение

$$\int_0^l \int_0^l m(x_2) y_{(0)}(x_2) dx_2 dx_1.$$

1. Расчет критических оборотов ротора центробежного компрессора

x_1 см	$\frac{1}{2} \Delta x_i$ см	$m(x)$ кгс·с ² /см ²	$EJ(x) \times 10^{-12}$	$y_0(x)$	$m(x) y_0(x)$	$[(6)_i + (6)_{i+1}] \times \frac{1}{2} \Delta x_i$	$\int_0^x m(x) y_0(x) \times \frac{1}{2} \Delta x_i$	$[(6)_i + (6)_{i+1}] \times \frac{1}{2} \Delta x_i$	$\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} m(x_2) y_{(0)}(x_2) dx_2 dx_1$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	15,0	0,0040	0,045	0	0	0,0380	0	0,570	0
30	25,0	0,00376	0,251	0,260	0,00253	0,506	0,0380	14,56	0,570
80	15,0	0,0233	0,283	0,606	0,0177	0,584	0,5443	25,08	15,13
110	20,0	0,0279	0,313	0,761	0,0212	0,897	1,128	63,06	40,21
150	15,0	0,0260	0,298	0,905	0,0236	0,707	2,025	71,31	103,3
180	17,5	0,0241	0,293	0,973	0,0235	0,845	2,732	110,4	174,6
215	20,0	0,0248	0,305	1,000	0,0248	0,953	3,577	162,2	285,0
265	15,0	0,0239	0,313	0,965	0,0231	0,668	4,535	146,0	447,2
285	12,5	0,0239	0,306	0,894	0,0214	0,521	5,202	136,6	593,2
310	12,5	0,0252	0,297	0,805	0,0203	0,447	5,724	148,7	729,8
335	12,5	0,0224	0,278	0,688	0,0154	0,346	6,171	158,6	878,5
360	10,0	0,0224	0,264	0,545	0,0122	0,158	6,516	131,9	1037
380	7,0	0,0088	0,204	0,411	0,00361	0,0412	6,674	93,72	1169
394	6,0	0,0074	0,147	0,307	0,00228	0,0220	6,715	80,71	1263
406	12,0	0,0066	0,116	0,211	0,00138	0,0167	6,737	162,0	1343
430	—	0,0040	0,045	0	0	—	6,754	—	1505

Продолжение табл. 1

$x, \text{ см}$	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$xr^1xr^0\psi\int\int\int\frac{1}{x}$	0	105,0	279,9	384,8	524,8	629,8	752,3	892,3	997,2	1084	1172
$(x) \theta_V$	0	-104,4	-264,8	-344,6	-421,5	-455,2	-467,3	-445,1	-404,0	-354,2	-293,5
$\frac{f \Delta}{h} \int_0^x$	0	-415,7	-986,1	-1100	-1438	-1553	-1534	-1424	-1321	-1214	-1057
$\times [I^+ I^-(g_1) + I^-(g_1)]$	-0,006235	-0,03379	-0,03054	-0,05076	-0,04486	-0,05402	-0,05916	-0,04117	-0,03169	-0,02839	-0,02375
$\frac{f \Delta}{h} \int_0^x$	0	-0,00623	-0,04002	-0,07056	-0,1213	-0,1662	-0,2202	-0,2794	-0,3205	-0,3522	-0,3806
$\times [I^+ I^-(g_1) + I^-(g_1)]$	-0,09352	-1,156	-1,659	-2,387	-3,312	-4,362	-5,492	-6,762	-8,109	-9,511	-10,966
$\times \int_0^x \int_0^x \frac{f \Delta}{V} \int_0^x$	0	-0,0835	-1,249	-2,908	-6,745	-11,06	-17,82	-27,82	-36,81	-45,22	-54,38
$\times \int_0^x \int_0^x \frac{f \Delta}{V} \int_0^x$	0	6,58	17,54	24,11	32,88	39,46	47,15	55,91	62,48	67,97	73,45
$\times \int_0^x \int_0^x \frac{f \Delta}{V} \int_0^x$	0	6,48	16,29	21,20	26,13	28,40	29,33	28,10	25,67	22,74	19,07
$Ky_{(0)}$	0	6,48	16,29	21,20	26,13	28,40	29,33	28,10	25,67	22,74	19,07
$(x) \theta_V$	0	0,221	0,555	0,723	0,891	0,9683	1,009	0,958	0,875	0,776	0,650
$Ky_{(0)}$	0	0,221	0,555	0,723	0,891	0,9683	1,009	0,958	0,875	0,776	0,650
$Ky_{(0)}$	0	0,370	0,272	0,183	0	0	0	0	0	0	0

$\omega_1 = 184,6 \text{ рад/с}; n_1 = 1764 \text{ об/мин}; \omega_2 = 187,1 \text{ рад/с}; n_2 = 1788 \text{ об/мин.}$

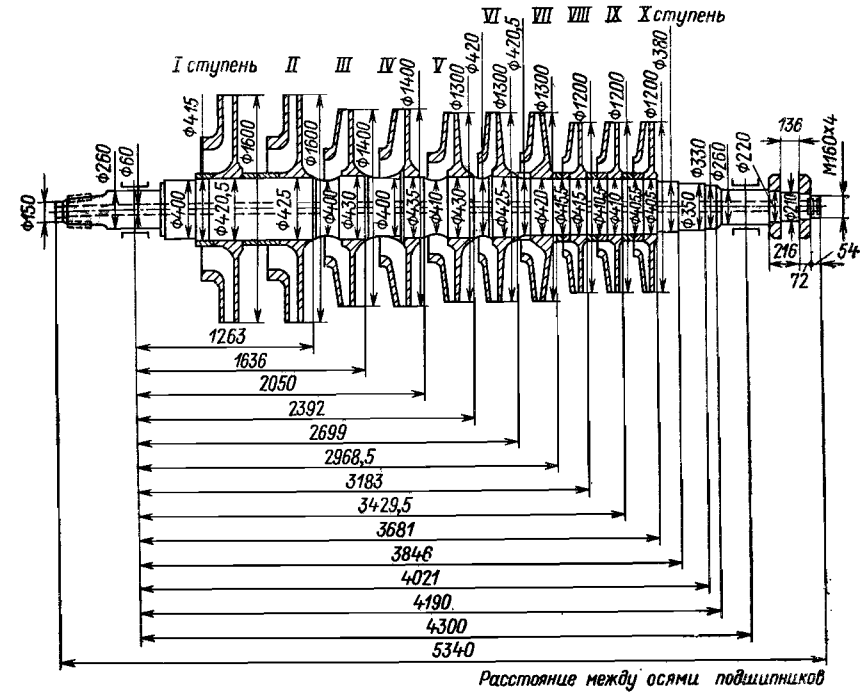


Рис. 10. Схема вала компрессора

Затем в соответствии с формулой (24) вычисляем $A_y(x)$.
Для определения $Ky_{(0)}$ по формуле (29) величину делим на $EJ(x)$ (графа 13) и далее вычисляем интегралы

$$\int_0^x \frac{A_y}{EJ} dx_1 \text{ и } \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{A_y}{EJ} dx_2 dx_1.$$

Первое приближение для критической угловой скорости

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{1}{29,33 \cdot 10^{-8}}; \omega_{(1)} = 184,6 \text{ рад/с.}$$

В этом равенстве величины $y_{(0)}$ и $Ky_{(0)}$ взяты в сечении $x = 215$, где величина $y_{(0)}$ наибольшая.

Далее находим значения

$$y_{(1)} = \omega_{(1)}^2 Ky_{(0)} = \frac{Ky_{(0)}}{Ky_{(0)} \max}$$

Следующее приближение проводим таким же образом, но вместо $y_{(0)}$ вносим функцию $y_{(1)}$.
Получаем $\omega_2 = 187,1 \text{ рад/с.}$

Общий случай определения критической угловой скорости. Рассмотрим вал (ротор) переменного сечения (рис. 11) на двух шарнирных опорах, нагруженный произвольно распределенными массами и моментами инерции.

Массу, приходящуюся на единицу длины вала, обозначим $m(x)$, момент инерции на единицу длины вала $J_m(x)$.

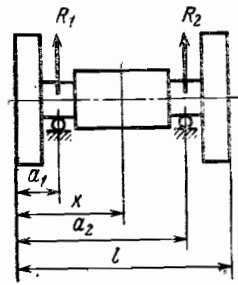


Рис. 11. Общий случай расчета критических частот вращения двухопорного вала

В соответствии с формулами (10) и (11) на участок dx вала будет действовать внешнее усилие

$$dC = \omega^2 m(x) y(x) dx$$

и момент

$$dM = \omega^2 J_m(x) y'(x) dx.$$

Перерезывающая сила в сечении x

$$Q(x) = \omega^2 \int_0^x m(x_1) y(x_1) dx_1 + S(x, a_1) R_1 + S(x, a_2) R_2, \quad (36)$$

где

$$S(x, a_1) = 0 \text{ при } x < a_1;$$

$$S(x, a_1) = 1 \text{ при } x \geq a_1;$$

$$S(x, a_2) = 0 \text{ при } x \leq a_2;$$

$$S(x, a_2) = 1 \text{ при } x > a_2.$$

Введение единичных разрывных функций $S(x, a_1)$ и $S(x, a_2)$ значительно упрощает схему расчета, так как позволяет записать в единой для всего вала аналитической форме выражения для перерезывающей силы и изгибающего момента.

Изгибающий момент в сечении

$$M(x) = \omega^2 \left\{ \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 + \int_0^x J_m(x_1) y'(x_1) dx_1 \right\} + S(x, a_1) R_1 (x - a_1) + S(x, a_2) R_2 (x - a_2). \quad (37)$$

Равенства (36) и (37) запишем в более краткой форме

$$Q(x) = \omega^2 A_{1y}(x) + S(x, a_1) R_1 + S(x, a_2) R_2; \quad (38)$$

$$M(x) = \omega^2 A_{2y}(x) + S(x, a_1) R_1 (x - a_1) + S(x, a_2) R_2 (x - a_2), \quad (39)$$

где

$$A_{1y}(x) = \int_0^x m(x_1) y(x_1) dx_1; \quad (40)$$

$$A_{2y}(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 + \int_0^x J_m(x_1) y'(x_1) dx_1. \quad (41)$$

Из краевых условий

$$Q(l) = 0 \text{ и } M(l) = 0$$

получаем с помощью равенств (38) и (39)

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \omega^2 \frac{1}{a_2 - a_1} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)]; \\ R_2 &= \omega^2 \frac{1}{a_2 - a_1} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)]. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Теперь, учитывая равенства (42), запишем соотношение (39) в виде

$$M(x) = \omega^2 A_y(x), \quad (43)$$

причем

$$A_y(x) = A_{2y}(x) + S(x, a_1) \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)] + S(x, a_2) \frac{x - a_2}{a_2 - a_1} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)]. \quad (44)$$

Уравнения (25) и (26) сохраняют силу. Используя зависимости (26) и (43), получаем

$$y(x) = \omega^2 \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)x + y(0). \quad (45)$$

Из условий

$$y(a_1) = 0; \quad y(a_2) = 0 \quad (46)$$

получаем систему двух уравнений для нахождения $y'(0)$ и $y(0)$:

$$\omega^2 \int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)a_1 + y(0) = 0; \quad (47)$$

$$\omega^2 \int_0^{a_2} \int_0^{x_2} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)a_2 + y(0) = 0. \quad (48)$$

Определяя из этих уравнений $y'(0)$ и $y(0)$ и внося их в формулу (45), получаем основное расчетное уравнение

$$y = \omega^2 Ky, \quad (49)$$

где

$$Ky = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + \frac{x}{a_2 - a_1} \left[\int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - \int_0^{a_2} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 \right] + \frac{1}{a_2 - a_1} \left[a_1 \int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - a_2 \int_0^{a_2} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 \right]. \quad (50)$$

Для расчета требуется значение $y'(x)$. Его вычисляем по формуле

$$y' = \omega^2 K'y, \quad (51)$$

где

$$\frac{d}{dx} (Ky) = K'y = \int_0^x \frac{A_y(x_1)}{EJ(x_1)} dx_1 + \frac{1}{a_2 - a_1} \left[\int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - \int_0^{a_2} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 \right]. \quad (52)$$

Уравнение (49) решаем методом последовательных приближений. В качестве исходного приближения можно выбрать

$$y_{(0)}(x) = C(x - a_1)(x - a_2). \quad (53)$$

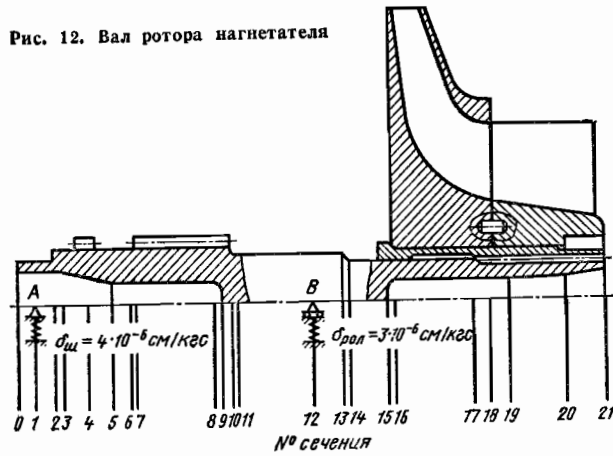
Постоянная C несущественна для расчета. Для единообразия вычислений ее можно определить из условия

$$y_{(0)\max} = 1.$$

Если, например, наибольшее значение $y_{(0)\max}$ при $x = \frac{l}{2}$, то

$$C = \frac{1}{\left(\frac{l}{2} - a_1\right)\left(\frac{l}{2} - a_2\right)}.$$

Рис. 12. Вал ротора нагнетателя



В окончательной форме

$$y_{(0)}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{\left(\frac{l}{2}-a_1\right)\left(\frac{l}{2}-a_2\right)}; \tag{54}$$

$$y'_{(0)}(x) = \frac{2x-a_1-a_2}{\left(\frac{l}{2}-a_1\right)\left(\frac{l}{2}-a_2\right)}.$$

Величины $y_{(0)}(x)$ и $y'_{(0)}(x)$ должны быть подставлены в соотношения (40), (41) и далее в (44) и (50). В результате находим $Ky_{(0)}$, после чего величину $\omega_{(1)}^2$ определяем из равенства

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{y_{(0)}}{Ky_{(0)}} \Big|_{x=x_m},$$

где x_m — абсцисса сечения, в котором величина $Ky_{(0)}$ имеет наибольшее значение; часто это сечение является одним из концевых сечений вала $x_m = 0$; $x_m = l$ или серединой пролета $x_m = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$.

Если требуется определить второе приближение, то вычисляют величину

$$y_{(1)} = \omega_{(1)}^2 Ky_{(0)}.$$

И далее с помощью равенства (52)

$$y'_{(1)} = \omega_{(1)}^2 K'y_{(0)}. \tag{55}$$

Никаких новых вычислений для определения $y'_{(1)}$ в сущности не требуется, так как все входящие в равенство (52) величины имеются в расчетной таблице.

Пример. Определить первую критическую частоту вращения ротора турбомашин, расчетная схема которого показана на рис. 12. Расчет сведен в табл. 2.
Первое приближение для прогиба $y_{(0)}(x)$ определялось по формуле (53). Сначала была вычислена величина $(x-0,65)(x-11,45)$, которая имела наибольшее значение при $x = 22,30$; разделив на это наибольшее значение, получили $y_{(0)}(x)$ (графа 5).

В графе 9 указана производная $y'_{(0)}(x)$, полученная дифференцированием

$$y'_{(0)}(x) = c(2x - 0,65 - 11,45).$$

2. Расчет критических частот вращения ротора нагнетателя

Сечение (рис. 12)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11											
x_1 см	0	0,65	1,45	1,75	2,75	3,80	4,50	4,70	7,70	8,00	8,40	8,60	12,70	12,90	14,30	14,50	17,70	18,30	19,10	21,20	22,30	
$\frac{1}{2} \Delta x_1$ см	—	0,325	0,400	0,150	0,500	0,0746	0,102	0,350	0,100	0,126	0,142	0,121	0,625	0,0770	0,10	0,0940	0,339	0,323	0,319	0,314	0,305	
$m(x) \cdot 10^8$ кгс·см ² /см ²	0,0966	0,0966	0,130	0,0746	0,102	0,0947	0,0947	0,126	0,142	0,121	0,0770	0,0770	0,0940	0,0940	0,10	0,0940	0,339	0,323	0,319	0,314	0,305	
$EJ(x) \cdot 10^{-6}$	11,8	11,8	28,4	28,6	43,7	31,4	31,4	51,8	51,8	52,4	15,5	15,5	15,5	15,5	7,29	7,29	6,61	6,61	5,66	5,66	5,13	3,92
$y_0(x)$	0,0296	0	-0,0318	-0,0424	-0,0727	-0,0968	-0,106	-0,109	-0,105	-0,101	-0,0901	0	0,0599	0,0706	0,155	0,155	0,168	0,168	0,481	0,561	0,797	1,000
$A_{1y}(x) = \int_0^x m(x_1) \times y_0(x_1) \times dx_1 \cdot 10^8$	0	0,000929	-0,000731	-0,00183	-0,00714	-0,0154	-0,0222	-0,0245	-0,0648	-0,0745	-0,0769	-0,0895	-0,0887	-0,0493	-0,0887	-0,0887	-0,0386	-0,0386	0,354	0,488	0,939	1,38
$\int_0^x m(x_1) \times y_0(x_1) \times dx_1 \cdot 10^8$	0	0,000302	0,000881	-0,0000024	-0,00448	-0,0158	-0,0259	-0,0377	-0,168	-0,188	-0,232	-0,286	-0,304	-0,168	-0,304	-0,304	-0,157	-0,157	1,80	1,68	3,53	
$J_m(x) \cdot 10^8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47
$y'_0(x)$	-0,0481	-0,0430	-0,0366	-0,0342	-0,0262	-0,0179	-0,0123	-0,0107	0,0131	0,0155	0,0181	0,0203	0,0430	0,0529	0,0545	0,0656	0,0672	0,0927	0,0974	0,104	0,120	0,133
$\int_0^x J_m(x_1) \times y'_0(x_1) \times dx_1 \cdot 10^8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,113	0,146	0,177	0,170	0,20
$A_{2y}(x) \cdot 10^8$	0	0,000302	0,000881	-0,0000024	-0,00448	-0,0158	-0,0259	-0,0377	-0,168	-0,188	-0,216	-0,232	-0,216	-0,188	-0,168	-0,158	-0,158	-0,158	0,433	0,433	0,433	0,433

Продолжение табл. 2

Сечение (рис. 12)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$S(x, a_1)$	0	0	0	0	0	0	0	0,358	0,00672	-0,551	-0,0103
$S(x, a_2)$	0	0	0	0	0	0	0,0060271	0	0	-0,551	-0,0103
$A_1(x)$	0	0	0,738	0	0,06302	0,00000835	0	0	0	-0,551	-0,0103
$A_2(x)$	0	0	0	0	0,06302	0,00000835	0,00418	0	0	-0,551	-0,0103
$A_y(x) \cdot 10^3$	0	0	0	0	0,06302	0,00000835	0,00418	0	0	-0,551	-0,0103
$\int_0^x \frac{A_y(x_1)}{EJ(x_1)} dx \cdot 10^3$	0	0	0	0	0,06302	0,00000835	0,00418	0	0	-0,551	-0,0103
$\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} \times dx_2 dx_1 \cdot 10^6$	0	0	0	0	0,06302	0,00000835	0,00418	0	0	-0,551	-0,0103
$K_y \cdot 10^6$	0	0	0	0	0,06302	0,00000835	0,00418	0	0	-0,551	-0,0103
$y_{(1)}(x)$	0	0	0	0	0,06302	0,00000835	0,00418	0	0	-0,551	-0,0103
$y'_{(1)}(x)$	0	0	0	0	0,06302	0,00000835	0,00418	0	0	-0,551	-0,0103

$\omega_1 = 4330$ рад/с; $\omega_2 = 4250$ рад/с; $\omega_3 = 4230$ рад/с; $n_1 = 41300$ об/мин; $n_2 = 40500$ об/мин; $n_3 = 40400$ об/мин.

После вычисления $A_{2y}(x)$ по формуле (41), графа 11, определяем $A_y(x)$ по равенству (44). Значения

$$A_1(x) = S(x, a_1) \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)]$$

$$A_2(x) = S(x, a_2) \frac{x - a_2}{a_2 - a_1} [(A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)]$$

представляющие собой изгибающие моменты от реакций в опорах (без множителя ω^2), приведены в графах 14 и 15.

Далее вычисляем K_y по формуле (50), результаты записаны в графе 19. Первое приближение для первой критической скорости

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{y(0)}{Ky(0)} \Big|_{x=x_m} = \frac{1}{53,4 \cdot 10^{-3}} = 18,7 \cdot 10^6 \text{ рад/с}^2,$$

так как наибольшее значение $Ky(0)$ в сечении $x_m = l = 22,80$ см. Получаем $\omega_1 = 4330$ 1/с и критическая частота вращения

$$n_{(1)} = \frac{30\omega_{(1)}}{\pi} = 41300 \text{ об/мин.}$$

Разделив все значения в графе 19 на наибольшее значение $Ky(0)$, равное $53,4 \cdot 10^{-3}$, получаем следующие приближения для формы прогиба $y_{(1)}(x)$. Далее находим $Ky'_{(0)}$ по формуле (52), используя уже имеющиеся вычисления. Разделив значения $Ky'_{(0)}$ на $53,4 \cdot 10^{-3}$, получим значение $y'_{(1)}(x)$ и весь расчет повторяем снова, только вместо $y_{(0)}(x)$ и $y'_{(0)}(x)$ вносим $y_{(1)}(x)$ и $y'_{(1)}(x)$. Результаты вычислений дают для второго приближения $n_{(2)} = 40500$ об/мин, для третьего $n_{(3)} = 40400$ об/мин.

Определение второй и более высоких критических угловых скоростей. Рассмотрим сначала случай, когда гироскопическим моментом можно пренебречь. Для определения второй критической скорости вместо уравнения

$$y = \omega^2 Ky$$

следует решить уравнение

$$y = \omega^2 K_2 y, \tag{56}$$

где

$$K_2 y = Ky - y_1 \frac{\int_0^l y_1 K y m dx}{\int_0^l m y_1^2 dx}.$$

В этом равенстве Ky определяют прежним способом, а $y_1(x)$ представляет собой форму прогибов при первой критической скорости.

В качестве y_1 принимают последнее приближение при определении ω_1 (обычно принимают $y_1 = y_{(1)}$).

Исходное приближение при определении второй критической скорости можно выбирать произвольным, но целесообразно задать такую форму, которая кроме опорных точек содержала бы один узел.

Например, предполагая, что узел расположен в сечении $x = \frac{l}{2}$, можно принять

$$y_{(0)} = C(x - a_1)(x - a_2) \left(x - \frac{l}{2}\right) \tag{58}$$

и выбрать C таким, чтобы $y_{(0) \max} = 1$.

Последнее условие не является обязательным, но оно обеспечивает некоторую однородность вычислений.

Величину $y'_{(0)}$ получаем дифференцированием равенства (58):

$$y'_{(1)} = C \left[3x^2 - 2 \left(a_1 + a_2 + \frac{l}{2} \right) x + a_1 a_2 + a_1 \frac{l}{2} + a_2 \frac{l}{2} \right]. \tag{59}$$

Равенство (57) можно представить в виде

$$K_2 y = Ky - \beta_1 y_1, \quad (60)$$

где коэффициент

$$\beta_1 = \frac{\int_0^l m y_1 K y \, dx}{\int_0^l m y_1^2 \, dx}. \quad (61)$$

Такая структура формулы (60) объясняется тем, что форма прогибов, соответствующая второй критической скорости, должна удовлетворять условию ортогональности

$$\int_0^l y_1(x) y_2(x) m(x) \, dx = 0. \quad (62)$$

Слагаемое $\beta_1 y_1$ в формуле (60) «очищает» оператор Ky от составляющей по первой форме.

При определении третьей критической угловой скорости приходится обеспечить условие ортогональности не только по отношению к первой форме, но и ко второй.

Рассчитывают прогибы по уравнению

$$y = \omega^2 K_3 y, \quad (63)$$

где

$$K_3 y = Ky - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2, \quad (64)$$

причем значение β_1 находят из равенства (61), а

$$\beta_2 = \frac{\int_0^l m y_2 K y \, dx}{\int_0^l m y_2^2 \, dx}. \quad (65)$$

Исходное приближение целесообразно выбрать так, чтобы оно кроме точек закрепления содержало бы два узла.

Подобным способом можно определить более высокие критические скорости. Однако для определения третьей критической скорости необходима повышенная точность расчета, а расчет четвертой и пятой скоростей практически затруднителен.

В большинстве конструкций определение этих критических скоростей не требуется, так как они лежат далеко за пределами рабочих оборотов.

Перейдем к определению высоких критических угловых скоростей с учетом влияния гироскопических моментов дисков.

При определении второй критической скорости следует принять во внимание условие ортогональности в таком виде:

$$\int_0^l [m(x) y_1(x) y_2(x) - J_m(x) y_1'(x) y_2'(x)] \, dx = 0, \quad (66)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — формы прогибов при первой и второй критических скоростях.

Расчет ведем по уравнению (56), выражение для $K_2 y$ дано равенством (60) и принимаем

$$\beta_1 = \frac{\int_0^l (m y_1 K y - J_m y_1' K' y) \, dx}{\int_0^l [m y_1^2 - J_m (y_1')^2] \, dx}. \quad (67)$$

В этом равенстве $K'y = \frac{d}{dx}(Ky)$, которое находят по формуле (52). Третью критическую скорость рассчитывают по уравнению (63), причем значение β_1 берут по формуле (67), а

$$\beta_2 = \frac{\int_0^l (m y_2 K y - J_m y_2' K' y) \, dx}{\int_0^l [m y_2^2 - J_m (y_2')^2] \, dx}. \quad (68)$$

При очень сильном влиянии гироскопического момента дисков (например, при расположении дисков вблизи опор) может случиться, что при решении уравнения (49) расчет сходится к первой форме $y_1(x)$, но соответствующая ей угловая скорость оказывается мнимой ($\omega^2 < 0$). В этом случае нужно перейти к расчету второй критической скорости, используя, как обычно, условие ортогональности по отношению к полученной форме прогибов $y_1(x)$.

Вторая расчетная критическая скорость будет для такой системы первой действительной критической скоростью, с которой только и нужно считаться в дальнейшем.

Пример. Определить вторую критическую частоту вращения ротора центробежного компрессора (по данным примера на стр. 440). Расчет сведен в табл. 3. Исходное приближение определено по формуле (58)

$$y_{(0)}(x) = Cx(x-l) \left(x - \frac{l}{2} \right).$$

Наибольшее значение $y_{(0)}(x)$ получилось в сечении $x = 335$. Определив C из условия

$$y_{(0)}(x)_{\max} = 1,$$

получим значения $y_{(0)}(x)$, указанные в графе 2. Для расчета используем уравнение (57), $Ky_{(0)}$ вычисляем из равенства (29), расчет отличается от первого примера только другой функцией $y_{(0)}(x)$. Значение $Ky_{(0)}$ дано в графе 9. В графу 10 заносим форму прогибов, соответствующую первой критической скорости (графа 20, табл. 1). Далее вычисляем β_1 по формуле (61)

$$\beta_1 = \frac{-36,49 \cdot 10^{-7}}{5,42} = -6,73 \cdot 10^{-7}.$$

Величина $K_2 y$ дана в графе 14.

Первое приближение для второй критической скорости

$$\omega_1^2 = \frac{y_{(0)}(x)}{K_2 y_{(0)}} \Big|_{x=x_m} = \frac{0,957}{17,55 \cdot 10^{-7}} = 0,545 \cdot 10^6 \text{ рад}^2/\text{с}^2,$$

так как наибольшее значение $K_2 y_{(0)}$ получилось в сечении $x = 360$ см.

Значение $\omega_{(1)} = 758$ рад/с и соответствующее значение $n_{(1)} = 7050$ об/мин.

В графе 15 приведено первое приближение для формы прогибов при второй критической скорости. Оно может быть получено из графы 14 делением на наибольшее значение $K_2 y_{(0)}$. Второе приближение определяют так же, но вместо $y_{(0)}(x)$ вносят $y_{(1)}(x)$ (графа 15).

В результате расчета получаем $n_{(2)} = 7120$ об/мин.

Расчет критических частот вращения с учетом упругости опор. Во многих практических задачах при расчете критических частот вращения роторов приходится учитывать упругость опор. Для роторов быстроходных машин с успехом применяют специальные упругие опоры, которые дают возможность перевести критические скорости в зону малых оборотов, неиспользуемых при рабочих режимах. Упругие опоры позволяют изолировать корпус от вибраций ротора и снизить нагрузки на подшипник¹.

¹ Полное устранение радиальной нагрузки на опору нежелательно, так как при этом в подшипниках качения режим качения может смениться режимом скольжения, приводящим к интенсивному износу.

4. Размеры (мм) упругого кольца (см. рис. 14)

D_1	D_2	Число выступов n	δ_{\max}	b_1	R	D_1	D_2	Число выступов n	δ_{\max}	b_1	d
55	58	4	0,165	5	10	125	128	10	0,305	6	15
		6	0,152					12	0,194		
58	61	4	0,120			129	132	10	0,330		
		6	0,170					12	0,210		
60	63	4	0,130			134	137	10	0,370		
		6	0,180					12	0,230		
65	68	4	0,100			144	147	10	0,400		
		6	0,220					12	0,273		
71	74	6	0,270			149	152	12	0,299		
		8	0,138					14	0,204		
75	78	6	0,313			154	157	12	0,325		
		8	0,155					14	0,220		
78	81	6	0,338	164	167	12	0,386				
		8	0,168			14	0,256				
83	86	6	0,325	169	172	12	0,430				
		8	0,194			14	0,275				
88	91	6	0,300	174	178	12	0,285				
		8	0,223			14	0,200				
93	96	6	0,240	179	183	12	0,304				
		8	0,148			14	0,210				
103	106	8	0,334	184	188	12	0,325				
		10	0,190			14	0,228				
113	116	8	0,295	194	198	12	0,255				
		10	0,236			14	0,190				
123	126	8	0,294	199	203	12	0,270				
		10	0,185			14	0,200				

Примечания: 1. Материал кольца — стали 60С2А (HRC 44—48), 40ХН2МА (HRC 30—36).
2. Значения δ_{\max} определены из условия, что напряжение $\sigma_{\max} \leq 50$ кгс/мм².
3. Размер b^* назначается конструктором.

Если в опорах не учитывают присоединенные массы, то динамические жесткости опоры равны соответствующим статическим жесткостям

$$K_{д1} = c_1 = \frac{1}{\alpha_1}; \quad K_{д2} = c_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \quad (71)$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты упругой податливости [при выводе формулы (7) принимали $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$].

Для общих случаев, когда рассматривают сложную динамическую систему, коэффициенты динамической жесткости определяют, как указано в гл. 21.

При выводе расчетного уравнения зависимости (36)—(45) справедливы, но вместо условий (46) и (47) будем иметь

$$\omega^2 \int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0) a_1 + y(0) = -\frac{R_1}{K_{д1}}; \quad (72)$$

$$\omega^2 \int_0^{a_2} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0) a_2 + y(0) = -\frac{R_2}{K_{д2}}, \quad (73)$$

где R_1 и R_2 определяют из соотношений (42).

Из равенства (72) и (73) находим величины $y'(0)$ и $y(0)$ и получаем основное расчетное уравнение для ротора на упругих опорах

$$y = \omega^2 [K_y + K_* y], \quad (74)$$

где K_y — определяется формулой (50), а величина $K_* y$, учитывающая податливость опор,

$$K_* y = \frac{1}{(a_2 - a_1)^2} \left\{ -\frac{a_2 - x}{K_{д1}} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)] + \frac{a_1 - x}{K_{д2}} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)] \right\}. \quad (75)$$

Необходимое для расчета значение $y'(x)$ вычисляем из уравнения

$$y' = \omega^2 [K'y + K'_* y]; \quad (76)$$

значение $K'y$ находим из равенства (52), а

$$K'_* y = \frac{1}{(a_2 - a_1)^2} \left\{ \frac{1}{K_{д1}} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)] - \frac{1}{K_{д2}} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)] \right\}. \quad (77)$$

Расчет по уравнению (74) ведут методом последовательных приближений.

Если учитывают обычную упругость опор [формулы (71)], то такой расчет не содержит существенных отличий от рассмотренного ранее.

Выбор первого приближения не влияет на окончательные результаты.

В качестве первого приближения можно выбрать

$$y_{(0)}(x) = 1. \quad (78)$$

При учете присоединенных масс величина $K_* y$ зависит от ω^2 , так как в нее входят динамические жесткости опор.

В этом случае условие (33) приводит к алгебраическому уравнению относительно ω^2 .

Пример. Определить критическую частоту вращения ротора нагнетателя при учете упругости опор (см. рис. 12). В соответствии с экспериментальными данными жесткости опор принять:

$$K_{д1} = \frac{1}{\alpha_1} = 0,25 \cdot 10^6 \text{ кгс/см};$$

$$K_{д2} = \frac{1}{\alpha_2} = 0,33 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}.$$

б. Расчет критических частот вращения ротора нагнетателя на упругих опорах

$x, \text{ см}$	$A_{*1} \times 10^3$	$A_{*2} \times 10^3$	$K_{*y} \times 10^6$	$(K_y + K_{*y}) \times 10^6$	$y_{(1)}(x)$	$(K'_y + K'_{*y}) \times 10^6$	$y'_{(1)}(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	456	-48,6	-4,33	-3,97	-0,0556	0,431	0,00603
0,65	430	0	-3,69	-3,69	-0,0517	0,431	0,00603
1,45	399	59,8	-2,90	-3,34	-0,0468	0,441	0,00618
1,75	387	82,2	-2,61	-3,21	-0,0449	0,451	0,00631
2,75	347	157	-1,63	-2,74	-0,0383	0,490	0,00687
3,80	305	235	-0,597	-2,19	-0,0307	0,559	0,00783
4,50	277	288	0,0909	-1,77	-0,0248	0,630	0,00883
4,70	269	302	0,287	-1,65	-0,0231	0,649	0,00908
7,70	149	527	3,23	0,736	0,0103	0,940	0,0132
8,00	138	549	3,53	1,02	0,0143	0,977	0,0137
8,40	122	579	3,92	1,42	0,0200	1,03	0,0144
8,60	114	594	4,12	1,64	0,0229	1,09	0,0152
11,4	0	807	6,92	6,92	0,0669	2,62	0,0367
12,7	-49,8	900	8,14	10,6	0,149	3,51	0,0464
12,9	-57,8	915	8,34	11,3	0,158	3,46	0,0485
14,3	-114	1020	9,72	17,0	0,239	4,74	0,0663
14,5	-122	1030	9,91	18,0	0,252	4,89	0,0685
17,7	-249	1270	13,0	36,4	0,509	6,58	0,0921
18,3	-273	1320	13,6	40,4	0,565	6,72	0,0942
19,1	-305	1380	14,4	45,8	0,641	6,86	0,0961
21,2	-389	1540	16,5	60,3	0,844	6,96	0,0975
22,8	-452	1650	18,1	71,4	1,000	6,94	0,0972

Расчет ведут по уравнению (74). Результаты расчета сведены в табл. 5. В этой таблице дан расчет первого приближения, причем в качестве исходного приближения принята форма прогиба вала на жестких опорах (графа 20, табл. 2).

Для исходного приближения значение K_y уже известно (графа 19, табл. 2) K_{*y} вычисляют по формуле (75). В графах 2 и 3 (см. табл. 5) указывают

$$A_{*1}(x) = \frac{a_2 - x}{K_{d1}} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)];$$

$$A_{*2}(x) = \frac{a_1 - x}{K_{d2}} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)].$$

Первое приближение для критической угловой скорости ротора на упругих опорах находим из условия

$$\omega_1^2 = \frac{y_{(0)}}{K_{y(0)} + K_{*y(0)}} \Big|_{x=x_m} = \frac{1}{71,4 \cdot 10^{-4}} = 14 \cdot 10^6 \text{ рад/с}^2,$$

так как наибольшая сумма $K_{y(0)} + K_{*y(0)}$ получается при $x=l$. Значение $\omega_{(1)} = 3740 \text{ рад/с}$ и критическая частота вращения $n_{(1)} = 35 \text{ 700 об/мин}$. Величина $y_{(1)}(x)$ получается из графы 6 делением на наибольшую сумму $K_{y(0)} + K_{*y(0)}$. Значение $K'_{*y(0)}$ известно из предыдущего расчета (графа 21, табл. 2), величина $K'_{y(0)}$ — по формуле (77).

Сумма указанных величин помещена в графе 7. Разделив эти значения на наибольшую величину $K_{y(0)} + K_{*y(0)}$, равную 71,4 получим $y'_{(1)}(x)$.

Следующие приближения дают $n_{(2)} = 33 \text{ 500 об/мин}$; $n_{(3)} = 33 \text{ 200 об/мин}$.

Вал с равномерно распределенной массой. Рассмотрим частный случай (рис. 16), имеющий практическое значение: вал постоянного сечения, несущий большое число одинаковых дисков.

Эта задача имеет точное решение.

Если m и J_m — масса и момент инерции, приходящиеся на единицу длины вала, то критическая скорость порядка i выражается равенством

$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{i^2 \pi^2 J_m}{ml^2}}} \quad (79)$$

($i = 1, 2, 3, 4, \dots$).

Форма прогибов, соответствующая критической угловой скорости, будет

$$y_{(i)} = c \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (80)$$

В равенстве (79)

$$\frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \omega_{0i}, \quad (81)$$

где ω_{0i} — критическая угловая скорость вала без учета гироскопического момента дисков.

Следовательно,

$$\omega_i = \omega_{0i} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{i^2 \pi^2 J_m}{ml^2}}}. \quad (82)$$

Из последнего равенства следует, что влияние гироскопического момента для высших критических угловых скоростей увеличивается.

Наименьшая критическая угловая скорость вала в соответствии с равенством (79) будет

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 J_m}{ml^2}}}. \quad (83)$$

Для вала постоянного сечения без присоединенных масс имеем

$$m = \rho F = \rho \frac{\pi d^2}{4};$$

$$J_m = \frac{1}{2} J_p = \rho \frac{\pi d^4}{64}; \quad J = \frac{\pi d^4}{64},$$

и тогда

$$\omega_1 = \frac{\pi^2 d^2}{4l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 d^2}{16l^2}}}. \quad (84)$$

Если отношение $\frac{d}{l}$ значительно меньше единицы, то влиянием гироскопического эффекта можно пренебречь и считать

$$\omega_1 = \frac{\pi^2 d}{4l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (85)$$

Влияние начального дисбаланса для ротора с распределенными массами. Уравновешивание по собственным формам. Рассмотрим для простоты системы, для которых можно пренебречь влиянием гироскопических моментов дисков.

При определении критических угловых скоростей использовали интегральное уравнение

$$y = \omega^2 K y. \quad (86)$$

Физический смысл этого уравнения таков: прогибы вала $y(x)$ вызываются распределенными центробежными силами $\omega^2 m(x) y(x)$, в свою очередь, зависящими от прогиба.

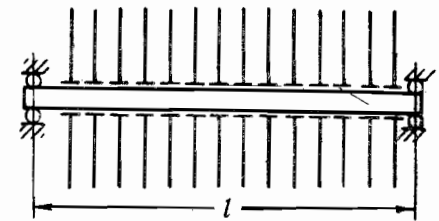


Рис. 16. Вал с дисками

Очевидно, что уравнение (86) имеет решение $y = 0$, которое соответствует прямой форме равновесия (начальный дисбаланс считали отсутствующим).

Однако при некоторых значениях ω , называемых *критическими*, уравнение (86) обладает отличными от нуля решениями: $y_1(x)$, $y_2(x)$...

Эти решения (с точностью до множителя) и представляют собой формы прогибов при критических скоростях вращения (собственные формы или собственные функции).

Следовательно, собственные формы удовлетворяют уравнениям

$$y_1 = \omega_1^2 K y_1; \quad y_2 = \omega_2^2 K y_2; \quad \dots \quad (87)$$

где ω_1 , ω_2 — критические скорости ротора.

Собственные формы y_1 , y_2 , y_3 ... удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^l m y_i y_k dx = 0 \quad (i \neq k). \quad (88)$$

Прогиб y_1 вызывают распределенные силы $\omega_1^2 m y_1$, а прогиб y_k — силы $\omega_k^2 m y_k$. Так как $\omega_i \neq \omega_k$, то отсюда следует условие (88).

Рассмотрим теперь вал, имеющий начальный эксцентриситет расположенных на валу масс $\varepsilon(x)$.

Тогда прогиб вала $y(x)$ будет вызывать силы

$$\omega^2 m(x) [y(x) + \varepsilon(x)]; \quad (89)$$

$$y(x) = \omega^2 K (y + \varepsilon) = \omega^2 K y + \omega^2 K \varepsilon.$$

Обозначим $f(x)$ — прогиб вала от распределенных усилий $\omega^2 m(x)\varepsilon(x)$:

$$f = \omega^2 K \varepsilon. \quad (90)$$

Тогда уравнение (89) примет вид

$$y = \omega^2 K y + f. \quad (91)$$

Это уравнение выражает прогиб вала при любой угловой скорости ω . Прогиб $f(x)$ можно представить в виде ряда

$$f = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots \quad (92)$$

Для того чтобы определить коэффициент a_1 , умножаем обе части уравнения на $m y_1$ и интегрируем по всей длине вала

$$\int_0^l m f y_1 dx = a_1 \int_0^l m y_1^2 dx + a_2 \int_0^l m y_1 y_2 dx + a_3 \int_0^l m y_1 y_3 dx + \dots$$

Согласно условию ортогональности все интегралы, содержащие разные собственные формы, обращаются в нуль, но

$$a_1 = \frac{\int_0^l m f y_1 dx}{\int_0^l m y_1^2 dx}.$$

Точно так же найдем

$$a_i = \frac{\int_0^l m f y_i dx}{\int_0^l m y_i^2 dx}. \quad (93)$$

Коэффициенты a_i в равенстве (92) называют коэффициентами разложения (прогиба от дисбаланса по собственным формам).

Предположим теперь, что общий прогиб вала y также может быть представлен в виде

$$y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + \dots \quad (94)$$

и требуется определить коэффициенты b_1 , b_2 , b_3 , ... Внося значения (94) и (92) в уравнение (91), получим

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots = \omega^2 K (b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots) + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots \quad (95)$$

Так как величина $K y$ содержит обычные интегральные операции с функцией $y(x)$, то

$$K (b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots) = b_1 K y_1 + b_2 K y_2 + \dots$$

Учитывая, что из соотношений (87)

$$K y_1 = \frac{1}{\omega_1^2} y_1; \quad K y_2 = \frac{1}{\omega_2^2} y_2, \quad \dots,$$

и подставляя эти зависимости в равенство (95), получим

$$\left[b_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) - a_1 \right] y_1 + \left[b_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right) - a_2 \right] y_2 + \dots = 0.$$

Последнее равенство возможно (для всех x) только в том случае, если

$$b_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) - a_1 = 0; \quad b_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right) - a_2 = 0; \quad \dots,$$

откуда

$$b_1 = \frac{a_1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}; \quad b_2 = \frac{a_2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \dots$$

Внося эти значения в ряд (94), получаем выражение для прогиба вала в рабочих условиях от начального дисбаланса

$$y(x) = \frac{a_1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} y_1(x) + \frac{a_2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} y_2(x) + \dots \quad (96)$$

Из этой формулы следует:

прогибы могут неограниченно возрастать при совпадении угловой скорости вала с одной из критических угловых скоростей;

для устранения прогибов, связанных с данной критической угловой скоростью ω_i , необходимо сделать равным нулю a_i — коэффициент разложения прогиба от дисбаланса по данной форме.

Расположение уравновешенных грузов для устранения вибраций, связанных с первой критической угловой скоростью, показаны на рис. 17.

Формулы (90) и (93) позволяют рассчитать расположение начальных эксцентриситетов $\varepsilon(x)$ для выполнения условия

$$a_i = 0. \quad (97)$$

Для гибких роторов (т. е. роторов, работающих при $\omega > \omega_1$) обычные методы уравновешивания часто не дают положительных результатов из-за упругих прогибов роторов при рабочих условиях.

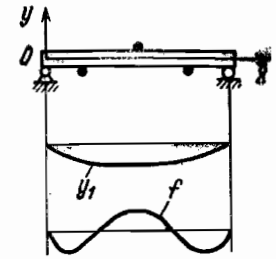
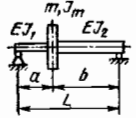
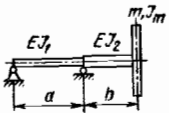
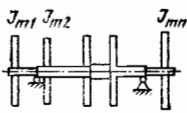


Рис. 17. Расположение уравновешивающих грузов для устранения вибраций, связанных с первой критической угловой скоростью

6. Критические угловые скорости некоторых роторов

Система	Формула	Коэффициенты влияния
Вал с одним диском		
	(15)	$\alpha = \frac{1}{3EJ_1} \frac{a^3 b^2}{l^2} + \frac{1}{3EJ_2} \frac{a^2 b^3}{l^2}$ $\beta = \frac{1}{3EJ_1} \frac{a^3}{l^2} + \frac{1}{3EJ_2} \frac{b^3}{l^2}$ $\nu = \frac{1}{3EJ_2} \frac{ab^2}{l^2} - \frac{1}{3EJ_1} \frac{a^2 b}{l^2}$
	(15)	$\alpha = \frac{1}{3EJ_1} ab^2 + \frac{1}{3EJ_2} b^3$ $\beta = \frac{1}{3EJ_1} a + \frac{1}{EJ_2} b$ $\nu = \frac{1}{3EJ_1} ab + \frac{1}{2EJ_2} b^2$
Вал с несколькими дисками (без учета гироскопического эффекта)		
	$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}$	<p>Примечание: J_1, J_2 — моменты инерции сечения вала; ω_k — первая критическая скорость ротора; $\omega_1, \dots, \omega_n$ — тоже, при наличии l-го диска</p>

Более эффективным оказывается уравнивание по собственным формам, сущность которого состоит в выполнении условия (97) для нескольких первых критических скоростей. Критические угловые скорости для некоторых роторов приведены в табл. 6.

РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК

КРУГЛЫЕ ПЛАСТИНКИ

Расчетные формулы. Многие детали (например, диски) рассчитывают на изгиб как круглые пластинки постоянной или переменной толщины h , симметрично нагруженные давлением $q(r)$ в кгс/см² или отнесенными к единице длины нагрузками Q_i в кгс/см и моментами M_j в кгс·см/см (рис. 1). В центре сплошной пластинки ($a = 0$) может быть приложена сосредоточенная сила P в кгс.

В сечениях пластинки действуют поперечная сила Q и изгибающие моменты M_r и M_θ (рис. 2). Нормальные напряжения σ_r и σ_θ меняются по толщине пластинки по линейному закону; их максимальные значения у поверхности

$$\sigma_r = \pm \frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_\theta = \pm \frac{6M_\theta}{h^2}, \quad (1)$$

где плюс относится к нижней стороне пластинки.

Из условий равновесия элемента пластинки (рис. 2):

$$\frac{d}{dr}(rQ) = qr; \quad \frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = Qr, \quad (2)$$

и соотношений упругости:

$$M_r = D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right),$$

$$M_\theta = D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (3)$$

получают дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D}, \quad (4)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; ν — коэффициент Пуассона; w — прогибы пластинки (вверх).

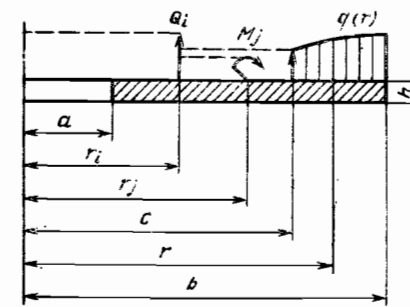


Рис. 1. Нагружение круглой пластинки

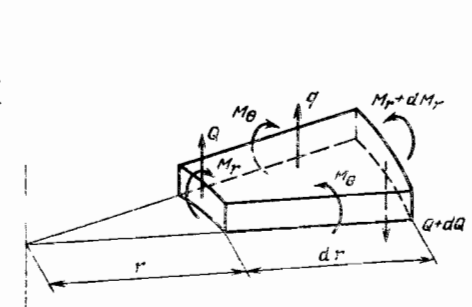


Рис. 2. Поперечная сила Q и изгибающие моменты M_r, M_θ в круглой пластинке

Последовательным интегрированием уравнения (4) в пределах от $r = a$ до r находят:

$$\left. \begin{aligned} P(r) &= P(a) + \sum_{i=1}^m \delta_i P_i + \varphi_1^*; \\ M_r(r) &= \varphi_{21} P(a) + \varphi_{22} M_r(a) + \varphi_{23} \frac{dw}{dr}(a) + \sum_{i=1}^m \delta_i \varphi_{24i} P_i + \sum_{j=1}^n \delta_j \varphi_{22j} M_j + \varphi_2^*; \\ M_\theta(r) &= \varphi_{31} P(a) + \varphi_{32} M_r(a) + \varphi_{33} \frac{dw}{dr}(a) + \sum_{i=1}^m \delta_i \varphi_{34i} P_i + \sum_{j=1}^n \delta_j \varphi_{32j} M_j + \varphi_3^*; \\ \frac{dw}{dr}(r) &= \varphi_{41} P(a) + \varphi_{42} M_r(a) + \varphi_{43} \frac{dw}{dr}(a) + \sum_{i=1}^m \delta_i \varphi_{44i} P_i + \sum_{j=1}^n \delta_j \varphi_{42j} M_j + \varphi_4^*; \\ \omega(r) &= \omega(a) + \varphi_{51} P(a) + \varphi_{52} M_r(a) + \varphi_{53} \frac{dw}{dr}(a) + \sum_{i=1}^m \delta_i \varphi_{54i} P_i + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \delta_j \varphi_{52j} M_j + \varphi_5^*; \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\text{где } P = 2\pi r Q, \quad \delta_i = \begin{cases} 0 & \text{при } r < r_i; \\ 1 & \text{при } r \geq r_i. \end{cases} \quad \delta_j = \begin{cases} 0 & \text{при } r < r_j; \\ 1 & \text{при } r \geq r_j. \end{cases}$$

Нагрузки P_i и M_j могут быть приложены на любом радиусе в пределах $a < r_i < b$ или $a < r_j < b$. Начальные параметры $P(a)$, $M_r(a)$, $\frac{dw}{dr}(a)$ и $\omega(a)$ определяются граничными условиями на краях.

Например, для края $r = a$:

свободный край $P = P_a$; $M_r = M_{ra}$;

шарнирная опора $M_r = M_{ra}$; $\omega = 0$;

скользящая опора $P = P_a$; $\frac{dw}{dr} = 0$;

заделка $\frac{dw}{dr} = 0$; $\omega = 0$,

где P_a , M_{ra} — контурные нагрузки.

Аналогично записываются условия при $r = b$.

Функции влияния $\varphi(r)$ определяются следующими выражениями:

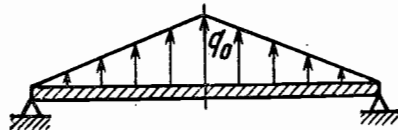


Рис. 3. Пластика под распределенной нагрузкой, меняющейся по линейному закону

пластинка с отверстием, $a \neq 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{21} &= \frac{1}{8\pi} \left\{ 2(1+\nu) \ln \frac{r}{a} + (1-\nu) \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \right\}; \\ \varphi_{22} &= \frac{1}{2} \left[1 + \nu + (1-\nu) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right], \quad \varphi_{24} = \frac{(1-\nu^2)D}{2a} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]; \\ \varphi_{31} &= \frac{1}{8\pi} \left\{ 2(1+\nu) \ln \frac{r}{a} - (1-\nu) \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \right\}; \\ \varphi_{32} &= \frac{1}{2} \left[1 + \nu - (1-\nu) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]; \quad \varphi_{34} = \frac{(1-\nu^2)D}{2a} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]; \\ \varphi_{41} &= \frac{r}{8\pi D} \left[2 \ln \frac{r}{a} - 1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right], \quad \varphi_{42} = \frac{r}{2D} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]; \\ \varphi_{44} &= \frac{1}{2} \left[(1+\nu) \frac{a}{r} + (1-\nu) \frac{r}{a} \right]; \\ \varphi_{51} &= \frac{a^2}{8\pi D} \left\{ \left[1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \ln \frac{r}{a} + 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\}, \quad \varphi_{52} = \frac{a^2}{4D} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 - 2 \ln \frac{r}{a} \right]; \\ \varphi_{54} &= \frac{a}{4} \left\{ 2(1+\nu) \ln \frac{r}{a} + (1-\nu) \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right] \right\}; \end{aligned} \right\} (6)$$

пластинка без отверстия, $a = 0$; $\frac{dw}{dr}(a) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{21} &= \frac{1}{4\pi} \left[1 + (1+\nu) \ln \frac{r}{e} - \frac{1-\nu}{4} \left(\frac{e}{r} \right)^2 \right]; \quad \varphi_{22} = 1; \\ \varphi_{31} &= \frac{1}{4\pi} \left[\nu + (1+\nu) \ln \frac{r}{e} + \frac{1-\nu}{4} \left(\frac{e}{r} \right)^2 \right]; \quad \varphi_{32} = 1; \\ \varphi_{41} &= \frac{r}{4\pi D} \left[\ln \frac{r}{e} + \frac{1}{4} \left(\frac{e}{r} \right)^2 \right]; \quad \varphi_{42} = \frac{r}{(1+\nu)D}; \\ \varphi_{51} &= \frac{r^2}{16\pi D} \left\{ \left[2 + \left(\frac{e}{r} \right)^2 \right] \ln \frac{r}{e} - 1 + \frac{5}{4} \left(\frac{e}{r} \right)^2 \right\}; \quad \varphi_{52} = \frac{r^2}{2(1+\nu)D}, \end{aligned} \right\} (7)$$

где e — радиус центральной площадки, на которую действует сила $P(0)$, $e \ll b$.
Функции влияния φ_{21i} , ..., φ_{52j} определяются соответствующими формулами (6) при замене радиуса a на радиусы r_i или r_j . Функции $\varphi^*(r)$ для произвольной нагрузки $q(r)$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^* &= 2\pi \int_a^r q(r_1) r_1 dr_1; \quad \varphi_2^* = \Phi_1 + \Phi_2; \quad \varphi_3^* = \Phi_1 - \Phi_2; \\ \varphi_4^* &= \frac{r}{D} \left(\frac{\Phi_1}{1+\nu} - \frac{\Phi_2}{1-\nu} \right); \quad \varphi_5^* = \int_a^r \varphi_1^*(r_1) dr_1, \end{aligned} \right\} (8)$$

где

$$\Phi_1(r) = \frac{1+\nu}{4\pi} \int_a^r \frac{1}{r_1} \varphi_1^*(r_1) dr_1; \quad \Phi_2(r) = \frac{1-\nu}{4\pi r^2} \int_a^r r_1 \varphi_1^*(r_1) dr_1. \quad (9)$$

Для равномерной нагрузки q , приложенной к участку пластинки от $r = c$ до $r = b$ (см. рис. 1)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^*(r) &= \pi q \delta_c (r^2 - c^2); \\ \Phi_1(r) &= \frac{1+\nu}{8} q \delta_c \left(r^2 - c^2 - 2c^2 \ln \frac{r}{c} \right); \\ \Phi_2(r) &= \frac{1-\nu}{16r^2} q \delta_c (r^2 - c^2)^2; \\ \Phi_3^*(r) &= \frac{1}{64D} q \delta_c \left[(r^2 - c^2)(r^2 + 5c^2) - 4c^2(2r^2 + c^2) \ln \frac{r}{c} \right], \end{aligned} \right\} (10)$$

где

$$\delta_c = \begin{cases} 0 & \text{при } r < c \\ 1 & \text{при } r \geq c. \end{cases}$$

Формулы (5) — (10) позволяют рассчитывать круглые пластинки при любых условиях закрепления и нагрузки.

Пример 1. Рассчитать пластинку, заделанную по внутреннему контуру и нагруженную изгибающим моментом M_{rb} по внешнему контуру. Полагая в формулах (5) $P(a) = \frac{dw}{dr}(a) = w(a) = P_t = M_f = \Phi^* = 0$ и находя $M_r(a)$ из условия

$$M_r(b) = \Phi_{22}(b) M_r(a) = M_{rb},$$

получим

$$\begin{aligned} M_r(r) &= \frac{\Phi_{22}(r)}{\Phi_{22}(b)} M_{rb} = \frac{1+\nu+(1-\nu)\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1+\nu+(1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right)^2} M_{rb}; \\ M_\theta(r) &= \frac{\Phi_{23}(r)}{\Phi_{23}(b)} M_{rb} = \frac{1+\nu-(1-\nu)\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1+\nu+(1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right)^2} M_{rb}; \\ w(r) &= \frac{\Phi_{52}(r)}{\Phi_{52}(b)} M_{rb} = -\frac{1+2\ln\frac{r}{a}-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{1+\nu+(1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right)^2} \frac{a^2 M_{rb}}{2D}. \end{aligned}$$

Пример 2. Рассчитать пластинку без отверстия, опертую по наружному контуру и нагруженную распределенной нагрузкой, меняющейся по линейному закону (рис. 3) $q(r) = q_0 \left(1 - \frac{r}{b}\right)$. По формулам (8) — (9) находим

$$\begin{aligned} \Phi_1^*(r) &= 2\pi q_0 \int_0^r \left(1 - \frac{r_1}{b}\right) r_1 dr_1 = \pi q_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3b}\right); \\ \Phi_1(r) &= \frac{1+\nu}{4} q_0 \int_0^r r_1 \left(1 - \frac{2r_1}{3b}\right) dr_1 = \frac{(1+\nu) q_0 r^3}{8} \left(1 - \frac{4r}{9b}\right); \\ \Phi_2(r) &= \frac{1-\nu}{4r^2} q_0 \int_0^r r_1^2 \left(1 - \frac{2r_1}{3b}\right) dr_1 = \frac{(1-\nu) q_0 r^3}{16} \left(1 - \frac{8r}{15b}\right); \\ \Phi_3^*(r) &= \frac{q_0 r^4}{64D} \left(1 - \frac{64r}{225b}\right). \end{aligned}$$

Полагая в формулах (5) $P(0) = \frac{dw}{dr}(0) = P_t = M_f = 0$ и находя $M_r(0)$ из условия

$$M_r(b) = \Phi_{22}(b) M_r(0) + \Phi_3^*(b) = 0, \quad \text{где } \Phi_{22}(b) = 1,$$

получим

$$\begin{aligned} M_r(r) &= \Phi_2^*(r) - \Phi_3^*(b) = -q_0 b^2 \left[\frac{3+\nu}{16} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) - \frac{4+\nu}{45} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \right]; \\ M_\theta(r) &= \Phi_3^*(r) - \Phi_2^*(b) = -q_0 b^2 \left[\frac{3+\nu}{16} \left(1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \frac{r^2}{b^2}\right) - \frac{4+\nu}{45} \left(1 - \frac{1+4\nu}{4+\nu} \frac{r^2}{b^2}\right) \right]; \\ w(r) &= \frac{(b^2 - r^2) \Phi_3^*(b)}{2(1+\nu)D} + \Phi_3^*(r) - \Phi_2^*(b) = \\ &= \frac{q_0 b^4}{D} \left[\frac{71+29\nu}{1440(1+\nu)} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) - \frac{1}{64} \left(1 - \frac{r^4}{b^4}\right) + \frac{1}{225} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Пример 3. Рассчитать пластинку без отверстия, заделанную по наружному контуру и нагруженную в центре сосредоточенной силой P . Полагая в формулах (5) $P(0) = P$, $\frac{dw}{dr}(0) = P_t = M_r = \Phi^* = 0$ и находя $M_r(0)$ из условия

$$\frac{dw}{dr}(b) = \Phi_{41}(b) P + \Phi_{42}(b) M_r(0) = 0,$$

получим с учетом выражений (7) при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} M_r(r) &= \left[\Phi_{21}(r) - \Phi_{22}(r) \frac{\Phi_{41}(b)}{\Phi_{42}(b)} \right] P = \frac{P}{4\pi} \left[1 + (1+\nu) \ln \frac{r}{b} \right]; \\ M_\theta(r) &= \left[\Phi_{31}(r) - \Phi_{32}(r) \frac{\Phi_{41}(b)}{\Phi_{42}(b)} \right] P = \frac{P}{4\pi} \left[\nu + (1+\nu) \ln \frac{r}{b} \right]; \\ w(r) &= \left\{ \Phi_{51}(r) - \Phi_{52}(b) - [\Phi_{52}(r) - \Phi_{52}(b)] \frac{\Phi_{41}(b)}{\Phi_{42}(b)} \right\} P = \\ &= \frac{P}{16\pi D} \left(b^2 - r^2 + 2r^2 \ln \frac{r}{b} \right). \end{aligned}$$

В точке приложения сосредоточенной силы P расчетные моменты и напряжения стремятся к бесконечности. Поэтому сосредоточенную силу надо прикладывать к пластинке через жесткий центр, относительный радиус которого $\alpha_0 = \frac{a_0}{b}$ определяют из условия $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, что приводит к уравнению

$$\Psi(\alpha_0) \leq \frac{[\sigma] h^2}{6P}, \quad (11)$$

где для пластинки с шарнирной опорой на наружном контуре

$$\Psi(\alpha_0) = -\frac{2(1+\nu) \ln \alpha_0 - (1-\nu)(1-\alpha_0^2)}{4\pi [1+\nu+(1-\nu)\alpha_0^2]}, \quad (12)$$

с заделкой по наружному контуру

$$\Psi(\alpha_0) = -\frac{2 \ln \alpha_0 + 1 - \alpha_0^2}{4\pi (1-\alpha_0^2)}. \quad (13)$$

При $\alpha_0^2 \ll 1$ и $\nu = 0,3$ получаем из формул (12) и (13) соответственно

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &\geq \exp \left(-1,05 \frac{[\sigma] h^2}{P} + 0,27 \right) \\ \alpha_0 &\geq \exp \left(-1,05 \frac{[\sigma] h^2}{P} - 0,50 \right). \end{aligned} \right\} (14)$$

Расчеты с помощью таблиц. Для удобства расчетов в табл. 1 приведены значения функций $\Phi(r)$, определенные по формулам (6) — (7) и $\Phi^*(r)$ — по формулам (8) — (10) при $\nu = 0,3$ в зависимости от параметра x , соответственно равного отношению a/r или c/r . Если в качестве x принять отношения r_1/r или r_1/c , получим значения функций $\Phi_1(r)$ или $\Phi_j(r)$.

1. Функции влияния для круглых пластинок

Функция влияния	x										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Φ_{41}	—	0.26578	0.19324	0.14990	0.11819	0.09260	0.07067	0.05110	0.03311	0.01619	0
Φ_{23}	1	0.65350	0.66400	0.68150	0.70600	0.73750	0.77600	0.82150	0.87400	0.93850	1
$\Phi_{24} (r/D)$	—	4.50450	2.18400	1.38017	0.95550	0.68250	0.48533	0.33150	0.20475	0.09606	0
Φ_{31}	—	0.21063	0.13976	0.09921	0.07140	0.05082	0.03502	0.02269	0.01306	0.00561	0
Φ_{33}	1	0.64650	0.63600	0.61850	0.59400	0.56250	0.52400	0.47850	0.42600	0.36650	0.30000
$\Phi_{34} (r/D)$	—	4.59550	2.36600	1.65317	1.19500	0.81750	0.58133	0.39850	0.26275	0.15106	0.01000
$\Phi_{41} (D/r)$	—	0.14384	0.08988	0.05960	0.03849	0.02532	0.01518	0.00809	0.00443	0.00202	0
$\Phi_{42} (D/r)$	0.76923	0.49500	0.48000	0.45500	0.42000	0.37500	0.32000	0.25500	0.18000	0.09500	0
Φ_{44}	—	3.56500	1.88000	1.36167	1.13500	1.02500	0.97333	0.95500	0.95750	0.97889	1
$\Phi_{51} (D/r^2)$	—	0.05314	0.02840	0.01601	0.00887	0.00463	0.00218	0.00085	0.00024	0.00003	0
$\Phi_{53} (D/r^2)$	0.38462	0.28599	0.20781	0.17332	0.13670	0.10086	0.06805	0.04011	0.01859	0.00483	0
$\Phi_{54} (1/r)$	—	1.86217	1.04923	0.76561	0.60574*	0.48777	0.38589	0.28979	0.19478	0.09858	0
$\Phi_1^* (1/r^2)$	—	3.11017	3.01583	2.85885	2.63894	2.35619	2.01062	1.60221	1.13097	0.59690	0
$\Phi_2^* (1/r^2)$	—	0.20625	0.17540	0.14883	0.11972	0.09017	0.06215	0.03745	0.01776	0.00472	0
$\Phi_3^* (1/r^2)$	—	0.11875	0.09476	0.07643	0.05798	0.04095	0.02631	0.01470	0.00642	0.00156	0
$\Phi_4^* (D/r^2)$	—	0.06250	0.04631	0.03490	0.02425	0.01527	0.00843	0.00380	0.00120	0.00016	0
$\Phi_5^* (D/r^2) \times 10$	—	0.15625	0.09792	0.06463	0.03833	0.01999	0.00875	0.00293	0.00081	0.00004	0

Пример 4. Для пластинки без отверстия, заделанной по наружному контуру и нагруженной на радиусе $r/b = 0,2$ распределенной нагрузкой Q , найти прогиб на радиусе $r/b = 0,5$. Положим в формулах (5) $P(0) = \frac{dw}{dr}(0) = M_r = \Phi^* = 0, i = 1, P_1 = 2\pi Q, r_1/b = 0,2$.

Из условия

$$\frac{dw}{dr}(b) = \Phi_{42}(b) M_r(0) + \Phi_{41,1}(b) P_1 = 0,$$

где согласно табл. 1 при $x = a/b = 0 \Phi_{42}(b) = 0,76923 b/D$ и при $x_1 = r_1/b = 0,2 \Phi_{41,1}(b) = 0,03988 b/D$, находим $M_r(0) = -0,1168 P_1$.

Далее, из условия

$$w(b) = w(0) + \Phi_{52}(b) M_r(0) + \Phi_{51,1}(b) P_1 = 0,$$

где $\Phi_{52}(b) = 0,38462 b^2/D$ и $\Phi_{51,1}(b) = 0,02840 b^2/D$, находим $w(0) = 0,01652 P_1 b^2/D$ и, полагая для $r/b = 0,5$ величину $x_1 = r_1/r = 0,4$, определяем

$$w(0,5b) = w(0) + \Phi_{52}(0,5b) M_r(0) + \Phi_{51,1}(0,5b) P_1 = (0,01652 - 0,38462 \cdot 0,5^2 \cdot 0,1168 + 0,00887 \cdot 0,5^2) \frac{P_1 b^2}{D} = 0,00751 \frac{P_1 b^2}{D}.$$

Для наиболее важных случаев нагружения в табл. 2 при $\nu = 0,3$ приведены значения безразмерных коэффициентов максимальных напряжений K_σ, K'_σ , прогибов K_w, K'_w и углов наклона K_ϕ, K'_ϕ . Если на пластинку действует давление q , то

$$\sigma_{\max} = K_\sigma \frac{qb^2}{h^2}; \quad w_{\max} = K_w \frac{qb^4}{Eh^3}; \quad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{\max} = K_\phi \frac{qb^3}{Eh^3}. \quad (15)$$

Если действует сосредоточенная в центре сила P , то

$$\sigma_{\max} = K'_\sigma \frac{P}{h^2}; \quad w_{\max} = K'_w \frac{Pb^2}{Eh^3}; \quad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{\max} = K'_\phi \frac{Pb}{Eh^3}.$$

Для распределенной по окружности r_i нагрузки $Q_i = P_i/2\pi r_i$ в формулах (16) надо заменить P на P_i .

Если приложен распределенный по окружности r_j момент M_j , надо в формулах (16) заменить P на M_j . Знак при K_σ или K'_σ соответствует нижней стороне пластинки. В точках заделки $K_{\sigma\theta} = \nu K_\sigma$; $K'_{\sigma\theta} = \nu K'_\sigma$. На радиусе приложения момента M_j коэффициенты напряжений претерпевают скачки $\Delta K_\sigma = 6$ и $\Delta K_{\sigma\theta} = 1,8$.

Комбинируя данные табл. 2, можно получать решения для более сложных схем нагружения и опирания.

Пример 5. Для схемы нагружения на рис. 4, а найти прогиб в центре пластинки. Разобьем пластинку на две части (рис. 4, б); I — нагружение которой соответствует схеме 15 при $\beta = 0$ и схеме 17 при $\beta = 1$, и II — с нагружением по схемам 1 и 5 при $\beta = \alpha$. Суммируя деформации от силы P и неизвестного момента $M_r^I(b_1) = -M_r^I(b_1) = M$, найдем отношение M/P из условия равенства углов поворота обеих частей при $r = b_1$, для чего в схемах 15 и 17 надо принять $r = b = b_1$, а в схемах 1 и 5 $r = a = b_1, b = b_2$ и $\alpha = b_1/b_2 = \beta$. Так как

$$\frac{dw^I}{dr}(r=b) = (K'_{\phi 15} P - K'_{\phi 17} M) \frac{b_1}{Eh_1^3} = \frac{dw^{II}}{dr}(r=a) = (K'_{\phi 1} P + K'_{\phi 5} M) \frac{b_2}{Eh_2^3},$$

$$m = \frac{M}{P} = \frac{K'_{\phi 15} b_1^3 - K'_{\phi 1}}{K'_{\phi 17} b_1^3 + K'_{\phi 5} b_2^3},$$

* Расчеты выполнены Н. М. Малинкиной.

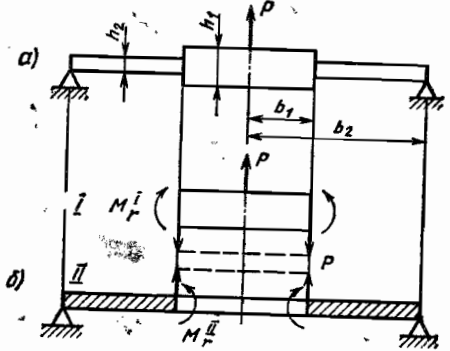


Рис. 4. Расчет сложной пластинки

2. Коэффициенты напряжений K_{σ} , прогибов K_w и углов поворота K_{φ} для круглых пластин

α	β	1.				2.	
		$K'_{\sigma\theta}, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=a$	$K'_{\varphi}, r=a$	$K'_{\varphi}, r=b$	$K'_{\sigma r}, r=a$	$K'_w, r=a$
0.1	0.1	-8.221	0.632	-0.644	-0.726	-2.440	0.4677
	0.2	-2.342	0.572	-0.468	-0.689	-1.774	0.4518
	0.4	-1.432	0.442	-0.287	-0.590	-1.085	0.3692
	0.6	-0.857	0.299	-0.171	-0.445	-0.649	0.2549
	0.8	-0.401	0.148	-0.080	-0.249	-0.304	0.1280
	0.9	-0.196	0.074	-0.039	-0.131	-0.149	0.0635
0.2	0.1	-2.411	0.704	-0.966	-0.835	-1.746	0.3503
	0.2	-1.874	0.612	-0.749	-0.758	-1.354	0.3375
	0.4	-1.477	0.523	-0.591	-0.680	-1.068	0.3071
	0.6	-0.883	0.347	-0.353	-0.498	-0.639	0.2178
	0.8	-0.414	0.171	-0.166	-0.274	-0.299	0.1106
0.4	0.4	-1.688	0.721	-1.351	-1.102	-1.004	0.1530
	0.5	-1.323	0.590	-1.058	-0.925	-0.787	0.1452
	0.6	-1.010	0.465	-0.808	-0.751	-0.601	0.1256
	0.8	-0.473	0.227	-0.378	-0.392	-0.281	0.0674
0.6	0.6	-1.325	0.590	-1.591	-1.382	-0.546	0.0439
	0.7	-0.958	0.434	-1.150	-1.031	-0.395	0.0396
	0.8	-0.621	0.285	-0.746	-0.688	-0.256	0.0291
0.8	0.8	-1.104	0.341	-1.766	-1.653	-0.227	0.0051
	0.9	-0.540	0.168	-0.864	-0.818	-0.111	0.0035
0.9	0.9	-1.023	0.181	-1.841	-1.784	-0.104	0.0006
α	β	3.			4.		
		$K'_{\sigma\theta}, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=b$	$K'_w, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=b$	$K'_w, r=a$
0.1	0.1	-2.203	0.504	0.2490	-1.744	0.455	0.1685
	0.2	-1.377	0.478	0.2080	-1.089	0.447	0.1578
	0.4	-0.605	0.410	0.1308	-0.479	0.396	0.1088
	0.6	-0.233	0.309	0.0638	-0.184	0.304	0.0553
	0.8	-0.053	0.173	0.0172	-0.042	0.171	0.0153
	0.9	-0.013	0.091	0.0044	-0.010	0.091	0.0040
0.2	0.2	-1.305	0.533	0.2376	-1.123	0.413	0.1148
	0.3	-0.865	0.484	0.1814	-0.745	0.405	0.1070
	0.4	-0.574	0.434	0.1438	-0.494	0.381	0.0899
	0.6	-0.221	0.318	0.0688	-0.190	0.298	0.0480
	0.8	-0.050	0.175	0.0183	-0.043	0.170	0.0136

Продолжение табл. 2

α	β	$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{r_i}{b}$			$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{r_i}{b}$		
		$K'_{\sigma\theta}, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=b$	$K'_w, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=b$	$K'_w, r=a$
0.4	0.4	-0.475	0.510	0.1333	-0.564	0.311	0.0435
	0.5	-0.304	0.428	0.0969	-0.362	0.300	0.0394
	0.6	-0.183	0.347	0.0647	-0.217	0.271	0.0302
	0.8	-0.041	0.181	0.0174	-0.049	0.164	0.0096
0.6	0.6	-0.142	0.379	0.0420	-0.285	0.203	0.0115
	0.7	-0.076	0.232	0.0257	-0.152	0.189	0.0095
	0.8	-0.032	0.188	0.0123	-0.064	0.149	0.0054
0.8	0.8	-0.024	0.194	0.0050	-0.114	0.099	0.0013
	0.9	-0.006	0.096	0.0015	-0.027	0.073	0.0006
0.9	0.9	-0.005	0.097	0.0006	-0.052	0.048	0.0002
α	β	5.					
		$K'_{\sigma\theta}, r=a$	$K'_w, r=a$	$K'_{\varphi}, r=a$	$K'_{\varphi}, r=b$		
0.1	0.1	-6.12	0.40	-1.58	-0.24		
	0.2	-8.05	0.76	-1.61	-0.50		
	0.4	-8.56	1.73	-1.71	-1.52		
	0.6	-9.41	2.80	-1.88	-3.21		
	0.8	-10.59	3.78	-2.13	-5.59		
	1.0	-12.12	4.56	-2.42	-8.64		
0.2	0.2	-6.50	1.21	-3.32	-1.00		
	0.4	-8.32	2.21	-3.53	-2.05		
	0.6	-9.70	3.33	-3.88	-3.80		
	0.8	-10.92	4.38	-4.37	-6.25		
	1.0	-12.50	5.25	-5.00	-9.40		
0.4	0.4	-8.28	3.39	-8.07	-4.57		
	0.6	-11.09	4.63	-8.87	-6.57		
	0.8	-12.49	5.85	-9.99	-9.37		
	1.0	-14.29	6.92	-11.43	-13.97		
0.6	0.6	-12.75	5.99	-17.46	-13.50		
	0.8	-16.39	7.39	-19.66	-17.18		
	1.0	-18.75	8.68	-22.50	-21.90		
0.8	0.8	-27.33	8.88	-46.61	-42.67		
	1.0	-33.33	10.39	-53.33	-51.07		
0.9	0.9	-57.16	10.41	-106.12	-102.32		
	1.0	-63.16	11.21	-113.68	-110.72		

Продолжение табл. 2

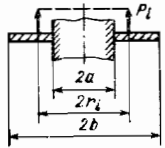
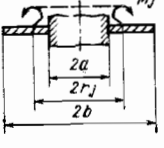
		6.			7.			
α	β	 $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{r_j}{b}$			 $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{r_j}{b}$			
		$K'_{\sigma\theta}, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=b$	$K'_{\omega}, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=a$	$K'_{\sigma r}, r=b$	$K'_{\omega}, r=a$	
0.1	0.1	-5.78	0.17	0.277	-6.00	0	0	
	0.2	-7.35	0.34	0.498	-5.82	0.18	0.230	
	0.4	-6.43	1.05	0.929	-5.09	0.91	0.694	
	0.6	-4.90	2.23	1.102	-3.88	2.12	0.922	
	0.8	-2.76	3.88	0.835	-2.18	3.82	0.734	
	0.9	-1.45	4.88	0.495	-1.15	4.85	0.442	
	0.2	0.2	-5.17	0.64	0.656	-6.00	0	0
		0.3	-6.61	0.92	0.880	-5.68	0.31	0.258
		0.4	-6.10	1.31	1.067	-5.25	0.75	0.493
0.6		-4.65	2.43	1.207	-4.00	2.00	0.770	
0.4	0.4	-3.25	2.11	0.955	-6.00	0	0	
	0.5	-4.51	2.53	1.084	-5.35	0.64	0.231	
	0.6	-3.85	3.04	1.122	-4.57	1.43	0.394	
	0.8	-2.16	4.33	0.846	-2.57	3.43	0.437	
0.6	0.6	-1.19	3.70	0.642	-6.00	0	0	
	0.7	-2.38	4.17	0.666	-4.78	1.22	0.154	
	0.8	-1.68	4.71	0.576	-3.38	2.62	0.215	
0.8	0.8	+0.52	5.01	0.197	-6.00	0	0	
	0.9	-0.68	5.48	0.153	-3.17	2.83	0.054	
0.9	0.9	+1.21	5.54	0.052	-6.00	0	0	
α	β	8.		9.		10.		
		 $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$		 $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$		 $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$		
		$K_{\sigma\theta}, r=a$	$K_{\omega}, r=a$	$K_{\sigma r}, r=a$	$K_{\omega}, r=b$	$K_{\sigma r}, r=a$	$K_{\omega}, r=a$	
0.1	0.1	-2.379	0.750	5.787	0.8266	-1.802	0.6282	
	0.2	-2.126	0.693	5.749	0.8260	-1.610	0.5847	
	0.4	-1.451	0.504	5.340	0.8041	-1.099	0.4302	
	0.6	-0.753	0.274	4.336	0.7049	-0.571	0.2355	
	0.8	-0.215	0.080	2.597	0.4596	-0.163	0.0694	
	0.9	-0.057	0.021	1.413	0.2606	-0.043	0.0186	

Продолжение табл. 2

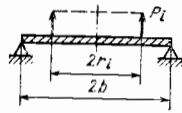
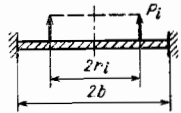
α	β	$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$		$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$		$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$	
		$K_{\sigma\theta}, r=a$	$K_{\omega}, r=a$	$K_{\sigma r}, r=a$	$K_{\omega}, r=b$	$K_{\sigma r}, r=a$	$K_{\omega}, r=a$
0.2	0.2	-2.192	0.813	3.681	0.5638	-1.585	0.4925
	0.3	-1.861	0.711	3.646	0.5631	-1.345	0.4883
	0.4	-1.497	0.586	3.526	0.5570	-1.092	0.3673
	0.6	-0.777	0.317	2.949	0.5014	-0.562	0.2029
	0.8	-0.222	0.092	1.814	0.3361	-0.160	0.0600
0.4	0.4	-1.710	0.787	1.633	0.1926	-1.018	0.2113
	0.5	-1.288	0.602	1.600	0.1918	-0.766	0.1688
	0.6	-0.888	0.421	1.491	0.1858	-0.528	0.1219
	0.8	-0.254	0.122	0.985	0.1362	-0.151	0.0369
0.6	0.6	-1.165	0.530	0.618	0.0383	-0.481	0.0500
	0.7	-0.702	0.322	0.586	0.0377	-0.290	0.0327
	0.8	-0.333	0.154	0.481	0.0333	-0.137	0.0163
0.8	0.8	-0.592	0.184	0.135	0.0023	-0.122	0.0035
	0.9	-0.157	0.049	0.103	0.0020	-0.032	0.0010
0.9	0.9	-0.298	0.053	0.032	0.0001	-0.030	0.0002
α	β	11.			12.		
		 $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$			 $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$		
		$K_{\sigma\theta}, r=a$	$K_{\sigma r}, r=b$	$K_{\omega}, r=a$	$K_{\sigma r}, r=a$	$K_{\sigma r}, r=b$	$K_{\omega}, r=a$
0.1	0.1	-0.869	0.747	0.1813	-0.688	0.728	0.1496
	0.2	-0.709	0.701	0.1600	-0.561	0.686	0.1341
	0.4	-0.371	0.534	0.0979	-0.294	0.526	0.0844
	0.6	-0.129	0.309	0.0390	-0.102	0.306	0.0343
	0.8	-0.018	0.098	0.0062	-0.014	0.097	0.0056
0.2	0.2	-0.672	0.730	0.1753	-0.579	0.668	0.1120
	0.3	-0.507	0.650	0.1422	-0.436	0.604	0.0944
	0.4	-0.352	0.549	0.1059	-0.303	0.517	0.0728
	0.6	-0.122	0.314	0.0418	-0.105	0.303	0.0303
	0.8	-0.017	0.098	0.0066	-0.015	0.097	0.0050
0.4	0.4	-0.292	0.596	0.0995	-0.346	0.474	0.0443
	0.5	-0.184	0.464	0.0672	-0.218	0.387	0.0324
	0.6	-0.101	0.330	0.0396	-0.120	0.288	0.0204
	0.8	-0.014	0.100	0.0063	-0.017	0.094	0.0036

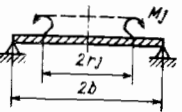
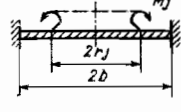
Продолжение табл. 2

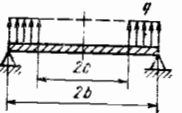
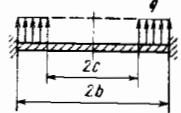
α	β	$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$			$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b}$		
		$K_{\sigma\theta}, r = a$	$K_{\sigma r}, r = b$	$K_w, r = a$	$K_{\sigma r}, r = a$	$K_{\sigma r}, r = b$	$K_w, r = a$
0.6	0.6	-0,079	0,348	0,0269	-0,158	0,250	0,0100
	0.7	-0,036	0,213	0,0132	-0,071	0,169	0,0056
	0.8	-0,011	0,103	0,0045	-0,022	0,089	0,0021
0.8	0.8	-0,008	0,105	0,0020	-0,040	0,072	0,0007
	0.9	-0,001	0,028	0,0003	-0,005	0,024	0,0001
0.9	0.9	-0,001	0,028	0,0001	-0,010	0,019	0,0000

α	β	13. 		14. 	
		$K'_{\sigma r}, r = a$	$K'_w, r = b$	$K'_{\sigma r}, r = a$	$K'_w, r = b$
0.1	0.2	0.666	0.0159	-6.09	-0.349
	0.4	1.355	0.0985	-6.48	-1.291
	0.6	1.791	0.2128	-7.12	-2.317
	0.8	2.136	0.3398	-8.02	-3.243
	0.9	2.292	0.4042	-8.57	-3.628
	1.0	2.440	0.4677	-9.18	-3.943
0.2	0.4	0.678	0.0432	-6.38	-0.920
	0.6	1.168	0.1325	-7.01	-1.909
	0.8	1.447	0.2397	-7.90	-2.784
	0.9	1.600	0.2952	-8.44	-3.138
	1.0	1.746	0.3503	-9.04	-3.418
0.4	0.6	0.404	0.0274	-6.59	-0.898
	0.8	0.723	0.0856	-7.43	-1.645
	0.9	0.867	0.1191	-7.93	-1.921
	1.0	1.004	0.1530	-8.50	-2.114
0.6	0.8	0.290	0.0148	-6.76	-0.634
	0.9	0.421	0.0287	-7.22	-0.841
	1.0	0.546	0.0439	-7.73	-0.958
0.8	0.9	0.116	0.0016	-6.41	-0.165
	1.0	0.227	0.0051	-6.86	-0.232
0.9	1.0	0.104	0.0006	-6.43	-0.056

Продолжение табл. 2

β	15. 			16. 		
	$K'_{\sigma r} = K'_{\sigma\theta}, r = 0$	$K'_w, r = 0$	$K'_{\varphi}, r = b$	$K'_{\sigma r} = K'_{\sigma\theta}, r = 0$	$K'_{\sigma r}, r = b$	$K'_w, r = 0$
0	∞	0.552	-0.669	∞	0.478	0.217
0.1	-1.595	0.536	-0.662	-1.122	0.473	0.205
0.2	-1.159	0.501	-0.642	-0.701	0.458	0.181
0.4	-0.709	0.400	-0.562	-0.308	0.401	0.119
0.6	-0.424	0.273	-0.428	-0.118	0.306	0.059
0.8	-0.199	0.136	-0.241	-0.027	0.172	0.016
0.9	-0.097	0.068	-0.127	-0.006	0.091	0.004

β	17. 			18. 		
	$K'_{\sigma r} = K'_{\sigma\theta}, r = 0$	$K'_w, r = 0$	$K'_{\varphi}, r = b$	$K'_{\sigma r} = K'_{\sigma\theta}, r = 0$	$K'_{\sigma r}, r = b$	$K'_w, r = 0$
0.1	-3.92	0.17	-0.08	-3.86	0.06	0.126
0.2	-3.98	0.52	-0.34	-3.74	0.24	0.352
0.4	-4.24	1.47	-1.34	-3.28	0.96	0.800
0.6	-4.66	2.52	-3.02	-2.50	2.16	1.004
0.8	-5.24	3.47	-5.38	-1.40	3.84	0.780
0.9	-5.60	3.87	-6.80	-0.74	4.86	0.467
1.0	-6.00	4.20	-8.40	0	6.00	0

β	19. 			20. 		
	$K_{\sigma r} = K_{\sigma\theta}, r = 0$	$K_w, r = 0$	$K_{\varphi}, r = b$	$K_{\sigma r} = K_{\sigma\theta}, r = 0$	$K_{\sigma r}, r = b$	$K_w, r = 0$
0	-1.238	0.696	-1.050	-0.488	0.750	0.1706
0.1	-1.178	0.679	-1.029	-0.443	0.735	0.1640
0.2	-1.052	0.630	-0.968	-0.361	0.691	0.1459
0.4	-0.718	0.461	-0.741	-0.189	0.529	0.0905
0.6	-0.373	0.251	-0.430	-0.066	0.307	0.0364
0.8	-0.107	0.074	-0.136	-0.010	0.097	0.0059

где $\bar{b} = b_1/b_2$, $\bar{h} = h_2/h_1$, а цифры в индексе при K'_φ указывают номер соответствующей схемы в табл. 2. Прогиб при $r = 0$

$$\omega(0) = \omega^I(0) + \omega^{II}(a) = [(K'_{\omega 15} - mK'_{\omega 17}) \bar{b}^2 \bar{h}^3 + K'_{\omega 1} + mK'_{\omega 5}] \frac{P b_2^3}{E h_2^3}$$

Например, для $\bar{b} = 0,4$ и $\bar{h} = 0,4$ в схемах 1 и 5 следует положить $\alpha = \beta = \bar{b} = 0,4$; тогда

$$m = \frac{-0,669 \cdot 0,4^4 + 1,351}{-8,4 \cdot 0,4^4 - 8,07} = -0,162,$$

$$\omega(0) = [(0,552 + 0,162 \cdot 4,4) 0,4^5 + 0,721 - 0,162 \cdot 3,39] \frac{P b_2^3}{E h_2^3} = 0,184 \frac{P b_2^3}{E h_2^3}$$

Температурные напряжения. Если температура меняется по толщине и вдоль радиуса пластинки $T = f(z, r)$, где z — расстояние от срединной плоскости ($-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$), то в основных соотношениях (5) появляются дополнительные члены $\varphi_T(r)$: пластинка с отверстием, $a \neq 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{T1} = 0, \quad \varphi_{T2}(r) &= \frac{1-\nu}{r^2} \int_a^r r_1 M_T(r_1) dr_1, \quad \varphi_{T3}(r) = (1-\nu) M_T(r) - \varphi_{T2}(r); \\ \varphi_{T4}(r) &= -\frac{1}{Dr} \int_a^r r_1 M_T(r_1) dr_1, \quad \varphi_{T5}(r) = \int_a^r \varphi_{T4}(r_1) dr_1; \end{aligned} \right\} (16)$$

пластинка без отверстия, $a = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{T1} = 0, \quad \varphi_{T2}(r) &= (1-\nu) \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r r_1 M_T(r_1) dr_1 - \frac{1}{2} M_T(0) \right]; \\ \varphi_{T3}(r) &= (1-\nu) [M_T(r) - M_T(0)] - \varphi_{T2}(r); \\ \varphi_{T4}(r) &= -\frac{r}{D} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r r_1 M_T(r_1) dr_1 + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} M_T(0) \right]; \\ \varphi_{T5}(r) &= \int_0^r \varphi_{T4}(r_1) dr_1, \end{aligned} \right\} (17)$$

здесь

$$M_T(r) = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} T(z, r) z dz. \quad (18)$$

При $r \rightarrow 0$ в формулах (17) $\frac{1}{r^2} \int_0^r r_1 M_T(r_1) dr_1 \rightarrow \frac{M_T(0)}{2}$, поэтому $\varphi_T(0) = 0$.

Для температурного поля, симметричного относительно срединной плоскости пластинки, $M_T \equiv 0$. При линейном законе $T(z, r) = T_{cp}(r) + \Delta T(r) \frac{z}{h}$, где ΔT —

разность температур поверхностей

$$M_T(r) = \frac{E h^2 \alpha \Delta T(r)}{12(1-\nu)}. \quad (19)$$

Пример 6. Найти температурные напряжения и деформации в пластинке без отверстия для постоянной по радиусу разности температур $\Delta T = \text{const}$ при свободном и заделанном наружном контуре. Если $M_T = \text{const}$, то по формулам (17) $\varphi_{T2} = \varphi_{T3} = 0$,

$$\varphi_{T4}(r) = -\frac{r M_T}{D(1+\nu)}, \quad \varphi_{T5}(r) = -\frac{r^2 M_T}{2D(1+\nu)}.$$

Для свободного контура $M_r(b) = M_r(0) = 0$, т. е. $M_r(r) = M_\theta(r) = 0$ и напряжений в пластинке нет, а ее кривизна $\frac{d^2 \omega}{dr^2} = -\frac{M_T}{2(1+\nu)}$ постоянна. При заданном наружном контуре $\frac{d\omega}{dr}(b) = \frac{1}{(1+\nu)D} M_r(0) - \frac{1}{D(1+\nu)} = 0$, откуда $M_r(0) = M_T$, т. е. $M_r(r) = M_\theta(r) = M_T$, но $\omega(r) = 0$ (пластинка остается плоской). Максимальные температурные напряжения в пластинке будут

$$\sigma_r \text{ max} = \sigma_\theta \text{ max} = \frac{E\alpha \Delta T}{2(1-\nu)}. \quad (20)$$

Выражение (20) справедливо для пластинки, защемленной по любому контуру.

ПРОРЫВНЫЕ МЕМБРАНЫ

В технике находят применение прорывные мембраны, которые разрушаются при определенном давлении $q_{\text{разр}}$. К моменту разрушения первоначально плоская пластинка сильно прогибается, приближаясь к участку сферы радиуса $R = b/\sin \varphi$ (рис. 5), толщина ее уменьшается от h до h_1 , а распределение напряжений по толщине становится почти постоянным и равным $\sigma_{\text{разр}}$. Из условия равновесия

$$q_{\text{разр}} = \frac{2h_1 \sigma_{\text{разр}} \sin \varphi}{b}. \quad (21)$$

При больших пластических деформациях сжимаемостью материала можно пренебречь. Тогда

$$h_1 = \frac{h \sin^2 \varphi}{2(1 - \cos \varphi)}. \quad (22)$$

Относительная деформация в момент разрушения

$$\epsilon_{\text{разр}} = \frac{R\varphi}{b} - 1 = \frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \quad (23)$$

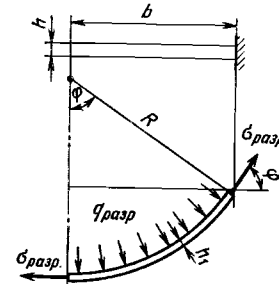


Рис. 5. К расчету прорывной мембраны

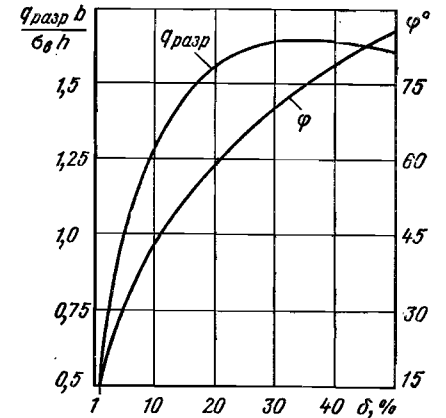


Рис. 6. Зависимость разрушающего давления $q_{\text{разр}}$ и угла φ от относительного удлинения материала при разрыве δ

должна равняться относительному удлинению материала при разрыве $\varepsilon_{разр} = \delta$, а разрушающее напряжение $\sigma_{разр}$ — истинному пределу прочности S_K , приближенно равному

$$S_K \approx \sigma_B (1 + \delta) = \sigma_B \frac{\varphi}{\sin \varphi} \quad (24)$$

Из выражений (21) — (24) следует

$$\frac{q_{разр} b}{\sigma_B h} = \frac{\varphi \sin^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} \quad (25)$$

Исключив из (23) и (25) угол φ , получим расчетную зависимость $\frac{q_{разр} b}{\sigma_B h} = f(\delta)$, представленную на рис. 6, где также приведена кривая $\varphi(\delta)$. Разрушающее давление увеличивается с ростом пластичности материала, достигая максимума при $\delta \approx 35\%$ и $\varphi \approx 75^\circ$, однако, начиная с $\delta = 20\%$, давление $q_{разр}$ меняется слабо,

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ

В прямоугольных пластинках (рис. 7) в сечениях, параллельных внешним сторонам пластинок, возникают изгибающие моменты M_x и M_y , крутящие моменты $M_{xy} = -M_{yx}$ и поперечные силы Q_x, Q_y . Из условий равновесия элемента пластинки и соотношений упругости

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (26)$$

Решение этого уравнения обычно ищут в форме двойных бесконечных рядов.

Пример 1. Свободно опертая пластинка с размерами сторон a и b нагружена давлением, распределенным по закону

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Граничные условия

$$w = 0, \quad M_x = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a; \quad w = 0, \quad M_y = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b.$$

Легко проверить, что в этом случае уравнению (26) и всем граничным условиям удовлетворяет решение

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

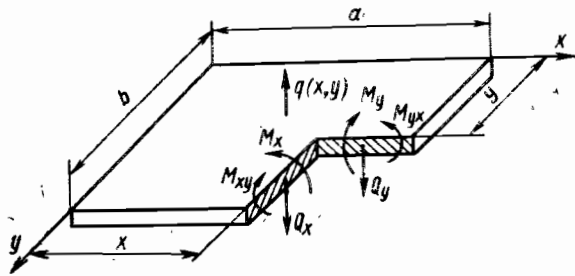


Рис. 7. Поперечные силы Q_x, Q_y , внутренние изгибающие M_x, M_y и крутящие M_{xy}, M_{yx} моменты в прямоугольной пластинке

3. Коэффициенты прогибов и напряжений для прямоугольных пластинок

Отношение сторон $\gamma = \frac{b}{a}$	Равномерная нагрузка $q = \text{const}$		Сосредоточенная сила в центре P^*	
	В центре K_w	В центре $-K_{\sigma x}$	В центре K'_w	В середине стороны b $K'_{\sigma x}$
1,0	0,0443	0,2874	0,0611	0,754
1,1	0,0530	0,3324	0,0668	0,845
1,2	0,0616	0,3762	0,0706	0,894
1,3	0,0697	0,4164	0,0737	0,935
1,4	0,0770	0,4530	0,0755	0,962
1,5	0,0843	0,4872	0,0768	0,981
1,6	0,0906	0,5172	0,0777	0,991
1,7	0,0963	0,5448	0,0783	0,997
1,8	0,1017	0,5688	0,0786	1,000
1,9	0,1065	0,5891	0,0787	1,003
2,0	0,1106	0,6102	0,0788	1,004
3,0	0,1385	0,7134	0,0790	1,007
4,0	0,1400	0,7410	0,0791	1,008
5,0	0,1416	0,7476	0,0791	1,008
∞	0,1422	0,7500	0,0791	1,008

* В центре $K'_\sigma = -\infty$.

Максимальные изгибающие моменты и максимальный прогиб в центре пластинки

$$M_x \max = \frac{1 + \nu \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\pi^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2} q_0 a^2;$$

$$M_y \max = \frac{\nu + \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\pi^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2} q_0 a^2;$$

$$w \max = \frac{12(1 - \nu^2)}{\pi^4 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2} \frac{q_0 a^4}{Eh^3}.$$

В общем случае формулы для максимальных напряжений и максимального прогиба прямоугольной пластинки можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = K_\sigma \frac{qa^2}{h^2}, \quad w_{\max} = K_w \frac{qa^4}{Eh^3}, \quad (27)$$

причем коэффициенты K_σ и K_w зависят от отношения сторон пластинки b/a и от величины коэффициента ν .

При действии сосредоточенной силы

$$\sigma_{\max} = K'_\sigma \frac{P}{h^2}; \quad w_{\max} = K'_w \frac{Pa^2}{Eh^3}. \quad (28)$$

Значения коэффициентов K_σ (K'_σ) и K_w (K'_w) для некоторых расчетных случаев при $\nu = 0,3$ приведены в табл. 3.

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку постоянной толщины под действием осесимметричных нагрузок и нагрева (рис. 1). Этот случай имеет основное практическое значение.

Уравнение радиального прогиба оболочки. Если $w(x)$ — радиальное перемещение точек срединной поверхности (положительному значению соответствует перемещение точек на окружность большего радиуса), то будем иметь следующее дифференциальное уравнение:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} w = q + \frac{Eh}{a} \alpha T_0 - D(1 + \nu) \frac{d^2}{dx^2} \left(\alpha \frac{\Delta T}{h} \right), \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, кгс·см; E — модуль упругости материала; h — толщина оболочки, см; a — радиус срединной поверхности, см; q — распределенная нагрузка, приложенная к срединной поверхности оболочки, кгс/см² (например, внутреннее давление); α — коэффициент линейного расширения, 1/°C; T_0 — температура срединной поверхности оболочки, °C; ΔT — разность температур наружной и внутренней поверхности оболочки, °C; ν — коэффициент Пуассона.

Распределение температур по толщине стенки предполагается линейным.

В поперечном сечении оболочки [сечении, перпендикулярном к оси (рис. 2)] на единицу длины действуют: перерезывающая сила в кг/см

$$Q = D \left[\frac{d^3 w}{dx^3} + (1 + \nu) \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{\Delta T}{h} \right) \right]; \quad (2)$$

изгибающий момент в кгс·см/см

$$M_x = D \left[\frac{d^2 w}{dx^2} + (1 + \nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right]. \quad (3)$$

В продольном сечении (сечении, проходящем через ось) на единицу длины приходится:

растягивающая сила в кгс/см

$$N_\theta = Eh \left(\frac{w}{a} - \alpha T_0 \right); \quad (4)$$

изгибающий момент в кгс·см/см

$$M_\theta = D \left[\nu \frac{d^2 w}{dx^2} + (1 + \nu) \frac{\alpha \Delta T}{h} \right]. \quad (5)$$

При отсутствии нагрева $M_\theta = \nu M_x$.

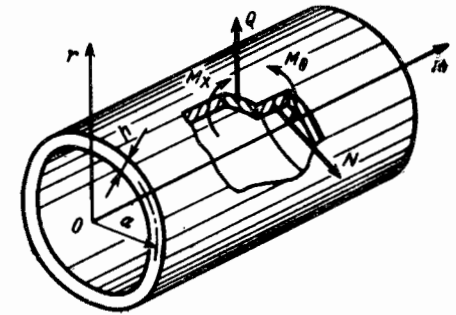


Рис. 1. Силовые факторы в сечениях цилиндрической оболочки

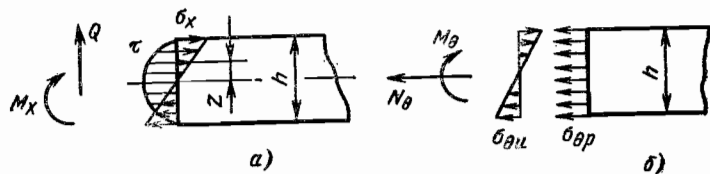


Рис. 2. Напряжения в сечениях оболочки: а — в поперечном; б — в продольном

Напряжение изгиба в поперечном сечении распределяется по толщине стенки линейно

$$\sigma_x = -\frac{12M_x}{h^3}z, \tag{6}$$

где z — расстояние от точки до срединной поверхности оболочки.
Касательное напряжение в поперечном сечении

$$\tau = \frac{Q}{h} \left(\frac{3}{2} - \frac{6z^2}{h^2} \right). \tag{7}$$

В продольном сечении возникают нормальные напряжения растяжения

$$\sigma_{\theta p} = \frac{N_{\theta}}{h} \tag{8}$$

и изгиба

$$\sigma_{\theta n} = -\frac{12M_{\theta}}{h^3}z. \tag{9}$$

Нормальное напряжение в продольном сечении

$$\sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{h} - \frac{12M_{\theta}}{h^3}z. \tag{10}$$

В формулах (6), (7), (9) и (10) для наружного слоя оболочки $z = \frac{1}{2}h$, для внутреннего $z = -\frac{1}{2}h$.

Длинные и короткие оболочки. При расчете следует различать длинные и короткие цилиндрические оболочки (рис. 3). Основное отличие длинных оболочек состоит в том, что можно пренебречь влиянием нагрузок, приложенных к одному краю, на напряженное состояние возле другого края.

Более детальное исследование этого вопроса показывает, что оболочку можно считать длинной, если параметр оболочки

$$\beta l \geq 3,$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt[3]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{ah}}. \tag{11}$$

Принимая $\nu = 0,3$, находим

$$\beta = \frac{1,285}{\sqrt{ah}}. \tag{12}$$

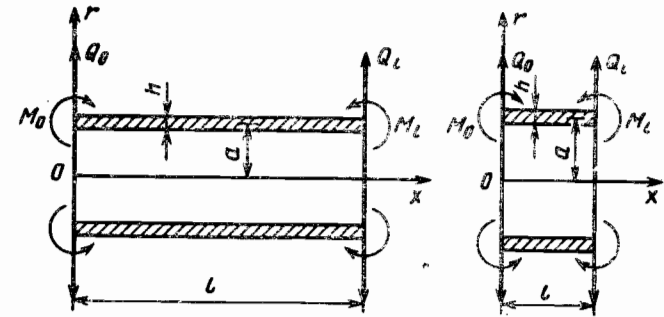


Рис. 3. Длинные и короткие цилиндрические оболочки

Для длинной оболочки $l \geq 2,4 \sqrt{ah}$.

Если ввести относительную толщину $\bar{h} = h/a$, то получим $\frac{l}{a} \geq 2,4 \sqrt{\bar{h}}$.

Например, при $\bar{h} = \frac{1}{10}$ находим $\frac{l}{a} \geq 0,76$, при $\bar{h} = \frac{1}{100}$, $\frac{l}{a} \geq 0,24$.

РАСЧЕТ ДЛИННЫХ ОБЛОЧЕК

Общее решение. Рассмотрим сначала случай, когда температурные напряжения отсутствуют ($T_0 = 0, \Delta T = 0$). Общий интеграл однородного уравнения (1)

$$w_0(x) = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \tag{13}$$

где величина β определяется равенством (11). Произвольные постоянные C_1 и C_2 находят из граничных условий. Для полного решения к величине $w_0(x)$ следует добавить частное решение неоднородного уравнения (1). Например, при постоянном по длине внутреннем давлении q это частное решение имеет вид

$$w_1(x) = \frac{qa^2}{Eh}.$$

Основные случаи расчета длинных цилиндрических оболочек.

1-й случай (рис. 4, а)

$$x=0; \quad \frac{d^2w}{dx^2}=0; \quad \frac{d^3w}{dx^3}=\frac{Q}{D}; \quad w(x)=\frac{Q}{2\beta^3D}e^{-\beta x}\cos\beta x; \quad w(0)=\frac{Q}{2\beta^3D};$$

$$w'(x)=-\frac{Q}{2\beta^2D}e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x); \quad w'(0)=-\frac{Q}{2\beta^2D};$$

$$M_x(x)=\frac{Q}{\beta}e^{-\beta x}\sin\beta x; \quad M_x(0)=0.$$

2-й случай (рис. 4, б)

$$x=0; \quad \frac{dw}{dx}=0; \quad \frac{d^3w}{dx^3}=\frac{Q}{D}; \quad w(x)=\frac{Q}{4\beta^3D}e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x); \quad w(0)=\frac{Q}{4\beta^3D};$$

$$w'(x)=-\frac{Q}{2\beta^2D}e^{-\beta x}\sin\beta x; \quad w'(0)=0;$$

$$M_x(x)=\frac{Q}{2\beta}e^{-\beta x}(\sin\beta x-\cos\beta x); \quad M_x(0)=-\frac{Q}{2\beta}.$$

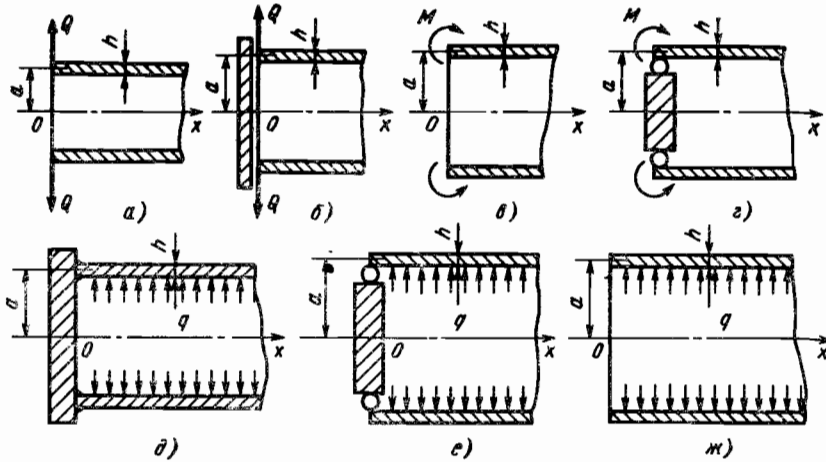


Рис. 4. Расчетные случаи для длинной цилиндрической оболочки

3-й случай (рис. 4, в)

$$x=0; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{D}; \quad \frac{d^3w}{dx^3} = 0; \quad w(x) = \frac{M}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x); \quad w(0) = \frac{M}{2\beta^2 D};$$

$$w'(x) = -\frac{M}{\beta D} e^{-\beta x} \cos \beta x; \quad w'(0) = -\frac{M}{\beta D}; \quad M_x(x) = M e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x);$$

$$M_x(0) = M.$$

4-й случай (рис. 4, г)

$$x=0; \quad w=0; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{D}; \quad w(x) = -\frac{M}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} \sin \beta x; \quad w(0)=0;$$

$$w'(x) = -\frac{M}{2\beta D} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x); \quad w'(0) = -\frac{M}{2\beta D};$$

$$M_x(x) = M e^{-\beta x} \cos \beta x; \quad M_x(0) = M.$$

5-й случай (рис. 4, д)

$$x=0; \quad w=0; \quad w'=0; \quad w(x) = \frac{qa^2}{Eh} [1 - e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)]; \quad w(0)=0;$$

$$w'(x) = 2\beta \frac{qa^2}{Eh} e^{-\beta x} \sin \beta x; \quad w'(0)=0; \quad M_x(x) = \frac{q}{2\beta^2} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$$

$$M_x(0) = \frac{q}{2\beta^2}.$$

6-й случай (рис. 4, е)

$$x=0; \quad w=0; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0; \quad w(x) = \frac{qa^2}{Eh} (1 - e^{-\beta x} \cos \beta x); \quad w(0)=0;$$

$$w'(x) = \frac{qa^2}{Eh} \beta e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x); \quad w'(0) = \beta \frac{qa^2}{Eh}; \quad M_x(x) = -\frac{q}{2\beta^2} e^{-\beta x} \sin \beta x;$$

$$M_x(0) = 0.$$

7-й случай (рис. 4, ж)

$$x=0; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3w}{dx^3} = 0; \quad w(x) = \frac{qa^2}{Eh}; \quad w'(x) = 0; \quad M_x(x) = 0.$$

РАСЧЕТ КОРОТКИХ ОБОЛОЧЕК

Общее решение. Если параметр оболочки $\beta l < 3$, то следует учитывать условия закрепления по обоим краям оболочки.

Решение уравнения (1) для короткой оболочки может быть представлено в следующей форме:

$$w(x) = w(0) K_0(\beta x) + \frac{1}{\beta} \frac{dw}{dx}(0) K_1(\beta x) + \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2w}{dx^2}(0) K_2(\beta x) + \frac{1}{\beta^3} \frac{d^3w}{dx^3}(0) K_3(\beta x) +$$

$$+ \frac{1}{\beta^3 D} \int_0^x K_3[\beta(x-x_1)] f(x_1) dx_1, \quad (14)$$

где $K_0(\beta x)$, $K_1(\beta x)$, $K_2(\beta x)$ и $K_3(\beta x)$ — функции А. Н. Крылова, определяемые равенствами:

$$K_0(\beta x) = \text{ch } \beta x \cos \beta x; \quad K_1(\beta x) = \frac{1}{2} (\text{ch } \beta x \sin \beta x + \text{sh } \beta x \cos \beta x);$$

$$K_2(\beta x) = \frac{1}{2} \text{sh } \beta x \sin \beta x; \quad K_3(\beta x) = \frac{1}{4} (\text{ch } \beta x \sin \beta x - \text{sh } \beta x \cos \beta x).$$

Значения этих функций приведены в таблице. Функция $f(x)$, входящая в формулу (14), представляет собой правую часть уравнения (1).

Основные случаи расчета коротких цилиндрических оболочек. В приведенных ниже формулах значения функции Крылова при $x = l$ обозначены соответственно через K_0 , K_1 , K_2 и K_3 .

Параметр

$$\beta = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{a^2 h^2}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{ah}}.$$

Здесь $\nu = 0,3$ — коэффициент Пуассона; a — радиус оболочки; h — толщина оболочки.

Цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

1-й случай (рис. 5, а). Сечение $x = l$ — жесткая заделка; сечение $x = 0$ свободное;

$$w(0) = \varphi_1 \frac{Q}{D\beta^3}; \quad \varphi_1 = \frac{K_1 K_2 - K_3 K_0}{K_0^2 + 4K_1 K_3}; \quad w'(0) = -\varphi_1 \frac{Q}{D\beta^2}; \quad \varphi_1 = \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{K_0^2 + 4K_1 K_3};$$

$$w(x) = \frac{Q}{D\beta^3} [\varphi_1 K_0(\beta x) - \varphi_1 K_1(\beta x) + K_3(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{Q}{\beta} [-4\varphi_1 K_2(\beta x) + 4\varphi_1 K_3(\beta x) + K_1(\beta x)].$$

2-й случай (рис. 5, б).

Функции А. Н. Крылова

βx	$K_0(\beta x)$	$K_1(\beta x)$	$K_2(\beta x)$	$K_3(\beta x)$	βx	$K_0(\beta x)$	$K_1(\beta x)$	$K_2(\beta x)$	$K_3(\beta x)$
0	1	0	0	0	1,22	0,6330	1,1306	0,7259	0,2996
0,002	1,0000	0,0020	0,00000	0,00000	1,24	0,6082	1,1426	0,7486	0,3142
0,004	1,0000	0,0040	0,00001	0,00000	1,26	0,5824	1,1545	0,7716	0,3294
0,006	1,0000	0,0060	0,00002	0,00000	1,28	0,5555	1,1659	0,7940	0,3450
0,008	1,0000	0,0080	0,00003	0,00000	1,30	0,5272	1,1767	0,8182	0,3612
0,010	1,0000	0,0100	0,00005	0,00000	1,32	0,4977	1,1870	0,8419	0,3778
0,012	1,0000	0,0120	0,00007	0,00000	1,34	0,4668	1,1966	0,8657	0,3940
0,014	1,0000	0,0140	0,00010	0,00000	1,36	0,4345	1,2056	0,8897	0,4124
0,016	1,0000	0,0160	0,00013	0,00000	1,38	0,4008	1,2139	0,9139	0,4304
0,018	1,0000	0,0180	0,00016	0,00000	1,40	0,3656	1,2216	0,9383	0,4489
0,020	1,0000	0,0200	0,0002	0,00000	1,42	0,3289	1,2286	0,9628	0,4680
0,040	1,0000	0,0400	0,0008	0,00001	1,44	0,2907	1,2333	0,9764	0,4882
0,060	1,0000	0,0600	0,0018	0,00005	1,46	0,2509	1,2402	1,0122	0,5075
0,080	1,0000	0,0800	0,0032	0,00010	1,48	0,2095	1,2448	1,0370	0,5280
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,00015	1,50	0,1664	1,2485	1,0619	0,5489
0,12	1,0000	0,1200	0,0072	0,00030	1,52	0,1216	1,2514	1,0870	0,5704
0,14	0,9999	0,1400	0,0098	0,00045	1,54	0,0746	1,2534	1,1120	0,5924
0,16	0,9999	0,1600	0,0128	0,00070	1,56	0,0268	1,2544	1,1371	0,6149
0,18	0,9998	0,1799	0,0162	0,00097	π	0,0000	1,2546	1,1506	0,6273
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,00135	2				
0,22	0,9996	0,2139	0,0242	0,00177	1,58	0,0233	1,2545	1,1622	0,6379
0,24	0,9995	0,2400	0,0288	0,00230	1,60	-0,0753	1,2535	1,1872	0,6614
0,26	0,9992	0,2599	0,0388	0,00292	1,62	-0,1291	1,2514	1,2123	0,6854
0,28	0,9990	0,2799	0,0392	0,00367	1,64	-0,1849	1,2483	1,2373	0,7099
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,00450	1,66	-0,2427	1,2440	1,2622	0,7349
0,32	0,9983	0,3199	0,0512	0,00545	1,68	-0,3026	1,2386	1,2971	0,7604
0,34	0,9978	0,3398	0,0578	0,00657	1,70	-0,3644	1,2321	1,3118	0,7862
0,36	0,9972	0,3598	0,0648	0,00775	1,72	-0,4284	1,2240	1,3363	0,8129
0,38	0,9965	0,3797	0,0722	0,00915	1,74	-0,4945	1,2148	1,3607	0,8398
0,40	0,9957	0,3996	0,0800	0,0107	1,76	-0,5628	1,2042	1,3849	0,8673
0,42	0,9943	0,4196	0,0881	0,0123	1,78	-0,6333	1,1923	1,4089	0,8952
0,44	0,9933	0,4394	0,0967	0,0142	1,80	-0,7060	1,1788	1,4326	0,9236
0,46	0,9925	0,4593	0,1057	0,0162	1,82	-0,7811	1,1640	1,4560	0,9525
0,48	0,9911	0,4791	0,1151	0,0184	1,84	-0,8584	1,1476	1,4791	0,9819
0,50	0,9895	0,4989	0,1249	0,0208	1,86	-0,9382	1,1296	1,5019	0,0117
0,52	0,9878	0,5187	0,1351	0,0234	1,88	-1,0203	1,1100	1,5243	1,0419
0,54	0,9858	0,5384	0,1456	0,0262	1,90	-1,1049	1,0888	1,5463	1,0727
0,56	0,9836	0,5582	0,1566	0,0292	1,92	-1,1920	1,0658	1,5679	1,1038
0,58	0,9811	0,5778	0,1680	0,0325	1,94	-1,2815	1,0411	1,5889	1,1354
0,60	0,9784	0,5974	0,1797	0,0360	1,96	-1,3736	1,0145	1,6095	1,1673
0,62	0,9754	0,6169	0,1919	0,0397	1,98	-1,4683	0,9861	1,6295	1,1997
0,64	0,9721	0,6364	0,2044	0,0436	2,00	-1,5656	0,9557	1,6489	1,2325
0,66	0,9684	0,6558	0,2173	0,0479	2,02	-1,6656	0,9235	1,6677	1,2657
0,68	0,9644	0,6751	0,2306	0,0524	2,04	-1,7682	0,8891	1,6859	1,2992
0,70	0,9600	0,6944	0,2443	0,0571	2,06	-1,8734	0,8523	1,7033	1,3331
0,72	0,9552	0,7135	0,2584	0,0621	2,08	-1,9815	0,8142	1,7199	1,3674
0,74	0,9501	0,7326	0,2729	0,0674	2,10	-2,0923	0,7735	1,7358	1,4019
0,76	0,9444	0,7515	0,2877	0,0730	2,12	-2,2058	0,7305	1,7509	1,4368
0,78	0,9384	0,7704	0,3029	0,0789	2,14	-2,3221	0,6852	1,7650	1,4719
0,80	0,9318	0,7891	0,3185	0,0851	2,16	-2,4413	0,6376	1,7783	1,5074
0,82	0,9247	0,8077	0,3345	0,0917	2,18	-2,5633	0,5876	1,7905	1,5431
0,84	0,9171	0,8261	0,3508	0,0985	2,20	-2,6882	0,5351	1,8018	1,5790
0,86	0,9090	0,8443	0,3675	0,1057	2,22	-2,8160	0,4800	1,8119	1,6151
0,88	0,9002	0,8624	0,3846	0,1132	2,24	-2,9466	0,4224	1,8209	1,6515
0,90	0,8931	0,8803	0,4020	0,1211	2,26	-3,0802	0,3621	1,8288	1,6880
0,92	0,8868	0,8980	0,4198	0,1293	2,28	-3,2167	0,2992	1,8354	1,7246
0,94	0,8701	0,9155	0,4379	0,1379	2,30	-3,3562	0,2334	1,8407	1,7614
0,96	0,8587	0,9323	0,4564	0,1468	2,32	-3,4986	0,1648	1,8447	1,7983
0,98	0,8466	0,9499	0,4753	0,1562	2,34	-3,6439	0,0935	1,8473	1,8352
1,00	0,8337	0,9667	0,4944	0,1658	2,36	-3,7922	0,0196	1,8484	1,8721
1,02	0,8201	0,9832	0,5139	0,1759	2,38	-3,9435	-0,0582	1,8480	1,9091
1,04	0,8056	0,9995	0,5337	0,1864	2,40	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,9460
1,06	0,7902	1,0154	0,5539	0,1973	2,42	-4,2548	-0,2221	1,8425	1,9829
1,08	0,7740	1,0311	0,5744	0,2086	2,44	-4,4150	-0,3089	1,8372	2,0198
1,10	0,7568	1,0464	0,5951	0,2202	2,46	-4,5780	-0,3987	1,8301	2,0564
1,12	0,7387	1,0613	0,6162	0,2323	2,48	-4,7439	-0,4920	1,8212	2,0929
1,14	0,7196	1,0759	0,6376	0,2449	2,50	-4,9128	-0,5885	1,8104	2,1292
1,16	0,6995	1,0901	0,6593	0,2579	2,52	-5,0846	-0,6885	1,7976	2,1653
1,18	0,6784	1,1039	0,6812	0,2713	2,54	-5,2593	-0,7919	1,7829	2,2012
1,20	0,6561	1,1173	0,7034	0,2851	2,56	-5,4368	-0,8989	1,7660	2,2366

Продолжение табл.

βx	$K_0(\beta x)$	$K_1(\beta x)$	$K_2(\beta x)$	$K_3(\beta x)$	βx	$K_0(\beta x)$	$K_1(\beta x)$	$K_2(\beta x)$	$K_3(\beta x)$
2,58	-5,6172	-1,0094	1,7469	2,2718	3,12	-11,3427	-5,5268	0,1220	2,8358
2,60	-5,8003	-1,1236	1,7255	2,3065	3,14	-11,5919	-5,7559	0,0091	2,8872
2,62	-5,9862	-1,2415	1,7019	2,3408	π	-11,5919	-5,7743	0,0000	2,8872
2,64	-6,1748	-1,3630	1,6759	2,3746	3,16	-11,8045	-5,9897	-0,1083	2,8862
2,66	-6,3661	-1,4884	1,6473	2,4078	3,18	-12,0353	-6,2281	-0,2304	2,8769
2,68	-6,5580	-1,6177	1,6163	2,4404	3,20	-12,2656	-6,4710	-0,3574	2,8655
2,70	-6,7565	-1,7509	1,5826	2,4724	3,22	-12,4956	-6,7187	-0,4893	2,8573
2,72	-6,9556	-1,8880	1,5462	2,5037	3,24	-12,7373	-6,9709	-0,6262	2,8434
2,74	-7,1571	-2,0291	1,5071	2,5343	3,26	-12,9527	-7,2277	-0,7681	2,8266
2,76	-7,3611	-2,1743	1,4650	2,5640	3,28	-13,1795	-7,4890	-0,9153	2,8067
2,78	-7,5673	-2,3236	1,4201	2,5928	3,30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,7838
2,80	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208	3,32	-13,6286	-8,0252	-1,2255	2,7577
2,82	-7,9866	-2,6346	1,3210	2,6477	3,34	-13,8501	-8,3000	-1,3888	2,7282
2,84	-8,1995	-2,7965	1,2667	2,6736	3,36	-14,0695	-8,5792	-1,5576	2,6953
2,86	-8,4144	-2,9626	1,2091	2,6984	3,38	-14,2866	-8,8627	-1,7320	2,6589
2,88	-8,6312	-3,1331	1,1481	2,7219	3,40	-14,5008	-9,1506	-1,9121	2,6188
2,90	-8,8471	-3,3079	1,0837	2,7443	3,42	-14,7118	-9,4427	-2,0980	2,5750
2,92	-9,0708	-3,4871	1,0158	2,7653	3,44	-14,9197	-9,7391	-2,2899	2,5272
2,94	-9,2923	-3,6707	0,9442	2,7849	3,46	-15,1238	-10,0395	-2,4876	2,4754
2,96	-9,5158	-3,8588	0,8689	2,8030	3,48	-15,3238	-10,3440	-2,6916	2,4195
2,98	-9,7404	-4,0513	0,7898	2,8196	3,50	-15,5198	-10,6524	-2,9116	2,3593
3,00	-9,9669	-4,2484	0,7068	2,8346	3,52	-15,7108	-10,9647	-3,1476	2,2948
3,02	-10,1943	-4,4500	0,6198	2,8479	3,54	-15,8971	-11,2808	-3,3700	2,2248
3,04	-10,4225	-4,6557	0,5288	2,8593	3,56	-16,0780	-11,6007	-3,5689	2,2211
3,06	-10,6516	-4,8669	0,4336	2,8690	3,58	-16,2531	-11,9240	-3,8041	2,2159
3,08	-10,8815	-5,0823	0,3341	2,8766	3,60	-16,4218	-12,2507	-4,0458	2,0735
3,10	-11,1119	-5,3022	0,2303	2,8823					

Сечение $x = 0$ свободное; сечение $x = l$ — шарнирная опора:

$$\omega(0) = \varphi_2 \frac{Q}{D\beta^3}; \quad \varphi_2 = \frac{K_1^2 + 4K_3}{4(K_1K_2 - K_0K_3)}; \quad \omega'(0) = -\psi_2 \frac{Q}{D\beta^2}; \quad \psi_2 = \frac{K_0K_1 + 4K_2K_3}{4(K_1K_2 - K_0K_3)}$$

$$\omega(x) = \frac{Q}{D\beta^3} [\varphi_2 K_0(\beta x) - \psi_2 K_1(\beta x) + K_3(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{Q}{\beta} [-4\varphi_2 K_2(\beta x) + 4\psi_2 K_3(\beta x) + K_1(\beta x)].$$

3-й случай (рис. 5, в).

Сечение $x = 0$ свободное; сечение $x = l$ — скользящая заделка;

$$\omega(0) = \varphi_3 \frac{Q}{D\beta^3}; \quad \varphi_3 = \frac{K_1^2 + 4K_3}{4(K_1K_0 + 4K_2K_3)}; \quad \omega'(0) = -\psi_3 \frac{Q}{D\beta^2}; \quad \psi_3 = \frac{K_1K_2 - K_0K_3}{K_1K_0 + 4K_2K_3}$$

$$\omega(x) = \frac{Q}{D\beta^3} [\varphi_3 K_0(\beta x) - \psi_3 K_1(\beta x) + K_3(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{Q}{\beta} [-4\varphi_3 K_2(\beta x) + 4\psi_3 K_3(\beta x) + K_1(\beta x)].$$

4-й случай (рис. 5, з).

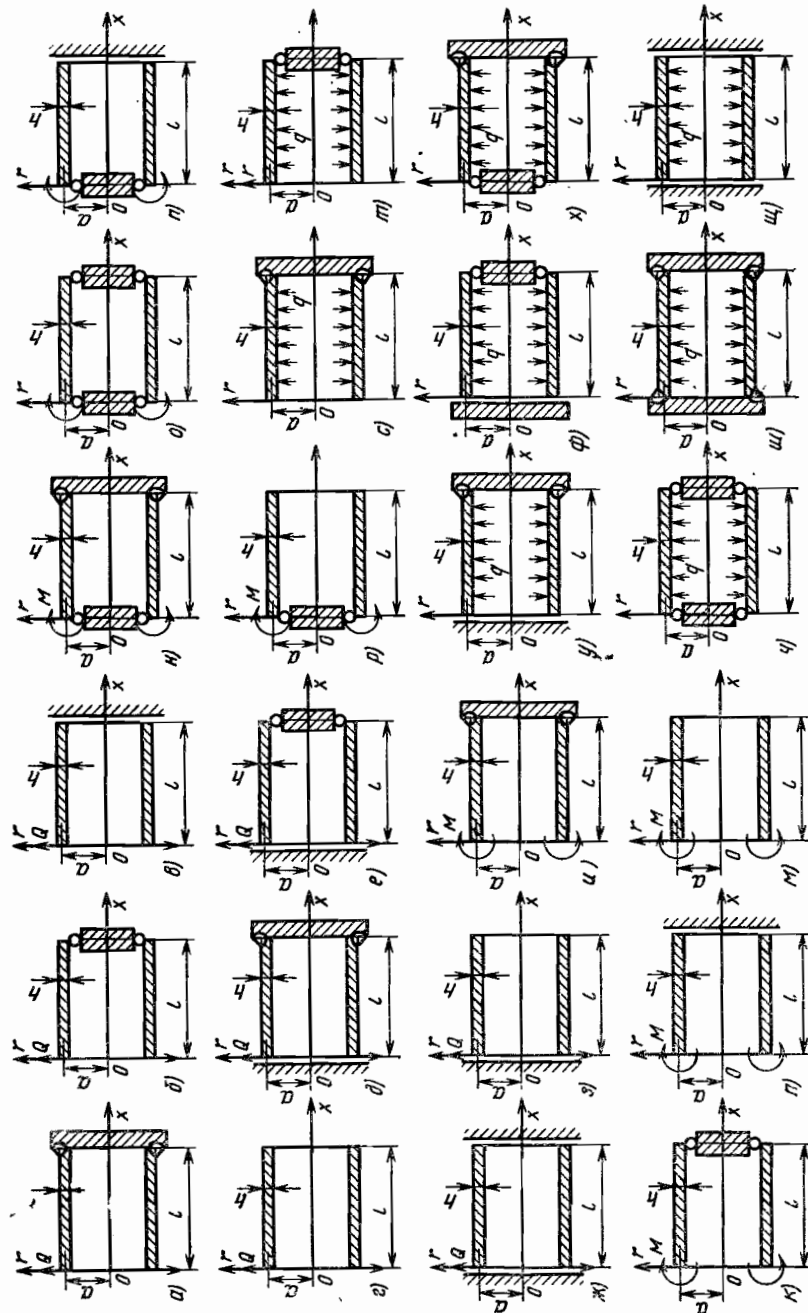


Рис. 5. Расчетные случаи для короткой цилиндрической оболочки

5-й случай (рис. 5, д).

Сечение $x = 0$ скользящая заделка; сечение $x = l$ — жесткая заделка:

$$\omega(0) = \varphi_5 \frac{Q}{D\beta^3}; \quad \varphi_5 = \frac{K_0^2 - K_1 K_3}{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}; \quad \frac{M_x(0)}{D} = \omega''(0) = -\psi_5 \frac{Q}{D\beta};$$

$$\psi_5 = \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}; \quad \omega(x) = \frac{Q}{D\beta^3} [\varphi_5 K_0(\beta x) - \psi_5 K_2(\beta x) + K_3(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{Q}{\beta} [-4\varphi_5 K_2(\beta x) - \psi_5 K_0(\beta x) + K_1(\beta x)].$$

6-й случай (рис. 5, е).

Сечение $x = 0$ скользящая заделка; сечение $x = l$ — шарнирная опора:

$$\omega(0) = \varphi_6 \frac{Q}{D\beta^3}; \quad \varphi_6 = \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{K_0^2 + 4K_2^2}; \quad \frac{M_x(0)}{D} = \omega''(0) = -\psi_6 \frac{Q}{D\beta};$$

$$\psi_6 = \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{K_0^2 + 4K_2^2};$$

$$\omega(x) = \frac{Q}{D\beta^3} [\varphi_6 K_0(\beta x) - \psi_6 K_2(\beta x) + K_3(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{Q}{\beta} [-4\varphi_6 K_2(\beta x) - \psi_6 K_0(\beta x) + K_1(\beta x)].$$

7-й случай (рис. 5, ж).

Сечение $x = 0$ — скользящая заделка; сечение $x = l$ — скользящая заделка:

$$\omega(0) = \varphi_7 \frac{Q}{D\beta^3}; \quad \varphi_7 = \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{4(K_1^2 + K_3^2)}; \quad \frac{M_x(0)}{D} = \omega''(0) = -\psi_7 \frac{Q}{D\beta};$$

$$\psi_7 = \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{K_1^2 + 4K_3^2}; \quad \omega(x) = \frac{Q}{D\beta^3} [\varphi_7 K_0(\beta x) - \psi_7 K_2(\beta x) + K_3(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{Q}{\beta} [-4\varphi_7 K_2(\beta x) - \psi_7 K_0(\beta x) + K_1(\beta x)].$$

8-й случай (рис. 5, з).

Сечение $x = 0$ — скользящая заделка; сечение $x = l$ — свободное:

$$\omega(0) = \varphi_8 \frac{Q}{D\beta^3}; \quad \varphi_8 = \frac{K_0^2 + 4K_1 K_3}{4(K_0 K_1 + 4K_2 K_3)}; \quad \frac{M_x(0)}{D} = \omega''(0) = -\psi_8 \frac{Q}{D\beta};$$

$$\psi_8 = \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}; \quad \omega(x) = \frac{Q}{D\beta^3} [\varphi_8 K_0(\beta x) - \psi_8 K_2(\beta x) + K_3(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{Q}{\beta} [-4\varphi_8 K_2(\beta x) - \psi_8 K_0(\beta x) + K_1(\beta x)].$$

9-й случай (рис. 5, и).

Сечение $x = 0$ свободное; сечение $x = l$ — жесткая заделка:

$$\omega(0) = \varphi_9 \frac{M}{D\beta^2}; \quad \varphi_9 = \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{K_0^2 + 4K_1 K_3}; \quad \omega'(0) = -\psi_9 \frac{M}{D\beta};$$

$$\psi_9 = \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{K_0^2 + 4K_1 K_3}; \quad \omega(x) = \frac{M}{D\beta^2} [\varphi_9 K_0(\beta x) - \psi_9 K_1(\beta x) + K_2(\beta x)];$$

$$M_x(x) = M [-4\varphi_9 K_2(\beta x) + 4\psi_9 K_3(\beta x) + K_0(\beta x)].$$

10-й случай (рис. 5, к).

Сечение $x = 0$ свободное; сечение $x = l$ — шарнирная опора:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \varphi_{10} \frac{M}{D\beta^2}; \quad \varphi_{10} = \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{4(K_1 K_2 - K_0 K_3)}; \quad \omega'(0) = -\psi_{10} \frac{M}{D\beta}; \\ \psi_{10} &= \frac{K_0^2 + 4K_2^2}{4(K_1 K_2 - K_0 K_3)}; \quad \omega(x) = \frac{M}{D\beta^2} [\varphi_{10} K_0(\beta x) - \psi_{10} K_1(\beta x) + K_2(\beta x)]; \\ M_x(x) &= M [-4\varphi_{10} K_2(\beta x) + 4\psi_{10} K_3(\beta x) + K_0(\beta x)]. \end{aligned}$$

11-й случай (рис. 5, л).

Сечение $x = 0$ свободное; сечение $x = l$ — скользящая заделка;

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \varphi_{11} \frac{M}{D\beta^2}; \quad \varphi_{11} = \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}; \quad \omega(0) = -\psi_{11} \frac{M}{D\beta}; \quad \psi_{11} = \frac{K_1^2 + 4K_3^2}{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}; \\ \omega(x) &= \frac{M}{D\beta^2} [\varphi_{11} K_0(\beta x) - \psi_{11} K_1(\beta x) + K_2(\beta x)]; \\ M_x(x) &= M [-4\varphi_{11} K_2(\beta x) + 4\psi_{11} K_3(\beta x) + K_0(\beta x)]. \end{aligned}$$

12-й случай (рис. 5, м).

Сечение $x = 0$ свободное; сечение $x = l$ — свободное:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \varphi_{12} \frac{M}{D\beta^2}; \quad \varphi_{12} = \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)}; \quad \omega'(0) = -\psi_{12} \frac{M}{D\beta}; \\ \psi_{12} &= \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{4(K_2^2 - K_1 K_3)}; \quad \omega(x) = \frac{M}{D\beta^2} [\varphi_{12} K_0(\beta x) - \psi_{12} K_1(\beta x) + K_2(\beta x)]; \\ M_x(x) &= M [-4\varphi_{12} K_2(\beta x) + 4\psi_{12} K_3(\beta x) + K_0(\beta x)]. \end{aligned}$$

13-й случай (рис. 5, н).

Сечение $x = 0$ — шарнирная опора; сечение $x = l$ — жесткая заделка:

$$\begin{aligned} \omega'(0) &= -\varphi_{13} \frac{M}{D\beta}; \quad \varphi_{13} = \frac{K_2^2 - K_1 K_3}{K_1 K_2 - K_0 K_3}; \quad \frac{Q(0)}{D} = \omega''(0) = -\psi_{13} \frac{M\beta}{D}; \\ \psi_{13} &= \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{K_1 K_2 - K_0 K_3}; \\ \omega(x) &= \frac{M}{D\beta^2} [-\varphi_{13} K_1(\beta x) - \psi_{13} K_3(\beta x) + K_2(\beta x)]; \\ M_x(x) &= M [4\varphi_{13} K_3(\beta x) - \psi_{13} K_1(\beta x) + K_0(\beta x)]. \end{aligned}$$

14-й случай (рис. 5, о).

Сечение $x = 0$ — шарнирная опора; сечение $x = l$ — шарнирная опора:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= -\varphi_{14} \frac{M}{D\beta}; \quad \varphi_{14} = \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{K_1^2 + 4K_3^2}; \quad \frac{Q(0)}{D} = \omega'''(0) = -\psi_{14} \frac{M\beta}{D}; \\ \psi_{14} &= \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{K_1^2 + 4K_3^2}; \quad \omega(x) = \frac{M}{D\beta^2} [-\varphi_{14} K_1(\beta x) - \psi_{14} K_3(\beta x) + K_2(\beta x)]; \\ M_x(x) &= M [4\varphi_{14} K_3(\beta x) - \psi_{14} K_1(\beta x) + K_0(\beta x)]. \end{aligned}$$

15-й случай (рис. 5, п).

Сечение $x = 0$ — шарнирная опора; сечение $x = l$ — скользящая заделка:

$$\begin{aligned} \omega'(0) &= -\varphi_{15} \frac{M}{D\beta}; \quad \varphi_{15} = \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{K_0^2 + 4K_3^2}; \quad \frac{Q(0)}{D} = \omega'''(0) = -\psi_{15} \frac{M\beta}{D}; \\ \psi_{15} &= \frac{4(K_1 K_2 - K_0 K_3)}{K_0^2 + 4K_3^2}; \quad \omega(x) = \frac{M}{D\beta^2} [-\varphi_{15} K_1(\beta x) - \psi_{15} K_3(\beta x) + K_2(\beta x)]; \\ M_x(x) &= M [4\varphi_{15} K_3(\beta x) - \psi_{15} K_1(\beta x) + K_0(\beta x)]. \end{aligned}$$

16-й случай (рис. 5, р).

Сечение $x = 0$ — шарнирная опора; сечение $x = l$ — свободное:

$$\begin{aligned} \omega'(0) &= -\varphi_{16} \frac{M}{D\beta}; \quad \varphi_{16} = \frac{K_0^2 + 4K_1 K_3}{4(K_1 K_2 - K_0 K_3)}; \quad \frac{Q(0)}{D} = \omega'''(0) = -\psi_{16} \frac{M\beta}{D}; \\ \psi_{16} &= \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{K_1 K_2 - K_0 K_3}; \quad \omega(x) = \frac{M}{D\beta^2} [-\varphi_{16} K_1(\beta x) - \psi_{16} K_3(\beta x) + K_2(\beta x)]; \\ M_x(x) &= M [4\varphi_{16} K_3(\beta x) - \psi_{16} K_1(\beta x) + K_0(\beta x)]. \end{aligned}$$

17-й случай (рис. 5, с).

Сечение $x = 0$ свободное; сечение $x = l$ — жесткая заделка:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \varphi_{17} \frac{qa^2}{Eh}; \quad \varphi_{17} = 1 - \frac{K_0}{K_0^2 + 4K_1 K_3}; \quad \omega'(0) = -\psi_{17} \frac{qa^2\beta}{Eh}; \\ \psi_{17} &= \frac{4K_3}{K_0^2 + 4K_1 K_3}; \quad \omega(x) = \frac{qa^2}{Eh} [1 + \varphi_{17} K_0(\beta x) - \psi_{17} K_1(\beta x) - K_0(\beta x)]; \\ M_x(x) &= \frac{q}{\beta^2} [-\varphi_{17} K_2(\beta x) + \psi_{17} K_3(\beta x) + K_2(\beta x)]. \end{aligned}$$

18-й случай (рис. 5, т).

Сечение $x = 0$ свободное; сечение $x = l$ — шарнирная опора:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \varphi_{18} \frac{qa^2}{Eh}; \quad \varphi_{18} = 1 + \frac{K_3}{K_1 K_2 - K_0 K_3}; \quad \omega'(0) = -\psi_{18} \frac{qa^2\beta}{Eh}; \\ \psi_{18} &= \frac{K_2}{K_1 K_2 - K_0 K_3}; \quad \omega(x) = \frac{qa^2}{Eh} [1 + \varphi_{18} K_0(\beta x) - \psi_{18} K_1(\beta x) - K_0(\beta x)]; \\ M_x(x) &= \frac{q}{\beta^2} [-\varphi_{18} K_2(\beta x) + \psi_{18} K_3(\beta x) + K_2(\beta x)]. \end{aligned}$$

19-й случай (рис. 5, у).

Сечение $x = 0$ — скользящая заделка; $x = l$ — жесткая заделка:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \varphi_{19} \frac{qa^2}{Eh}; \quad \varphi_{19} = \frac{4K_2 K_3 - K_1(1 - K_0)}{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}; \quad \frac{M_x(0)}{D} = \omega''(0) = -\psi_{19} \frac{qa^2\beta^2}{Eh}; \\ \psi_{19} &= \frac{4K_3}{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}; \quad \omega(x) = \frac{qa^2}{Eh} [1 - \varphi_{19} K_0(\beta x) - \psi_{19} K_2(\beta x) - K_0(\beta x)]; \\ M_x(x) &= \frac{q}{\beta^2} \left[-\varphi_{19} K_2(\beta x) - \frac{1}{4} \psi_{19} K_0(\beta x) + K_2(\beta x) \right]. \end{aligned}$$

20-й случай (рис. 5, ф).

Сечение $x = 0$ — скользящая заделка; сечение $x = l$ — шарнирная опора:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \varphi_{20} \frac{qa^2}{Eh}; \quad \varphi_{20} = 1 - \frac{K_0}{K_0^2 - 4K_2^2}; \quad \frac{M_x(0)}{D} = \omega''(0) = -\psi_{20} \frac{qa^2\beta^2}{Eh}; \\ \psi_{20} &= \frac{4K_2}{K_0^2 + 4K_2^2}; \quad \omega(x) = \frac{qa^2}{Eh} [1 + \varphi_{20} K_0(\beta x) - \psi_{20} K_2(\beta x) - K_0(\beta x)]; \\ M_x(x) &= \frac{q}{\beta^2} \left[-\varphi_{20} K_2(\beta x) - \frac{1}{4} \psi_{20} K_0(\beta x) + K_2(\beta x) \right]. \end{aligned}$$

21-й случай (рис. 5, х).

Сечение $x = 0$ — шарнирная опора; сечение $x = l$ — жесткая заделка:

$$w'(0) = \varphi_{21} \frac{qa^2\beta}{Eh}; \quad \varphi_{21} = \frac{4K_3^2 - K_2(1-K_0)}{K_1K_2 - K_0K_3}; \quad \frac{Q(0)}{D} = w'''(0) = -\psi_{21} \frac{qa^2\beta^3}{Eh};$$

$$\psi_{21} = \frac{4K_1K_3 - K_0(1-K_0)}{K_1K_2 - K_0K_3}; \quad w(x) = \frac{qa^2}{Eh} [1 + \varphi_{21}K_1(\beta x) - \psi_{21}K_3(\beta x) - K_0(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{q}{\beta^2} \left[-\varphi_{21}K_3(\beta x) - \frac{1}{4}\psi_{21}K_1(\beta x) + K_2(\beta x) \right].$$

22-й случай (рис. 5, ч).

Сечение $x = 0$ — шарнирная опора; сечение $x = l$ — шарнирная опора:

$$w'(0) = \varphi_{22} \frac{qa^2\beta}{Eh}; \quad \varphi_{22} = \frac{4K_2K_3 - K_2(1-K_0)}{K_1^2 + 4K_3^2}; \quad \frac{Q(0)}{D} = w'''(0) = -\psi_{22} \frac{qa^2\beta^3}{Eh};$$

$$\psi_{22} = \frac{4[K_1K_2 - K_3(1-K_0)]}{K_1^2 + 4K_3^2}; \quad w(x) = \frac{qa^2}{Eh} [1 + \varphi_{22}K_1(\beta x) - \psi_{22}K_3(\beta x) - K_0(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{q}{\beta^2} \left[-\varphi_{22}K_3(\beta x) - \frac{1}{4}\psi_{22}K_1(\beta x) + K_2(\beta x) \right].$$

23-й случай (рис. 5, и).

Сечение $x = 0$ — жесткая заделка; сечение $x = l$ — жесткая заделка:

$$\frac{M_x(0)}{D} = w''(0) = \varphi_{23} \frac{qa^2\beta^2}{Eh}; \quad \varphi_{23} = \frac{4K_3^2 - K_2(1-K_0)}{K_3^2 - K_1K_3}; \quad \frac{Q(0)}{D} = w'''(0) = -\psi_{23} \frac{qa^2\beta^3}{Eh};$$

$$\psi_{23} = \frac{4K_2K_3 - K_1(1-K_0)}{K_3^2 - K_1K_3}; \quad w(x) = \frac{qa^2}{Eh} [1 + \varphi_{23}K_2(\beta x) - \psi_{23}K_3(\beta x) - K_0(\beta x)];$$

$$M_x(x) = \frac{q}{\beta^2} \left[\frac{1}{4}\varphi_{23}K_0(\beta x) - \frac{1}{4}\psi_{23}K_1(\beta x) + K_2(\beta x) \right].$$

24-й случай (рис. 5, ц).

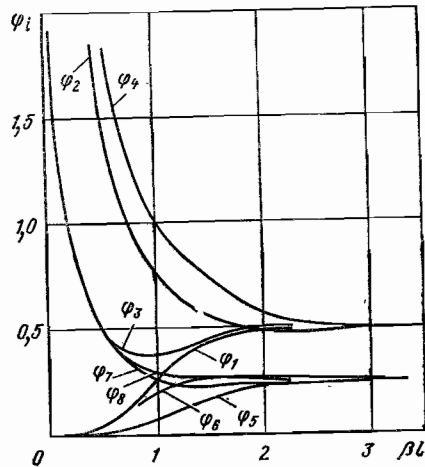


Рис. 6. Значения функции φ для 1-8-го случаев

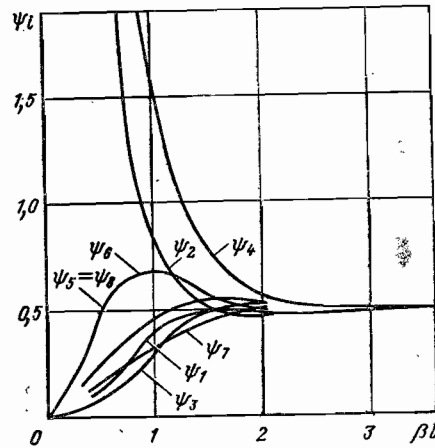


Рис. 7. Значения функции ψ для 1-8-го случаев

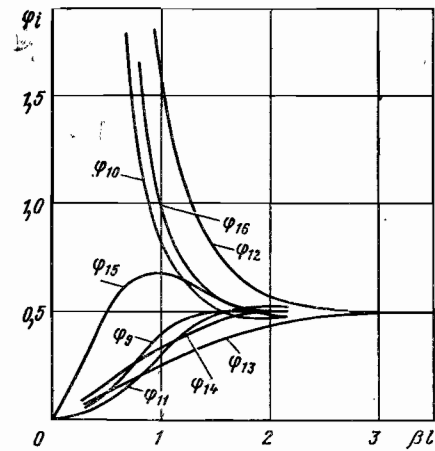


Рис. 8. Значения функции φ для 9-16-го случаев

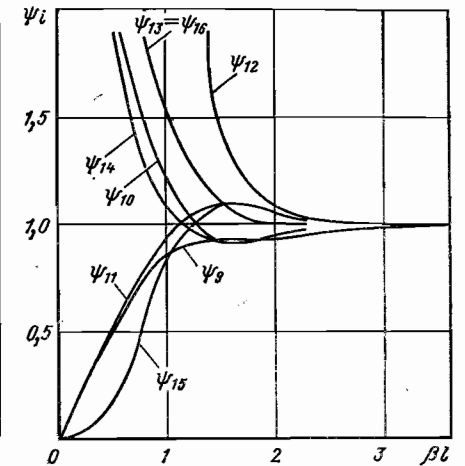


Рис. 9. Значения функции ψ для 9-16-го случаев

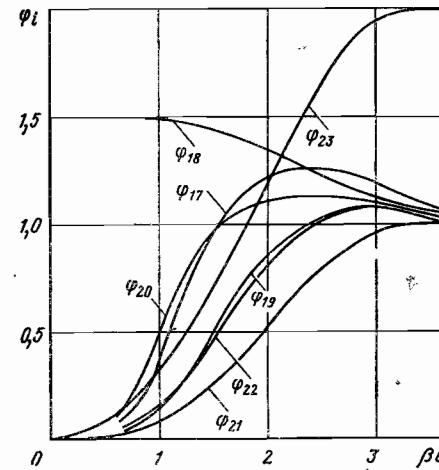


Рис. 10. Значения функции φ для 17-23-го случаев

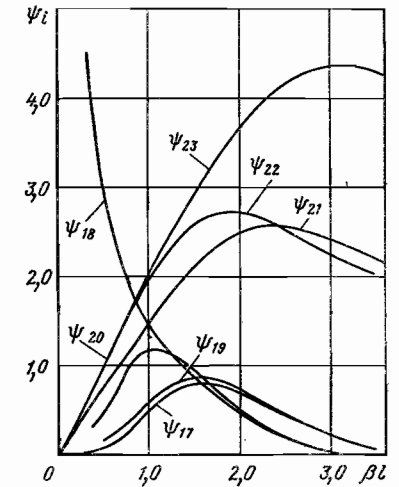


Рис. 11. Значения функции ψ для 17-23-го случаев

Сечение $x = 0$ свободное либо скользящая заделка; сечение $x = l$ — свободное либо скользящая заделка:

$$w_0 = \frac{qa^2}{Eh}; \quad w'(0) = 0; \quad w(x) = \frac{qa^2}{Eh}; \quad M_x(x) = 0.$$

Графики значений функций φ_i и ψ_i для различных расчетных случаев, соответствующих рис. 5, а — и, показаны на рис. 6—11.

Приближенный метод расчета очень коротких цилиндрических оболочек. Если длина оболочки мала по сравнению с радиусом, или, точнее, параметр $\beta l < 0,4$,

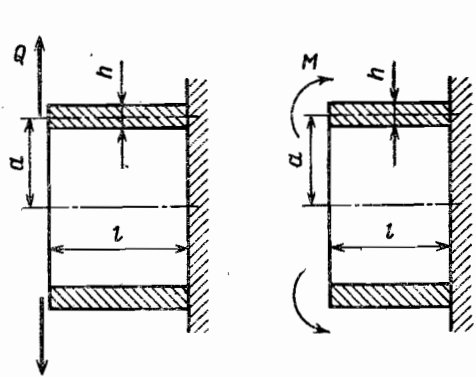


Рис. 12. Очень короткая цилиндрическая оболочка с заделанным сечением

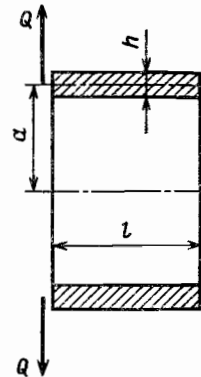


Рис. 13. Очень короткая цилиндрическая оболочка, свободная от закрепления

то могут быть использованы приближенные решения. Они получаются из точных решений, если при разложении функций Крылова оставить лишь первые члены.

Для двух крайних случаев можно указать простое истолкование результатов. Если одно из сечений очень короткой оболочки заделано, то основными напряжениями будут напряжения σ_x , создаваемые изгибающими моментами M_x . Эти моменты (и напряжения) могут быть определены, если представить себе, что оболочка разрезана вдоль образующих на стержни единичной ширины. Так, например, для оболочки, показанной на рис. 12, будем иметь

$$M(l) = Ql,$$

где Q — усилие на единицу длины окружности оболочки. Наибольшие напряжения изгиба

$$\sigma_x(l) = \frac{6M(l)}{h^2} = \frac{6Ql}{h^2}.$$

Для рассматриваемых случаев окружные напряжения значительно меньше напряжений в поперечном сечении.

Другой крайний случай получается для оболочки, свободной от закрепления (рис. 13). Теперь основными напряжениями будут окружные напряжения σ_θ , а напряжениями σ_x можно пренебречь. В этом случае можно считать, что образующие оболочки остаются прямолинейными, и очень короткую цилиндрическую оболочку можно считать кольцом (см. гл. 19).

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОБОЛОЧКЕ

Оболочка, свободная от закрепления. Рассмотрим сначала оболочку, свободную от закреплений (рис. 14).

Пусть оболочка нагрета до температуры $t_0(x)$, причем по толщине оболочки температура постоянна. Допустим, что величина $t_0(x)$ может быть выражена полиномом первой степени

$$t_0(x) = b_0 + b_1(x),$$

где b_0, b_1 — произвольные коэффициенты. Тогда решение уравнения (1) будет

$$w = \alpha \alpha (b_0 + b_1 x).$$

Из равенств (2) — (4) устанавливаем, что перемещение w не вызывает усилия N_θ и других силовых факторов.

В свободной оболочке нагрев с температурой, распределенной по линейному закону, не вызывает температурных напряжений.

Оболочка с закрепленными краями. Если края оболочки закреплены, то любой нагрев вызывает температурные напряжения.

Пусть, например, оболочка с шарнирно опертыми краями (рис. 15) нагрета до температуры t_0 , постоянной по длине оболочки. Радиальное перемещение свободной от закрепления оболочки

$$w_l = \alpha \alpha t_0.$$

Предположим, что оболочка принадлежит к классу длинных. Задачу решаем в следующем порядке.

Для определения температурных напряжений прикладываем внешнее усилие Q к краю $x = 0$ с таким расчетом, чтобы упругое смещение оболочки

$$w(0) = -\alpha \alpha t_0.$$

Пользуясь решением для случая, показанного на рис. 4, а, находим усилие $Q = -2\beta^2 D \alpha t_0 a$

и напряжения, вызываемые этой силой.

Для края $x = l$ получаем значение температурной реакции, используя решение по рис. 4, б.

Температурные напряжения возникают только вблизи краев оболочки.

Рассмотрим случай, когда существует градиент температур по толщине оболочки (рис. 16). Величина Δ по длине оболочки не изменяется, края оболочки заделаны. В оболочке возникают температурные напряжения, одинаковые по ее длине. Для точек наружной поверхности

$$\sigma_x = \sigma_\theta = -\frac{E \alpha \Delta t}{2(1-\nu)}.$$

Для точек внутренней поверхности

$$\sigma_x = \sigma_\theta = \frac{E \alpha \Delta t}{2(1-\nu)}.$$

Более подробно вопрос о температурных напряжениях при осесимметричном нагреве цилиндрических оболочек рассмотрен в работе [2].

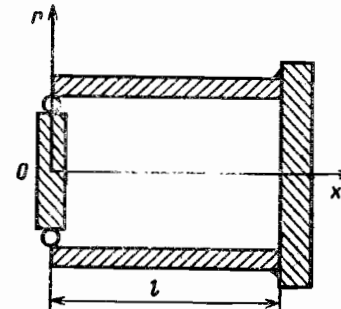


Рис. 15. Температурные напряжения в оболочке

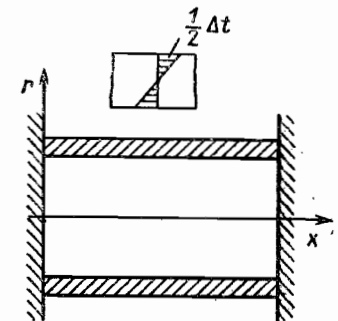


Рис. 16. Температурные напряжения при изменении температуры по толщине оболочки

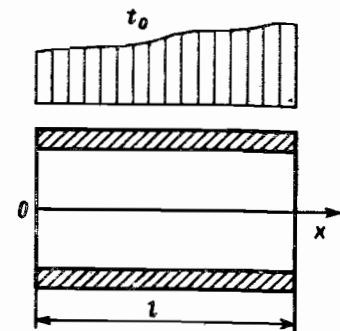


Рис. 14. Оболочка, свободная от закрепления, при действии нагрева

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК, КОЛЕЦ И ОБОЛОЧЕК

Потеря несущей способности тонкостенных конструкций может происходить в результате внезапного роста прогибов и деформаций, когда внешние нагрузки достигают критических значений. Такое явление называют *потерей устойчивости*, оно связано обычно с возникновением новых форм равновесия конструкции при значительных отклонениях от первоначального положения.

Потеря устойчивости может возникнуть, когда в пластинках и оболочках образуются зоны действия сжимающих напряжений. При наличии в рабочих условиях напряжений сжатия даже в каком-либо одном направлении пластинки и оболочки должны подвергаться расчету на устойчивость. Обычный расчет состоит в определении запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_{max}} \tag{1}$$

где $P_{кр}$ — значение силового фактора (усилия, давления, момента), при котором возникает потеря устойчивости конструкции; P_{max} — максимальное расчетное значение силового фактора в рабочих условиях.

В зависимости от назначения конструкции, ее ответственности, последствий потери устойчивости и других факторов принимают

$$n_y = 1,5 \div 5, \tag{2}$$

причем большие значения используют при наличии первоначальных отклонений от правильной геометрической формы и т. п.

Расчет на устойчивость сводится к определению критических нагрузок или напряжений, приводящих к потере устойчивости.

Предполагают, что при расчетных критических напряжениях материал находится в упругом состоянии, т. е. интенсивность напряжений

$$\sigma_{i\text{кр}} = \sqrt{\sigma_{x\text{кр}}^2 + \sigma_{y\text{кр}}^2 - \sigma_{x\text{кр}}\sigma_{y\text{кр}} + 3\tau_{xy\text{кр}}^2} \leq \sigma_T \tag{3}$$

σ_T — предел текучести материала.

Если это условие не соблюдается, то в расчетных зависимостях следует заменить модуль упругости E на касательный модуль упругости

$$E_k = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tag{4}$$

который значительно меньше E [$E_k = (0,01 \div 0,1) E$]. В приближенных расчетах можно принять, что пластическая неустойчивость наступает при работе материала конструкции в пластической области, т. е. при условии

$$\sigma_{i\text{кр}} = \sigma_T \tag{5}$$

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК

Прямоугольные пластинки. Пластика, сжатая в одном направлении ($\sigma_x \neq 0$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 0$). Критическое напряжение (рис. 1)

$$\sigma_{x\text{кр}} = \sigma_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \tag{6}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; h — толщина пластинки. Значения K при различных условиях закрепления пластинки даны на рис. 2.

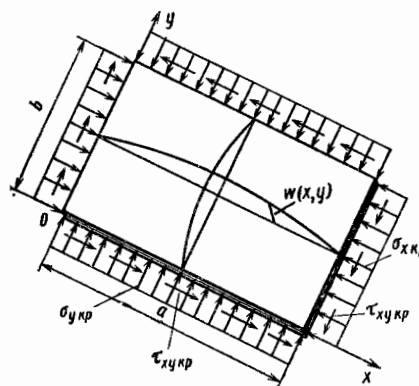


Рис. 1. К расчету устойчивости пластинок

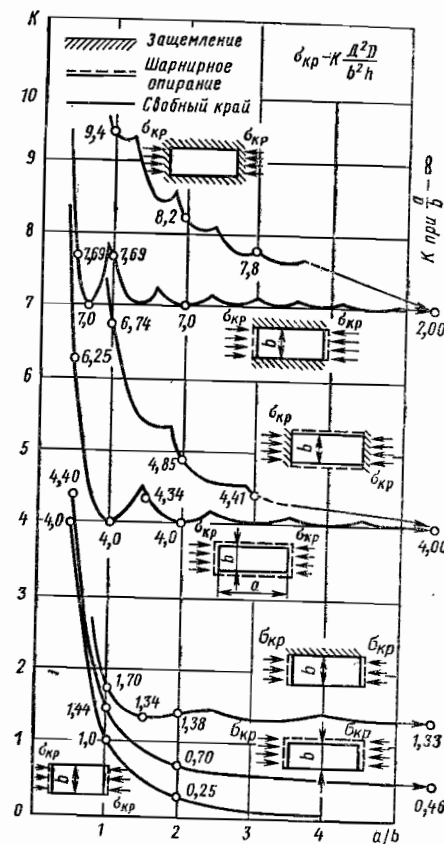


Рис. 2. Коэффициенты K при различных условиях закрепления пластинки, сжатой в одном направлении

Прогиб шарнирно опертой по всем сторонам пластины при потере устойчивости

$$w = C \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{7}$$

Минимальные значения критического напряжения (они указаны на рис. 2) получаются при $n = 1$ (одна полуволна в поперечном направлении) из условия

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left(m \frac{b}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \tag{8}$$

минимум соответствует ближайшим целым числам m_1 и m_2 , заключающим $m_{min} = \frac{a}{b}$,

$$m_1 \leq \frac{a}{b} \leq m_2.$$

Расчет проводят по формуле (8) для $m = m_1$ и $m = m_2$ и выбирают меньшее значение K . При шарнирном опирании по всем сторонам

$$K_{min} = 4$$

и соответствует целым значениям $\frac{a}{b}$ (1, 2, 3, 4, ...).

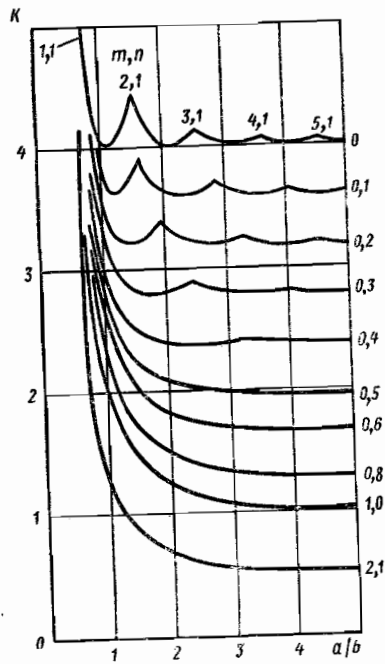
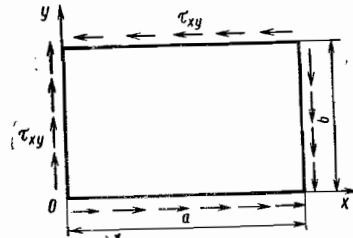


Рис. 3. Коэффициент K для шарнирно опертой пластинки, сжатой в двух направлениях

Рис. 4. Пластика под действием касательных напряжений



Пластика, сжатая в двух направлениях, при шарнирном опирании всех четырех сторон. При заданном отношении сжимающих напряжений

$$\gamma = \frac{\sigma_{y\text{кр}}}{\sigma_{x\text{кр}}} \quad (9)$$

величина $\sigma_{x\text{кр}}$ определяется по формуле (6), значения K находят по рис. 3. Решения принимают в форме (7), причем минимальное критическое напряжение находят из условия

$$\sigma_{x\text{кр}} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left[\frac{(mb/a)^2 + n^2}{(mb/a)^2 + \gamma n^2} \right]; \quad (10)$$

$$\sigma_{y\text{кр}} = \gamma \sigma_{x\text{кр}} \quad (11)$$

В равенстве (10) m, n — целые числа (1, 2, 3, ...). Для квадратной пластинки $m = n = 1$.

Если одно из напряжений (σ_x или σ_y) является растягивающим, то в формулах (8) и (9) величина $\gamma < 0$. Растягивающее напряжение (до определенной величины) повышает устойчивость пластинки.

При наличии значительного растягивающего напряжения в одном из направлений пластинка практически теряет устойчивость, если интенсивность напряжений [условие (3)]

$$\sigma_{I\text{кр}} = \sqrt{\sigma_{x\text{кр}}^2 + \sigma_{y\text{кр}}^2 - \sigma_{x\text{кр}} \sigma_{y\text{кр}}} = \sigma_T$$

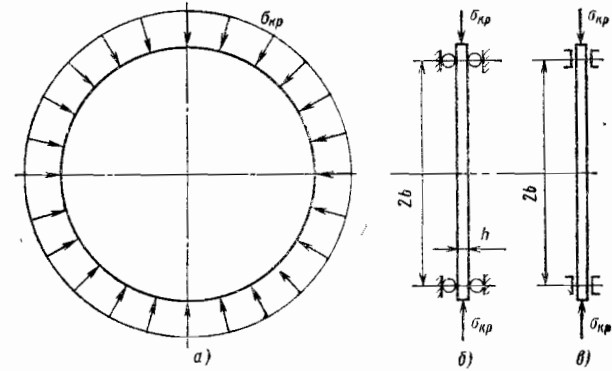


Рис. 5. Круглая пластинка под действием контурной нагрузки

Растягивающие напряжения при расчете на устойчивость считают отрицательными.

Пластика под действием касательных напряжений, шарнирно опертая по четырем сторонам (рис. 4). Критическое касательное напряжение находят по приближенной формуле

$$\tau_{xy\text{кр}} = K_\tau \frac{\pi^2 D}{b^2 h}, \quad (12)$$

где

$$K_\tau \approx 5,35 + 4 \frac{b^2}{a^2} \quad (b < a). \quad (13)$$

Для пластинки с жестко заделанными сторонами

$$K_\tau \approx 8,98 + 5,6 \frac{b^2}{a^2} \quad (b < a). \quad (14)$$

Ограничение критического напряжения по возникновению пластической неустойчивости

$$\tau_{xy\text{кр}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T \quad (15)$$

Пластика при совместном действии нормальных и касательных напряжений. Края пластинки шарнирно оперты, вдоль оси x действует нормальное напряжение σ_x , по всем краям касательное напряжение τ_{xy} .

Условие устойчивости:

$$\frac{\sigma_{x\text{кр}}}{\sigma_{x\text{кр}}^0} + \left(\frac{\tau_{xy\text{кр}}}{\tau_{xy\text{кр}}^0} \right)^2 = 1, \quad (16)$$

где $\sigma_{x\text{кр}}^0, \tau_{xy\text{кр}}^0$ — критические напряжения при раздельном действии нагрузок [формулы (6) и (12)].

Растягивающее напряжение ($\sigma_{x\text{кр}} < 0$) повышает устойчивость пластинки при сдвиге. Ограничение по возникновению пластической неустойчивости

$$\sqrt{\sigma_{x\text{кр}}^2 + 3\tau_{xy\text{кр}}^2} \leq \sigma_T \quad (17)$$

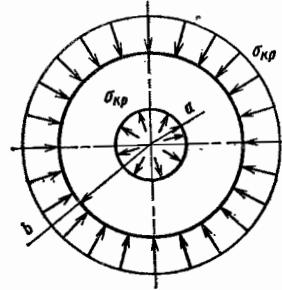
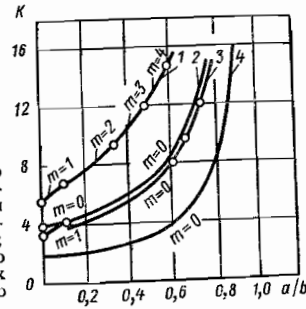


Рис. 6. Круглая кольцевая пластинка под действием контурной нагрузки

Рис. 7. Коэффициент K для кольцевой пластинки (m — число узловых диаметров): 1 — скользящая заделка по обоим краям; 2 — шарнирное опирание по обоим краям; 3 — скользящая заделка по наружному краю; 4 — шарнирное опирание по наружному краю; в случаях 3 и 4 — по внутреннему краю прогиб без углов поворота



Круглые пластинки. Сплошная пластинка постоянной толщины. Под действием контурной нагрузки (рис. 5, а) пластинка теряет устойчивость при

$$\sigma_{кр} = K \frac{D}{b^2 h}, \quad (18)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; b и h — радиус и толщина пластинки.

Для пластинки без центрального отверстия, шарнирно опертой по внешнему контуру (рис. 5, б),

$$K = 4,20.$$

При скользящей заделке внешнего края коэффициент K возрастает (рис. 5, в):

$$K = 14,68.$$

Кольцевая пластинка при одинаковом сжимающем напряжении на внешнем и внутреннем контурах (рис. 6). Расчет ведут по формуле (18), значения K принимают по рис. 7.

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕЦ

Критическое распределенное усилие (рис. 8) определяют по формуле

$$q_{кр} = \frac{3EJ_1}{R^3}, \quad (19)$$

где J_1 — момент инерции кольца (при изгибе в плоскости кольца); R — радиус оси центров тяжести сечений.

Распределенное усилие $q_{кр}$ предполагают направленным по нормали к поверхности (силы давления среды).

Если усилия действуют всегда радиально (кольцо, нагруженное радиальными нитями или мембраной),

$$q_{кр} = \frac{9}{2} \frac{EJ_1}{R^3}. \quad (20)$$

При возможности неплоской (пространственной) деформации кольца в равенстве (19) под J_1 следует понимать минимальный момент инерции сечения кольца.

Для радиально направленных внешних усилий при неплоской форме деформации

$$q_{кр} = \frac{12EJ_2}{\left(4 + \frac{EJ_1}{GJ_k}\right) R^3}, \quad (21)$$

где EJ_2 — жесткость при изгибе в перпендикулярной плоскости; GJ_k — жесткость на кручение.

Приведенные зависимости не учитывают поддерживающее влияние присоединенных элементов конструкций (оболочек) и потому дают заниженное значение критического распределительного усилия.

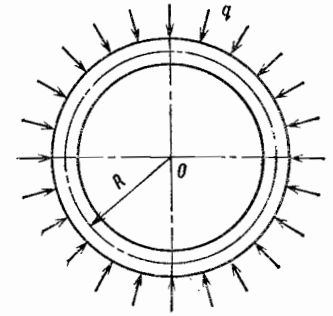


Рис. 8. Устойчивость колец

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Устойчивость при внешнем давлении. При потере устойчивости (рис. 9) возникает одна полуволна прогиба вдоль образующей и несколько волн по окружности.

Критическое внешнее давление шарнирно опертой по краям оболочки (рис. 10) определяют по приближенной формуле П. Ф. Папковича

$$q_{кр} = \frac{2\pi}{3\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt[4]{(1-\nu^2)^3}} \frac{Eh^3}{lr} \sqrt{\frac{h}{r}} = 0,92 \frac{Eh^2}{lr} \sqrt{\frac{h}{r}}, \quad (22)$$

где E — модуль упругости, h , l , r — толщина, длина, радиус оболочки. Расчет по формуле (22) проводят для оболочек средней длины

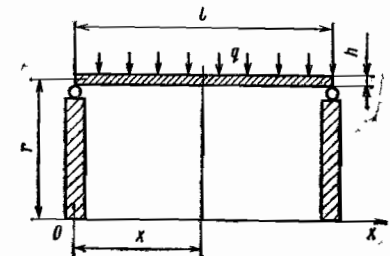
$$3\sqrt{\frac{h}{r}} \leq \frac{l}{r} \leq 3\sqrt{\frac{r}{h}}. \quad (23)$$

Здесь и в дальнейшем следует строго соблюдать условия применимости приближенных формул. Вне указанных пределов они могут давать неверные резуль-



Рис. 9. Оболочка, потерявшая устойчивость при внешнем давлении

Рис. 10. Устойчивость оболочки при внешнем давлении



таты, Следует также учитывать ограничения по пластической неустойчивости

$$\sigma_{i\text{кр}} = \sigma_{\theta\text{кр}} = \frac{q_{\text{кр}} r}{h} \leq \sigma_T.$$

Для длинных оболочек $\left(\frac{l}{r} > 3 \sqrt{\frac{r}{h}}\right)$

$$q_{\text{кр}} = \frac{Eh^3}{4(1-\nu^2)r^3} = 0,27E \frac{h^3}{r^3}, \quad (24)$$

что совпадает с $q_{\text{кр}}$ для кольца единичной ширины [см. равенство (19)].

Для коротких оболочек $\left(\frac{l}{r} < 3 \sqrt{\frac{h}{r}}\right)$

$$q_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E h^3}{3(1-\nu^2)rl^2} = 3,61 \frac{Eh^3}{rl^2}, \quad (25)$$

что соответствует критическому усилию сжатия (в окружном направлении) для шарнирно опертой прямоугольной пластинки [см. равенство (6)]

$$N_{\theta\text{кр}} = \sigma_{\theta\text{кр}} h = q_{\text{кр}} r. \quad (26)$$

Формула (25) дает заниженное значение $q_{\text{кр}}$, так как сжимающее напряжение в окружном направлении вследствие поддерживающего влияния опор

$$|\sigma_{\theta}| < q_{\text{кр}} \frac{r}{h}.$$

Для приближенного расчета определяют среднее значение окружного напряжения (по длине оболочки) $\bar{\sigma}_{\theta}$ и вводят поправочный коэффициент в формулу (25)

$$\alpha = \frac{r}{\bar{\sigma}_{\theta} h},$$

где $\bar{\sigma}_{\theta}$ — среднее окружное напряжение при давлении $q = 1$.

Влияние краевых условий на критическое давление. В каждой точке срединной поверхности оболочки появляются три составляющих упругого смещения: u — вдоль образующей, v — вдоль касательной к окружности поперечного сечения, w — по нормали к поверхности.

В поперечном сечении действует усилие N_x и изгибающий момент M_x (на единицу длины) (см. гл. 24). Формула (22) установлена при следующих краевых условиях: при $x = 0$ и $x = l$

$$w = 0; M_x = 0; N_x = 0; v = 0.$$

При выводе не учитывалось влияние моментного напряженного состояния возле опорных сечений; принималось, что окружные напряжения по всей длине оболочки

$$\sigma_{\theta} = -q \frac{r}{h}.$$

Точные значения $q_{\text{кр}T}$ при различных краевых условиях с учетом моментного напряженного состояния (рис. 11, а) и без учета его (рис. 11, б) были получены с помощью численного решения [4].

Результаты на рис. 11 даны в виде поправки к формуле (22) в зависимости от безразмерной длины оболочки. Существенное влияние оказывает только устранение деформаций вдоль оси оболочки ($u = 0$), повышающее критическое давление в 1,5 раза. При отсутствии закрепления одного из краев оболочки критическое давление при $\frac{l}{r} > 3 \sqrt{\frac{r}{h}}$ можно определить по равенству (24), для коротких оболочек

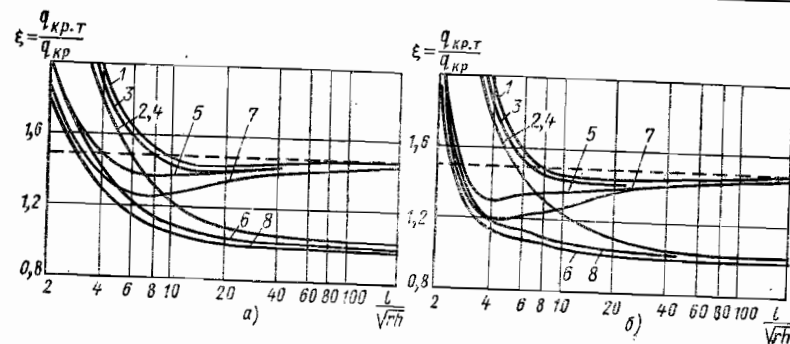


Рис. 11. Поправка к формуле (22) при различных краевых условиях: кривая 1 — $w = 0; w' = 0, u = 0, v = 0$, кривая 2 — $w = 0, w' = 0, N_x = 0, v = 0$; кривая 3 — $w = 0; w' = 0, u = 0, S = 0$; кривая 4 — $w = 0, w' = 0, N_x = 0, S = 0$; кривая 5 — $w = 0, M_x = 0, u = 0, v = 0$; кривая 6 — $w = 0, M_x = 0, N_x = 0, v = 0$; кривая 7 — $w = 0, M_x = 0, u = 0, S = 0$; кривая 8 — $w = 0, M_x = 0, N_x = 0, S = 0$ (S — сдвигающее усилие на единицу длины оболочки)

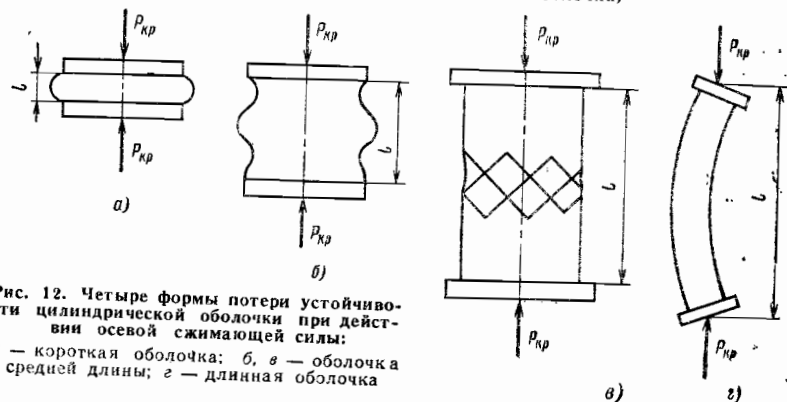


Рис. 12. Четыре формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при действии осевой сжимающей силы: а — короткая оболочка; б, в — оболочка средней длины; г — длинная оболочка

$\left(\frac{l}{r} < 3 \sqrt{\frac{h}{r}}\right)$ — использовать решение для критического усилия при свободном продольном крае пластинки.

Поправочные коэффициенты на начальные неправильности. Для сварных оболочек расчетные значения $q_{\text{кр}}$ рекомендуется уменьшать на 15%, для точеных оболочек расчетные и экспериментальные данные практически совпадают.

Устойчивость при действии осевых сил. Формы потери устойчивости показаны на рис. 12.

Для короткой оболочки $\left(\frac{l}{r} < 1,2 \sqrt{\frac{h}{r}}\right)$ критическое напряжение сжатия

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{2\pi r h} \quad (27)$$

определяется равенством

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)l^2} = 0,90E \frac{h^2}{l^2}, \quad (28)$$

что соответствует шарнирно закрепленной полоске единичной ширины с площадью сечения $h \times 1$ и длиной l . Короткая оболочка работает на устойчивость при действии осевых сил как пластинка с высотой l и основанием $2\pi r$.

Для оболочки средней длины $(1,2 \sqrt{\frac{h}{r}} < \frac{l}{r} < 3 \sqrt{\frac{r}{h}})$ критическое напряжение осевого сжатия

$$\sigma_{кр} = \frac{Eh}{r \sqrt{3(1-\nu)^2}} = 0,605E \frac{h}{r}. \quad (29)$$

Критическое осевое усилие, действующее на оболочку,

$$P_{кр} = \frac{2\pi E h^2}{\sqrt{3(1-\nu)^2}} = 3,80E h^2. \quad (30)$$

Одним и тем же значениям минимального критического усилия [равенства (29) и (30)] могут соответствовать две различные формы потери устойчивости (симметричная — рис. 12, б и несимметричная — рис. 12, в).

Для длинной оболочки критическое усилие выражает потерю устойчивости оболочки как стержня (рис. 12, г):

$$P_{кр} = \frac{\pi^3 E r^3 h}{l^2} = 31 \frac{E r^3 h}{l^2}; \quad (31)$$

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{2\pi r h} = \frac{\pi^2}{2} E \frac{r^2}{l^2} = 4,93 E \frac{r^2}{l^2}. \quad (32)$$

Влияние условий закрепления оболочки при действии осевых сжимающих сил сказывается существенным образом на $\sigma_{кр}$ коротких оболочек. Например, если оба торца короткой оболочки заделаны в жесткие кольца (фланцы), то критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = 3,6E \frac{h^2}{l^2}. \quad (33)$$

При других условиях закрепления короткой оболочки используют соответствующие решения для стержней-полосок.

Поправочные коэффициенты на начальные неперпендикулярности. Как показали экспериментальные исследования, влияние отклонений от строгой цилиндрической формы при осевом сжатии весьма значительно.

Практический расчет устойчивости проводят по формуле

$$\sigma_{кр} = \alpha_c \cdot 0,605E \frac{h}{r},$$

где значения поправочного коэффициента α_c следующие:

$\frac{r}{h}$	250	500	750	1000	1500
α_c	0,3	0,23	0,20	0,165	0,15

Если начальные отклонения могут быть порядка толщины стенки, то указанные значения α_c уменьшаются в 2 раза. Следует учитывать ограничения по пластической неустойчивости

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_T.$$

Устойчивость при кручении. По концам оболочки действует крутящий момент (рис. 13), создающий в стенках касательные напряжения

$$\tau_{кр} = \frac{M_k}{2\pi r^2 h}, \quad (34)$$

где r и h — радиус и толщина оболочки.

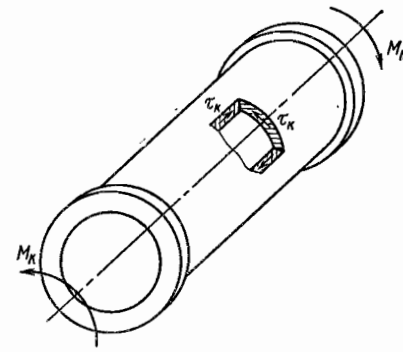


Рис. 13. Устойчивость оболочки при кручении

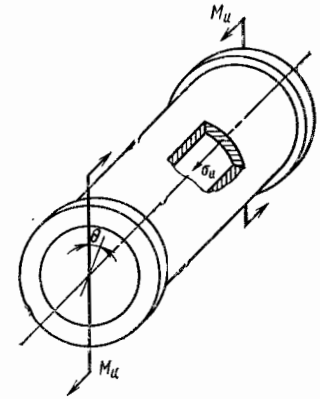


Рис. 14. Устойчивость оболочки при действии изгибающего момента

Для короткой оболочки $(\frac{l}{r} < 3 \sqrt{\frac{h}{r}})$ критическое касательное напряжение определяют как для пластинки высотой l и основанием $2\pi r$ (шарнирное опирание краев):

$$\tau_{кр} = K_\tau \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2) l^2} = 4,83 \frac{E h^2}{l^2}. \quad (35)$$

Для оболочки средней длины $(3 \sqrt{\frac{h}{r}} < \frac{l}{r} < 9 \sqrt{\frac{r}{h}})$

$$\tau_{кр} = \frac{0,74 E h}{r(1-\nu^2)^{5/8}} \sqrt{\frac{hr}{l^2}} = 0,78 E \frac{h}{r} \sqrt{\frac{hr}{l^2}}. \quad (36)$$

Для длинной оболочки $(\frac{l}{r} > 9 \sqrt{\frac{r}{h}})$

$$\tau_{кр} = \frac{\sqrt{2}}{6(1-\nu^2)^{3/4}} E \frac{h}{r} \sqrt{\frac{h}{r}} = 0,25E \frac{h}{r} \sqrt{\frac{h}{r}}. \quad (37)$$

Приведенными формулами следует пользоваться, соблюдая указанные ограничения на длину оболочек.

Краевые условия наиболее существенно влияют на $\tau_{кр}$ коротких оболочек. Если оба края оболочки заделаны в жесткие кольца, то вместо (35) принимают

$$\tau_{кр} = 8,11 \frac{E h^2}{l^2}. \quad (38)$$

Влияние начальных отклонений учитывают понижением расчетных значений $\tau_{кр}$ с помощью коэффициента α_k :

$\frac{r}{h}$	250	500	750	1000	1500
α_k	0,80	0,70	0,63	0,58	0,50

Для сварных оболочек следует уменьшать указанные значения на 20%. Следует учитывать ограничение по пластической неустойчивости

$$\tau_{кр} \leq 0,58\sigma_T.$$

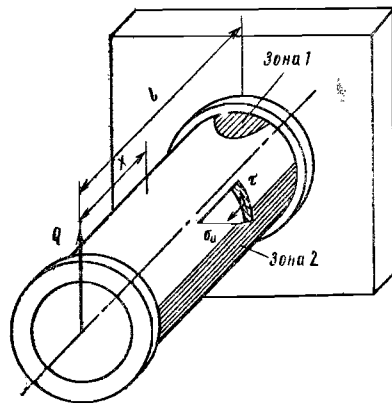


Рис. 15. Устойчивость оболочки при действии поперечной силы

Устойчивость при изгибе моментами. Изгибающие моменты $M_{из}$, приложенные по торцам (рис. 14), создают в стенках оболочки нормальные напряжения

$$\sigma_{из} = \frac{M_{из}}{\pi r^2 h} \cos \theta. \quad (39)$$

Критические напряжения (их максимальные значения в сжатой зоне) соответствуют критическим напряжениям при осевом сжатии.

$$\text{Для короткой оболочки } \left(\frac{l}{r} < 1,2 \sqrt{\frac{h}{r}} \right)$$

$$\sigma_{из,кр} = \frac{M_{из}}{\pi r^2 h} = 0,90 E \frac{h^2}{l^2}. \quad (40)$$

$$\text{Для оболочки средней длины } \left(1,2 \sqrt{\frac{h}{r}} < \frac{l}{r} < 3 \sqrt{\frac{h}{r}} \right)$$

$$\sigma_{из,кр} = \frac{M_{из}}{\pi r^2 h} = 0,605 E \frac{h}{r}. \quad (41)$$

Значение поправочных коэффициентов на начальные отклонения принимают на 15–20% больше указанных для осевого сжатия, $\alpha_{из} = (1,5 \div 1,20) \alpha_c$.

Устойчивость при изгибе поперечной силой. Поперечная сила (рис. 15) создает в стенках оболочки нормальные и касательные напряжения (безмоментное напряженное состояние)

$$\sigma_{из} = \frac{Qx}{\pi r^2 h} \cos \theta; \quad \tau_{из} = \frac{Q}{\pi r h} \sin \theta. \quad (42)$$

Опасными для потери устойчивости будут зоны максимальных нормальных напряжений изгиба (зона 1) и максимальных касательных напряжений (зона 2).

Приравняв критические напряжения изгиба к критическим напряжениям при осевом сжатии, получим:

$$\text{для коротких оболочек } \left(\frac{l}{r} < 1,2 \sqrt{\frac{h}{r}} \right):$$

$$\sigma_{из,кр} = \frac{Q_{кр}^{(1)} l}{\pi r^2 h} = 0,90 E \frac{h^2}{l^2}; \quad Q_{кр}^{(1)} = 2,83 E \frac{h^3}{l^2}; \quad (43)$$

$$\text{для оболочек средней длины } \left(1,2 \sqrt{\frac{h}{r}} < \frac{l}{r} < 3 \sqrt{\frac{h}{r}} \right):$$

$$\sigma_{из,кр} = \frac{Q_{кр}^{(1)} l}{\pi r^2 h} = 0,605 E \frac{h}{r}; \quad Q_{кр}^{(1)} = 1,90 E \frac{h^2 r}{l}. \quad (44)$$

Критические усилия при потере устойчивости во второй зоне находят приравняв касательных напряжений изгиба критическим касательным напряжениям при кручении:

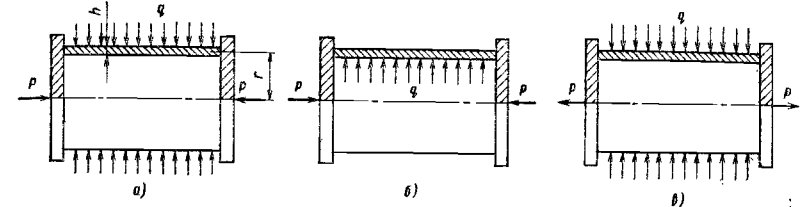


Рис. 16. Устойчивость оболочки при действии осевой силы, внешнего или внутреннего давления

$$\text{для коротких оболочек } \left(\frac{l}{r} < 3 \sqrt{\frac{h}{r}} \right):$$

$$\tau_{из,кр} = \frac{Q_{кр}^{(2)}}{\pi r h} = 4,83 \frac{E h^2}{l^2}; \quad Q_{кр}^{(2)} = 15,2 E \frac{r h^3}{l};$$

$$\text{для оболочек средней длины } \left(3 \sqrt{\frac{h}{r}} < \frac{l}{r} < 9 \sqrt{\frac{h}{r}} \right):$$

$$\tau_{из,кр} = \frac{Q_{кр}^{(2)}}{\pi r h} = 0,78 E \frac{h}{r} \sqrt{\frac{h r}{l^2}}; \quad Q_{кр}^{(2)} = 2,45 E h^2 \sqrt{\frac{h r}{l^2}}.$$

В качестве расчетного значения критического усилия применяют минимальное значение $Q_{кр}$ с учетом поправочных коэффициентов

$$Q_{кр} = \min \left\{ 1,15 \alpha_c Q_{кр}^{(1)}; \alpha_k Q_{кр}^{(2)} \right.$$

Устойчивость при совместном действии нагрузок на цилиндрическую оболочку. Осевое усилие, внешнее или внутреннее давление. Различные случаи действия осевого усилия и давления показаны на рис. 16.

Сжимающее усилие P и внешнее давление q считают положительным. В оболочке возникают напряжения

$$\sigma_x = -\frac{P}{2\pi r h}; \quad \sigma_\theta = -\frac{q r}{h}.$$

Условия устойчивости при действии сжимающего осевого усилия и внешнего давления (рис. 16, а)

$$\left| \frac{\sigma_{x,кр}}{\sigma_{x,кр}^0} \right| + \left| \frac{\sigma_{\theta,кр}}{\sigma_{\theta,кр}^0} \right| = 1, \quad (45)$$

где $\sigma_{x,кр}$, $\sigma_{\theta,кр}$ — напряжения в оболочке в момент потери устойчивости (критические напряжения при совместном действии нагрузок); $\sigma_{x,кр}^0$ — критическое напряжение при действии (одной) сжимающей осевой нагрузке; $\sigma_{\theta,кр}^0$ — критическое напряжение при действии (одного) внешнего давления. Значения $\sigma_{x,кр}^0$, $\sigma_{\theta,кр}^0$ принимаются с учетом поправочных коэффициентов на начальные отклонения.

Если σ_x , σ_θ — напряжения в рабочих условиях, то

$$\sigma_{x,кр} = n_y \sigma_x; \quad \sigma_{\theta,кр} = n_y \sigma_\theta, \quad (46)$$

где n_y — запас устойчивости (при пропорциональном возрастании нагрузок).

В общем случае, когда возрастает только одна из внешних нагрузок, например осевая нагрузка, то

$$\sigma_{x,кр} = n_{y1} \sigma_x; \quad \sigma_{\theta,кр} = \sigma_\theta. \quad (47)$$

Внося значения $\sigma_{x\text{кр}}$ и $\sigma_{\theta\text{кр}}$ из соотношений (46) или (47) в условие (45), получаем формулу для запаса устойчивости. При пропорциональном возрастании нагрузок

$$n_y = \frac{1}{\left| \frac{\sigma_x}{\sigma_{x\text{кр}}^0} + \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_{\theta\text{кр}}^0} \right|}. \quad (48)$$

Подобным образом находят запас устойчивости в других случаях совместного действия нагрузок.

Условия устойчивости при действии сжимающего осевого усилия и внутреннего давления ($q < 0$ рис. 16, б). Расчет проводят по приближенной формуле

$$\left| \frac{\sigma_{x\text{кр}}}{\sigma_{x\text{кр}}^0} \right| = \frac{1 + 0,21 \frac{\sigma_{\theta\text{кр}}}{E} \left(\frac{r}{h} \right)^{1,5}}{1 + 3 \frac{\sigma_{\theta\text{кр}}}{E} \frac{r}{h}}. \quad (49)$$

Для оболочки средней длины

$$\sigma_{x\text{кр}}^0 = \alpha_c \cdot 0,605 E \frac{h}{r}. \quad (50)$$

Внутреннее давление (до определенных пределов) повышает устойчивость оболочки при действии осевой сжимающей силы. При большом внутреннем давлении может наступить пластическая неустойчивость, если

$$\sqrt{\sigma_{x\text{кр}} + \sigma_{\theta\text{кр}} + \sigma_{x\text{кр}}\sigma_{\theta\text{кр}}} \geq \sigma_T. \quad (51)$$

В последнем соотношении учтено, что напряжения $\sigma_{x\text{кр}}$ и $\sigma_{\theta\text{кр}}$ имеют разные знаки ($\sigma_x < 0$, $\sigma_{\theta} > 0$).

Запас устойчивости по условию (51) и соотношениям (46)

$$n_y = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_{\theta}^2 + \sigma_x \sigma_{\theta}}}. \quad (52)$$

Запас устойчивости практически совпадает с запасом по пределу текучести σ_T (одно из действующих напряжений является сжимающим).

Условия устойчивости при действии растягивающего осевого усилия и внешнего давления (рис. 16, а, $\sigma_x > 0$, $\sigma_{\theta} < 0$). Расчет проводят по приближенной формуле

$$\left| \frac{\sigma_{\theta\text{кр}}}{\sigma_{\theta\text{кр}}^0} \right| = \sqrt{1 + 2,6 \left| \frac{\sigma_{x\text{кр}}}{\sigma_{x\text{кр}}^0} \right|}, \quad (53)$$

где $\sigma_{\theta\text{кр}}^0$ и $\sigma_{x\text{кр}}^0$ — критические напряжения при действии соответственно только внешнего давления или только сжимающей силы (с учетом начальных отклонений).

Растягивающее усилие (до определенных пределов) повышает критическое внешнее давление. При большом растягивающем усилии следует учитывать возможность пластической неустойчивости, возникающей при условии (51).

Крутящий момент, внешнее или внутреннее давление, сжимающее или растягивающее осевое усилие. В стенке оболочки создаются (рис. 17) касательные напряжения

$$\tau_k = \frac{M_k}{2\pi r^2 h},$$

осевое и окружное напряжения:

$$\sigma_x = -\frac{P}{2\pi r h}, \quad \sigma_{\theta} = -\frac{qr}{h}.$$

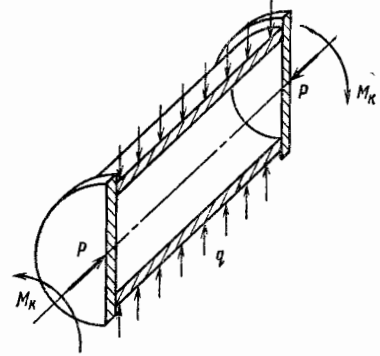


Рис. 17. Устойчивость оболочки при действии крутящего момента, давления и осевой силы

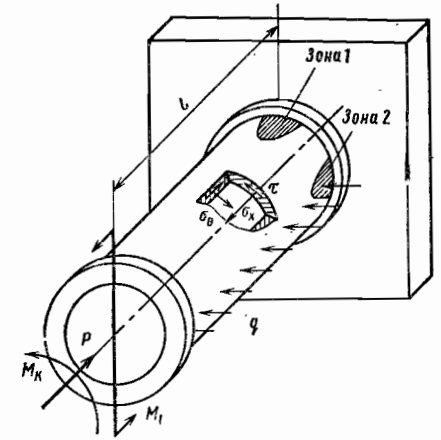


Рис. 18. Общий случай устойчивости оболочки при совместном действии нагрузок

Крутящий момент и внешнее давление ($\sigma_{\theta} < 0$). Условие устойчивости

$$\left(\frac{\tau_{\text{кр}}}{\tau_{\text{кр}}^0} \right)^2 = 1 - \left| \frac{\sigma_{\theta\text{кр}}}{\sigma_{\theta\text{кр}}^0} \right|, \quad (54)$$

где $\tau_{\text{кр}}^0$ — критическое касательное напряжение при крутящем моменте, с учетом начальных отклонений.

Крутящий момент и внутреннее давление ($\sigma_{\theta} > 0$). Расчет проводят по приближенной формуле

$$\left(\frac{\tau_{\text{кр}}}{\tau_{\text{кр}}^0} \right)^2 = 1 + 0,78 \left| \frac{\sigma_{\theta\text{кр}}}{\sigma_{\theta\text{кр}}^0} \right|. \quad (55)$$

При значениях $\frac{\sigma_{\theta\text{кр}}}{\sigma_{\theta\text{кр}}^0} > 8$ следует пользоваться зависимостью

$$\left(\frac{\tau_{\text{кр}}}{\tau_{\text{кр}}^0} \right)^2 = 0,907 \left| \frac{\sigma_{\theta\text{кр}}}{\sigma_{\theta\text{кр}}^0} \right|. \quad (56)$$

Внутреннее давление (до определенных пределов) повышает устойчивость оболочки при кручении. При большом внутреннем давлении проверяют условие пластической устойчивости

$$\sqrt{\sigma_{\theta\text{кр}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} \leq \sigma_T. \quad (57)$$

Крутящий момент и сжимающее осевое усилие ($\sigma_x < 0$). Условие устойчивости

$$\left(\frac{\tau_{\text{кр}}}{\tau_{\text{кр}}^0} \right)^2 = 1 - \left| \frac{\sigma_{x\text{кр}}}{\sigma_{x\text{кр}}^0} \right|, \quad (58)$$

где значения $\tau_{\text{кр}}^0$, $\sigma_{x\text{кр}}^0$ принимают с поправочными коэффициентами, учитывающими начальные отклонения.

Крутящий момент и растягивающее осевое усилие ($\sigma_x > 0$). Условие устойчивости

$$\left| \frac{\tau_{кр}}{\tau_{кр}^0} \right| = 1 + 0,6 \left| \frac{\sigma_{x кр}}{\sigma_{x кр}^0} \right| \quad \text{при} \quad \left| \frac{\sigma_{x кр}}{\sigma_{x кр}^0} \right| \leq 6; \quad (59)$$

$$\left| \frac{\tau_{кр}}{\tau_{кр}^0} \right| = 1,2 \left| \frac{\sigma_{x кр}}{\sigma_{x кр}^0} \right|^{3/4} \quad \text{при} \quad \left| \frac{\sigma_{x кр}}{\sigma_{x кр}^0} \right| > 6. \quad (60)$$

Растягивающее осевое усилие (до определенных пределов) повышает устойчивость при кручении. При большом растягивающем осевом усилии следует проверить условие пластической устойчивости

$$\sqrt{\sigma_{x кр}^2 + 3\tau_{кр}^2} \leq \sigma_T. \quad (61)$$

Крутящий момент, внешнее давление и сжимающее осевое усилие. Внешнее давление и сжимающее осевое усилие понижают устойчивость оболочки при кручении.

Условия устойчивости

$$\left(\frac{\tau_{кр}}{\tau_{кр}^0} \right)^2 + \left| \frac{\sigma_{\theta кр}}{\sigma_{\theta кр}^0} \right| + \left| \frac{\sigma_{x кр}}{\sigma_{x кр}^0} \right| = 1, \quad (62)$$

причем критические напряжения $\tau_{кр}^0$, $\sigma_{\theta кр}^0$ и $\sigma_{x кр}^0$ принимают с учетом α_c (см. стр. 502).

Некоторые случаи трехкомпонентного нагружения. Внутреннее давление или растягивающее осевое усилие повышают устойчивость оболочки при кручении, если соблюдается условие (3). В запас прочности можно учитывать повышение устойчивости только от одного (основного) стабилизирующего фактора, используя указанные ранее зависимости для двухкомпонентного нагружения [формулы (49), (53), (55) и (56)].

Изгибающий и крутящий моменты, поперечная сила, давление и осевая сила (общий случай нагружения).

В общем случае (рис. 18) в оболочке возникают напряжения ($x = l$):

$$\sigma_x = -\frac{P}{2\pi r h} + \frac{M_{и}}{\pi r^2 h} \cos \theta - \frac{Ql}{\pi r^2 h} \cos \theta; \quad (63)$$

$$\sigma_{\theta} = -q \frac{r}{h}; \quad (64)$$

$$\tau = \frac{M_{к}}{2\pi r^2 h} + \frac{Q}{\pi r h} \sin \theta. \quad (65)$$

Положительные направления силовых факторов показаны на рис. 18, растягивающие напряжения σ_x и σ_{θ} считают положительными. Условия устойчивости (62) при сжимающих нормальных напряжениях ($\sigma_x < 0$, $\sigma_{\theta} < 0$) записываются в виде

$$\frac{1}{(\tau_{кр}^0)^2} \left(\frac{M_{к кр}}{2\pi r^2 h} + \frac{Q_{кр} \sin \theta}{\pi r h} \right)^2 + \frac{1}{|\sigma_{\theta кр}^0|} \left| \frac{q_{кр} r}{h} \right| + \frac{1}{|\sigma_{x кр}^0|} \left| -\frac{P_{кр}}{2\pi r h} + \frac{M_{и кр}}{\pi r^2 h} \cos \theta - \frac{Q_{кр} l}{\pi r^2 h} \cos \theta \right| = 1, \quad (66)$$

где значения $\tau_{кр}^0$, $\sigma_{\theta кр}^0$, $\sigma_{x кр}^0$ — принимают для кручения, внешнего давления, осевой сжимающей силы с учетом поправочных коэффициентов; $M_{к кр}$, $M_{и кр}$, $Q_{кр}$, $P_{кр}$, $q_{кр}$ — критические значения силовых факторов при совместном их действии.

Условие (66) применяют для угла θ , при котором левая часть равенства (66) принимает наибольшее значение.

Обычно наиболее опасными являются зоны 1 по концам вертикального диаметра ($\theta = 0$; $\theta = \pi$) или зоны 2 по концам горизонтального диаметра ($\theta = \frac{\pi}{2}$; $\theta = \frac{3\pi}{2}$). В общем случае расчет проводят для различных значений θ .

При растягивающих нормальных напряжениях устойчивость оболочки повышается, что может быть приближенно учтено по схеме двухкомпонентного нагружения, как это было указано ранее.

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Устойчивость под действием сжимающей силы (рис. 19, а). В сечениях оболочки действует сжимающее напряжение

$$\sigma_x = -\frac{P}{2\pi r(x) h \sin \alpha}. \quad (67)$$

Критическое напряжение совпадает со значением, получаемым для цилиндрической оболочки (средней длины)

$$\sigma_{кр} = 0,605 E \frac{h}{r_0}, \quad (68)$$

где r_0 — радиус кривизны конической оболочки.

Наименьшее значение $\sigma_{кр}$ соответствует наибольшему радиусу, однако для всех сечений осевое критическое усилие оказывается одинаковым и равным

$$P_{кр} = 0,605 E h^2 2\pi \sin^2 \alpha = 3,80 E h^2 \sin^2 \alpha. \quad (69)$$

Для практических расчетов следует учесть влияние начальных отклонений, приняв

$$P_{кр} = \alpha_c \cdot 3,80 E h^2 \sin^2 \alpha, \quad (70)$$

где значение α_c приведено на стр. 502.

Устойчивость под действием внешнего давления (рис. 19, б). Для оболочек, близких к цилиндрическим ($80^\circ < \alpha \leq 90^\circ$) можно использовать формулу (22)

$$q_{кр} = 0,92 \frac{E h^2}{l r_0} \sqrt{\frac{h}{r_0}}, \quad (71)$$

где r_0 — наибольший радиус кривизны конической оболочки.

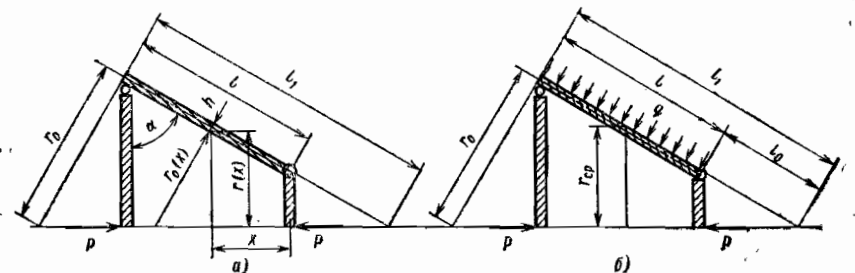


Рис. 19. Устойчивость конической оболочки

Для конической оболочки ($20^\circ \leq \alpha \leq 80^\circ$) критическое внешнее давление определяют по формуле

$$q_{кр} = K \frac{Eh^2}{lr_0} \sqrt{\frac{h}{r_0}}, \quad (72)$$

где l — длина оболочки; r_0 — наибольший радиус кривизны. Значения K принимают следующими:

$\frac{l_0}{l_1}$	0	0,2	0,4	0,5	0,8
K	3,00	2,62	2,12	1,63	1,32

Поправки на влияние краевых условий приближенно такие же, как для цилиндрической оболочки.

УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Сферическая оболочка под действием внешнего давления (рис. 20, а). В стенках оболочки возникают сжимающие напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{qr}{2h}, \quad (73)$$

где r , h — радиус и толщина оболочки.

Критическое напряжение оказывается таким же, как при сжатии цилиндрической оболочки осевым усилием,

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \frac{h}{r} = 0,605E \frac{h}{r}. \quad (74)$$

Критическое внешнее давление

$$q_{кр} = 2\sigma_{кр} \frac{h}{r} = 1,21E \frac{h^2}{r^2}. \quad (75)$$

Практический расчет проводят по формуле

$$q_{кр} = \alpha_c \cdot 1,21E \frac{h^2}{r^2}, \quad (76)$$

где значения α_c указаны на стр. 502.

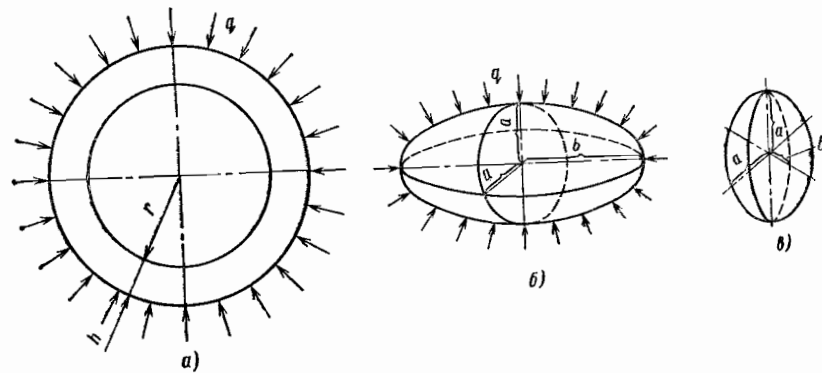


Рис. 20. Устойчивость сферической оболочки и эллипсоидальной оболочки вращения

Эллипсоидальная оболочка, оболочка вращения под внешним давлением. Критическое давление (рис. 20, б) определяют по формуле

$$q_{кр} = 1,21E \frac{h^2}{2b^2 - a^2}. \quad (77)$$

При потере устойчивости вмятины образуются в зоне экватора. Для оболочки, у которой $b \ll a$ (рис. 20, в), критическое давление

$$q_{кр} = 1,21E \frac{h^2 b^2}{a^4}. \quad (78)$$

Потеря устойчивости возникает возле полюсов, где радиус кривизны

$$r = \frac{a^2}{b}.$$

В практических расчетах в формулах (77) и (78) вводится поправочный коэффициент α_c , стр. 502.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Если температурные воздействия создают поле напряжений, совпадающее с напряжениями от критической нагрузки, и условия закрепления одинаковы, то потеря устойчивости произойдет при значениях температурных напряжений или усилий, совпадающих с критическими,

$$P_{темп} = P_{кр}, \quad \sigma_{темп} = \sigma_{кр}. \quad (79)$$

При нагреве пластинок (рис. 21, а), не имеющей возможности радиального удлинения, возникают температурные напряжения

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{E\alpha T}{1-\nu}, \quad (80)$$

где αT — температурная деформация, E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Потеря устойчивости произойдет [см. формулу (18)] при

$$\frac{E(\alpha T)_{кр}}{1-\nu} = 4,2 \frac{D}{b^2 h}. \quad (81)$$

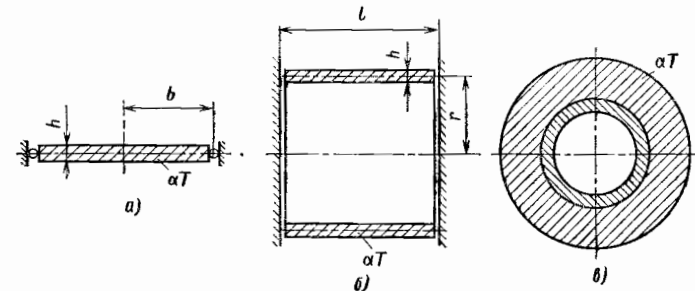


Рис. 21. Устойчивость пластины и оболочки при действии температурных напряжений

При нагреве цилиндрической оболочки, не имеющей возможности осевого удлинения (рис. 21, б), возникает температурное напряжение

$$\sigma_x = -E\alpha T.$$

Критическое значение температурной деформации в соответствии с равенствами (79) и (34)

$$(\alpha T)_{кр} = \alpha_c \cdot 0,505 \frac{h}{r}. \quad (82)$$

Критическое значение температурной деформации (при потере устойчивости пластинок и оболочек от действия температур) не зависит от модуля упругости материала.

При $\alpha T > (\alpha T)_{кр}$ начинается быстрый рост прогибов, так как деформация удлинения компенсируется теперь деформацией изгиба.

Если нагреваемая оболочка (рис. 21, в) не имеет возможности радиального удлинения, то в ней возникнут сжимающие окружные напряжения

$$\sigma_\theta = -E\alpha T,$$

однако потери устойчивости при равенстве (79) не произойдет, так как условия закрепления отличны от случая действия внешнего давления.

УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Деформации в слое оболочки и действующие напряжения связаны соотношениями упругости (рис. 22)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_\theta \frac{\sigma_\theta}{E_\theta}; \\ \epsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_x \frac{\sigma_x}{E_x}; \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G_{x\theta}, \end{aligned} \quad (83)$$

где $E_x, E_\theta, \nu_x, \nu_\theta$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона, $G_{x\theta}$ — модуль сдвига.

Параметры упругости ортотропного материала связаны зависимостью

$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_\theta}{E_\theta}. \quad (84)$$

Устойчивость при внешнем давлении. Для оболочек средней длины ($\frac{l}{r} < 3\sqrt{\frac{r}{h}}$), закрепленных по краям,

$$q_{кр} = \frac{2\pi}{3\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{(1-\nu_x\nu_\theta)^3}} \frac{E_\theta^{3/4} E_x^{1/4} h^2}{lr} \sqrt{\frac{h}{r}}. \quad (85)$$

Если $E_\theta = E_x = E, \nu_x = \nu_\theta = \nu = 0,3$, то зависимость (85) совпадает с формулой (22).

Для длинных оболочек ($\frac{l}{r} > 3\sqrt{\frac{r}{h}}$)

$$q_{кр} = \frac{E_\theta h^3}{4(1-\nu_x\nu_\theta)}. \quad (86)$$

Для устойчивости оболочки при внешнем давлении величина модуля упругости в окружном направлении более важна, чем в продольном.

Устойчивость при действии осевых сил. Критическое напряжение при осевом сжатии для оболочки средней длины ($\frac{l}{r} < 3\sqrt{\frac{r}{h}}$)

$$\sigma_{кр} = \frac{h}{r} \sqrt{\frac{E_\theta E_x}{3(1-\nu_x\nu_\theta)}}. \quad (87)$$

При $E_\theta = E_x = E; \nu_x = \nu_\theta = \nu = 0,3$ равенства (87) и (29) совпадают.

Критическое напряжение оказывается одинаковым для симметричной и несимметричной формы потери устойчивости. Для длинных оболочек следует проверить общую потерю устойчивости как стержня.

Критическое напряжение в этом случае

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{2} \pi^2 \frac{E_x r^2}{l^2} = 4,93 \frac{E_x r^2}{l^2}. \quad (88)$$

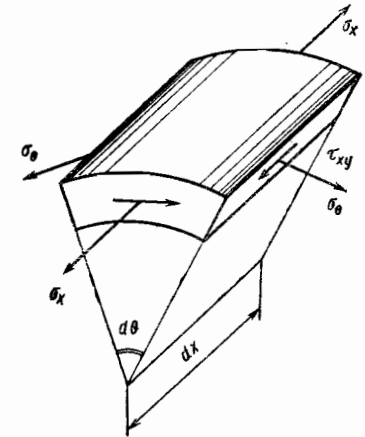


Рис. 22. Связь напряжений и деформаций в слое оболочки

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Для повышения устойчивости оболочки целесообразно не увеличивать толщину оболочки, а применять кольцевые и продольные подкрепления (рис. 23).

Кольцевые ребра (кольца) часто называют шпангоутами, а продольные ребра — стрингерами.

Внешнее давление. Критическое давление для оболочки средней длины ($\frac{l}{r} < 3\sqrt{\frac{r}{h}}$)

$$q_{кр} = \frac{4\pi}{\sqrt{27}} (1-\nu^2)^{1/4} \frac{A_x^{1/4} D_\theta^{3/4}}{lr\sqrt{r}} = 5,38 \frac{A_x^{1/4} D_\theta^{3/4}}{lr\sqrt{r}}, \quad (89)$$

где A_x — жесткость на растяжение в продольном направлении; D_θ — жесткость на изгиб в окружном направлении,

$$A_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{E_c F_c}{l_c}; \quad (90)$$

$$D_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E_\theta J_\theta}{l_\theta}, \quad (91)$$

где E, h, ν — модуль упругости, толщина обшивки, коэффициент Пуассона; E_c, F_c, l_c — модуль упругости, площадь поперечного сечения, шаг по окружности продольных ребер (стрингеров),

$$l_c = \frac{2\pi r}{N_c}, \quad (92)$$

где N_c — общее число продольных ребер; $E_\theta, J_\theta, l_\theta$ — модуль упругости, моменты инерции, шаг по длине кольцевого подкрепления (шпангоута); $l_\theta = l(N_\theta + 1)$, N_θ — число шпангоутов.

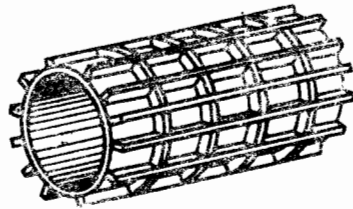


Рис. 23. Оболочка, подкрепленная продольными и кольцевыми ребрами

где

$$J_{об} = \frac{lh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (94)$$

— момент инерции продольного сечения оболочки; ν — коэффициент Пуассона ($\nu \approx 0,3$).

Следует проверить устойчивость пролета оболочки между двумя шпангоутами по формуле

$$q_{кр пр} = 0,92(N_{ш} + 1) \frac{Eh^2}{lr} \sqrt{\frac{h}{r}} \quad (95)$$

Наименьший вес оболочки получается при равенстве

$$q_{кр} = q_{кр пр} \quad (96)$$

что приводит к следующим значениям момента инерции шпангоута:

$$J_{ш} = J_{об} \left[(N_{ш} + 1)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{N_{ш} + 1} \right] \quad (97)$$

С уменьшением длины пролета (увеличением $N_{ш}$) оптимальная площадь шпангоутов возрастает, что обеспечивает общую устойчивость оболочки не ниже устойчивости каждого пролета в отдельности.

Значения $J_{ш}/J_{об}$ в соответствии с равенством (97) будут такими:

$N_{ш}$	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	20	26
$J_{ш}/J_{об}$	1,10	1,34	1,51	1,65	1,77	1,97	2,13	2,27	2,40	2,51	2,71	2,96

Устойчивость при действии осевых сил. Критическое значение общей осевой силы при несимметричной потере устойчивости для оболочек средней длины ($\frac{l}{r} < 3 \sqrt{\frac{r}{h}}$)

$$P_{кр нес} = 4\pi \sqrt{(1-\nu^2) A_x D_\theta} \quad (98)$$

где A_x и D_θ — см. формулы (90) и (91).

При симметричной форме потери устойчивости

$$P_{кр сим} = 4\pi \sqrt{(1-\nu^2) A_\theta D_x} \quad (99)$$

где A_θ — жесткость на растяжение в окружном направлении; D_x — жесткость на изгиб в продольном направлении,

$$A_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{E_{ш}F_{ш}}{l_{ш}}; \quad (100)$$

$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E_c J_c}{l_c}; \quad (101)$$

где $E_{ш}$, $F_{ш}$ и $l_{ш}$ — модуль упругости, площадь сечения и шаг кольцевых подкреплений (шпангоутов); E_c , J_c , l_c — модуль упругости, момент инерции и шаг продольных подкреплений (стрингеров).

В качестве расчетного критического усилия принимают наименьшее из двух указанных значений [формулы (98) и (99)].

При рациональном подкреплении должно выполняться условие

$$P_{кр нес} = P_{кр сим} = P_{кр} \quad (102)$$

или

$$A_x D_\theta = A_\theta D_x. \quad (103)$$

Для повышения устойчивости оболочки при действии сжимающих осевых сил целесообразно подкреплять ее одинаковым образом в продольном и окружном направлениях. Условие (103) будет выполнено, если

$$\frac{E_c F_c}{l_c} = \frac{E_{ш} F_{ш}}{l_{ш}}; \quad \frac{E_c J_c}{l_c} = \frac{E_{ш} J_{ш}}{l_{ш}}. \quad (104)$$

При наличии подкреплений следует проверить устойчивость панели между двумя стрингерами и шпангоутами.

Критическое осевое усилие, воспринимаемое полой панелью

$$\left(\frac{l_c}{r} < \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{r}} \right),$$

$$P_{1кр пан} = \frac{\pi^2 E h^3}{3(1-\nu^2) l_c} + \frac{E h l_c^2}{4\pi^2 r^2}. \quad (105)$$

Предполагая, что общее осевое усилие распределяется равномерно по площади обшивки (оболочки) и стрингеров (продольных подкреплений), получим

$$P_{1кр пан} = \frac{P_{кр пан}}{\left(1 + \frac{E_c F_c}{E h l_c} \right) \frac{2\pi r}{l_c}}, \quad (106)$$

где $P_{кр пан}$ — общее осевое усилие на оболочку, при котором происходит потеря устойчивости отдельных панелей.

Наименьший вес конструкции будет при

$$P_{кр} = P_{кр пан}$$

что приводит к условию

$$\frac{2\pi r}{l_c} \left(\frac{\pi^2 E h^3}{3(1-\nu^2) l_c} + \frac{E h l_c^2}{4\pi^2 r^2} \right) \left(1 + \frac{E_c F_c}{E h l_c} \right) = 4\pi \sqrt{(1-\nu^2) A_\theta D_x} = 4\pi \sqrt{(1-\nu^2) A_x D_\theta}. \quad (107)$$

Последнее соотношение вместе с равенством (104) служит для выбора оптимального значения шага продольных подкреплений и других параметров подкрепления.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

Появление и развитие ЭВМ изменило математические методы решения инженерных задач. Предпочтение отдается численным методам, поддающимся большей алгоритмизации и удобным для реализации на современных быстродействующих ЭВМ.

В основе численных методов лежит замена континуальной расчетной модели с непрерывным распределением параметров и бесконечным числом степеней свободы дискретной моделью, имеющей конечное число неизвестных, которое может быть и очень большим (в зависимости от требований, предъявляемых к расчету и возможностей ЭВМ).

Большое распространение среди численных методов получил метод конечных элементов, который наиболее удобен для реализации на ЭВМ благодаря четкой формализации отдельных этапов решения задачи и матричной форме расчета.

Наряду с этим широко применяются и другие численные методы расчета (вариационные, разностные, интегральные и др.). В основе многих из этих методов лежат вариационные уравнения.

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Из начала возможных перемещений следует, что действительному напряженному состоянию упругого тела соответствует минимум полной энергии деформации Φ , то есть ее вариация:

$$\delta\Phi = \delta(\Phi_e - \Phi_p) = \delta\left(\int_V \int \Phi_{e1} dV - \int_S (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS - \int_V \int (Xu + Yv + Zw) dV\right) = 0, \quad (1)$$

где Φ_e — потенциальная энергия деформации тела; Φ_p — потенциальная энергия внешних сил; V — объем тела; S — поверхность тела; Φ_{e1} — потенциальная функция деформации. Для равномерно нагретого тела Φ_{e1} — потенциальная энергия деформации на единицу объема тела; X_v, Y_v, Z_v и X, Y, Z — компоненты поверхностной и объемной нагрузки; u, v и w — компоненты упругого смещения, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям.

Соотношения теории упругости в матричной форме имеют вид

$$\{\epsilon\} = [a] \{\sigma\} + \{\alpha T\} + \{\epsilon^0\}, \quad (2)$$

где векторы-столбцы деформаций $\{\epsilon\}$, напряжений $\{\sigma\}$, температурных $\{\alpha T\}$ и дополнительных $\{\epsilon^0\}$ деформаций

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}; \quad \{\alpha T\} = \begin{pmatrix} \alpha_x T \\ \alpha_y T \\ \alpha_z T \\ \alpha_{xy} T \\ \alpha_{yz} T \\ \alpha_{zx} T \end{pmatrix}; \quad \{\epsilon^0\} = \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_z^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{zx}^0 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$[a]$ — симметричная матрица упругих коэффициентов размерности 6×6 . Для изотропного упругого тела матрица упругости

$$[a] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Вариация потенциальной функции деформации

$$\delta\Phi_{e1} = (\delta\{\epsilon\})^T \{\sigma\} = (\delta\{\epsilon\})^T [A] \{\epsilon\} - (\delta\{\epsilon\})^T [A] \{\alpha T\} - (\delta\{\epsilon\})^T [A] \{\epsilon^0\}, \quad (5)$$

где $[A] = [a]^{-1}$ — симметричная матрица, обратная матрица упругости, $\{\alpha T\}$ — вектор температурных деформаций; $\{\epsilon^0\}$ — вектор дополнительных деформаций; верхний индекс T — операция транспонирования; $\{\sigma^0\} = [A] \{\epsilon^0\}$.

Дополнительные деформации могут возникнуть в результате физико-химических процессов, происходящих в среде. В некоторых задачах оказывается удобным с помощью введения дополнительных деформаций описать пластичность и ползучесть среды.

Для изотропного тела с параметрами упругости E и ν из уравнения (5) получим

$$\Phi_{e1} = \left(G + \frac{\lambda}{2}\right) (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \lambda (\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha T (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) - (\sigma_x^0 \epsilon_x + \dots + \tau_{zx}^0 \gamma_{zx}), \quad (6)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига; $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ — постоянная Ляме.

Для ортотропного тела, матрица упругих деформаций которого имеет вид

$$[a] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E} & -\frac{\nu_{zy}}{E} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

получим следующее выражение потенциальной функции деформации [1]:

$$\Phi_{e1} = \frac{1}{2} (A_{11}\epsilon_x^2 + A_{22}\epsilon_y^2 + A_{33}\epsilon_z^2) + A_{12}\epsilon_x\epsilon_y + A_{23}\epsilon_y\epsilon_z + A_{31}\epsilon_z\epsilon_x + \frac{1}{2} (A_{44}\gamma_{xy}^2 + A_{55}\gamma_{yz}^2 + A_{66}\gamma_{zx}^2) - \beta_1 T\epsilon_x - \beta_2 T\epsilon_y - \beta_3 T\epsilon_z - (\sigma_x^0\epsilon_x + \dots + \tau_{zx}^0\gamma_{zx}), \quad (8)$$

где элементы матрицы коэффициентов жесткости

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= E_x^* (1 - \nu_{yz}\nu_{zy}); & A_{12} &= A_{21} = E_x^* (\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}); \\ A_{13} &= A_{31} = E_x^* (\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz}); & A_{22} &= E_y^* (1 - \nu_{xz}\nu_{zx}); \\ A_{23} &= A_{32} = E_y^* (\nu_{yz} + \nu_{yx}\nu_{xz}); & A_{33} &= E_z^* (1 - \nu_{yx}\nu_{xy}); \\ A_{44} &= G_{xy}; & A_{55} &= G_{yz}; & A_{66} &= G_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

причем

$$E_x^* = \frac{1}{m} E_x; \quad E_y^* = \frac{1}{m} E_y; \quad E_z^* = \frac{1}{m} E_z; \quad (10)$$

$$m = 1 - 2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{xz}\nu_{zx} - \nu_{zy}\nu_{yz} - \nu_{xy}\nu_{yx}; \quad (11)$$

коэффициенты

$$\beta_i = A_{i1}\alpha_x + A_{i2}\alpha_y + A_{i3}\alpha_z \quad (i = 1, 2, 3). \quad (12)$$

Уравнение (1), учитывая связь деформаций и перемещений, можно записать в виде

$$\delta\Phi \left(u, v, w, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (13)$$

Вариационное уравнение (13) эквивалентно полной системе дифференциальных уравнений теории упругости и граничным условиям задачи.

Вариационные методы, применяемые для приближенного решения, основаны на том, что уравнение (13) решается для некоторого класса функций, предполагая

$$u = \sum_{i=1}^{n_1} A_i f_i(x, y, z); \quad v = \sum_{i=1}^{n_2} B_i \varphi_i(x, y, z); \quad w = \sum_{i=1}^{n_3} C_i \psi_i(x, y, z), \quad (14)$$

где f_i, φ_i, ψ_i — заранее выбранные функции, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям.

Неизвестные параметры A_i, B_i, C_i определяются из системы линейных уравнений ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial B_i} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial A_i} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial C_i} = 0. \quad (15)$$

Для тел сложной конфигурации основная трудность состоит в выборе аппроксимирующих функций. Поэтому тело разбивают на малые, связанные между собой области, в пределах которых подбираются простые аппроксимирующие функции. По такому принципу строятся вариационно-разностные методы и метод конечных элементов.

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД

Сущность метода поясним на примере плоской задачи теории упругости при отсутствии температурных и дополнительных деформаций.

Учитывая уравнение (6) и связь между деформациями и перемещениями u и v (соответственно в направлении осей x и y), можно записать

$$\Phi_e = \iint_S \Phi_{e1} dS = \iint_S \left\{ A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{G}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dS, \quad (16)$$

где для плоского напряженного состояния коэффициенты

$$A = \frac{E}{2(1-\nu^2)}; \quad B = \frac{E\nu}{1-\nu^2}; \quad (17)$$

а для плоской деформации

$$A = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad B = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

В равенстве (16) S — область тела (единичной толщины) в плоскости x, y ;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Вариационное уравнение (1) при отсутствии массовых сил

$$\delta\Phi = \delta(\Phi_e - \Phi_p) = \delta \left\{ \iint_S \left\{ A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{G}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dS - \int_L (X_v u + Y_v v) dL \right\} = 0, \quad (18)$$

где X_v и Y_v — проекции на оси x и y компонентов внешней нагрузки на границе области с контуром L .

Для получения приближенного решения уравнения (18) удобно контур области аппроксимировать конечным числом прямолинейных отрезков. Исследуемая область покрывается нерегулярной (или регулярной) сеткой, состоящей из линий $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Точки пересечения прямоугольной сетки должны совпадать на границах области с точками на отрезках, аппроксимирующих контур (рис. 1, а).

Кроме того, на область наносится дополнительную сетку¹, линии которой проходят посередине линий основной сетки. Точки пересечения линий основной сетки называют узлами. Подобласти, границы которых образованы контурными отрезками (линиями основной сетки) и линиями дополнительной сетки, называют ячейками. При этом каждая ячейка (заштрихована на рис. 1, б) содержит одну узловую точку и может быть либо прямоугольником, либо треугольником.

В качестве основных неизвестных принимаем смещения в узловых точках u_m и v_m , где m — номер узла.

Потенциальную энергию деформации каждой ячейки можно найти в предположении, что смещения точек между узлами изменяются линейно и их производные остаются постоянными в каждой ячейке.

¹ Наносится штриховыми линиями лишь для получения разностных уравнений.

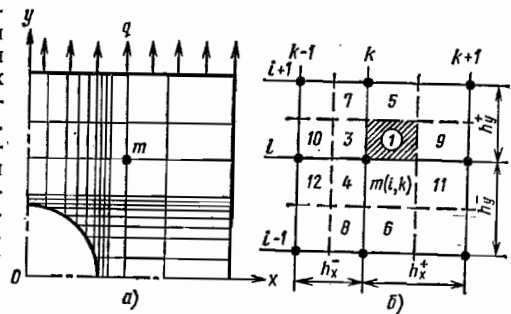


Рис. 1. Сеточная разметка пластинки

Используем конечно-разностные соотношения для первых производных в точке m (см. рис. 1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{h_x^+}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h_y^+}, \dots;$$

где i и k — соответственно номера горизонтали и вертикали; h_x^+ и h_x^- — шаги сетки (знаки $+$ и $-$ указывают, что соответствующие шаги приняты в направлении увеличения или уменьшения координаты).

С учетом равенства (16) получим приближенное выражение для потенциальной энергии элементарной ячейки l с центральным узлом m (i, k), см. рис. 1, б.

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon(l)} = \Phi_{\varepsilon(i,k)} = & \left\{ A \left[\left(\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{h_x^+} \right)^2 + \left(\frac{v_{i+1,k} - v_{i,k}}{h_y^+} \right)^2 \right] + \right. \\ & + \frac{G}{2} \left[\left(\frac{v_{i,k+1} - v_{i,k}}{h_x^+} \right)^2 + \left(\frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h_y^+} \right)^2 \right] + G \left(\frac{v_{i,k+1} - v_{i,k}}{h_x^+} \right) \times \\ & \times \left. \left(\frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h_y^+} \right) + B \left(\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{h_x^+} \right) \left(\frac{v_{i+1,k} - v_{i,k}}{h_y^+} \right) \right\} \frac{h_x^+ h_y^+}{4} q_j, \end{aligned} \quad (19)$$

где q_j — «вес» ячейки ($q_j = 1$ — для j -й ячейки, целиком лежащей внутри области; $q_j = 0,5$ — то же, для ячейки, примыкающей к косой границе (треугольной ячейки); $q_j = 0$ — то же, для ячейки вне области); $j = 1, 2, \dots, p$ — номер центрального узла.

Влияние температуры учитывается введением в выражение (19) дополнительного слагаемого

$$- \frac{E}{1-2\nu} \alpha T \left(\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{h_x^+} + \frac{v_{i+1,k} - v_{i,k}}{h_y^+} \right).$$

Так как аппроксимации для каждой ячейки имеют вид (19), то, суммируя потенциальную энергию деформации (19) по всем ячейкам сеточной области, получим соотношение для полной потенциальной энергии деформации:

$$\Phi_{\varepsilon} = \sum_{j=1}^p \Phi_{\varepsilon(j)}, \quad (20)$$

где p — число узлов на области.

Вариация потенциальной энергии деформации

$$\delta \Phi_{\varepsilon} = \frac{\partial \Phi_{\varepsilon}}{\partial u_m} \delta u_m + \frac{\partial \Phi_{\varepsilon}}{\partial v_m} \delta v_m. \quad (21)$$

Потенциальная функция внешних сил

$$\Phi_P = \sum_{b=1}^r (X_b u_b \Delta l_b + Y_b v_b \Delta l_b), \quad (22)$$

где X_b и Y_b — компоненты внешних сил, относящиеся к внешнему граничному узлу b , $b = 1, 2, \dots, r$ — номер граничного узла; Δl_b — длина элемента границы возле узла b .

Вариация потенциальной функции внешних сил

$$\delta \Phi_P = \frac{\partial \Phi_P}{\partial u_m} \delta u_m + \frac{\partial \Phi_P}{\partial v_m} \delta v_m. \quad (23)$$

¹ Законтурные ячейки используются для единообразного формирования системы уравнений на криволинейной границе области.

Так как вариации δu_m и δv_m произвольны, то из условия (18) следует

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_m} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v_m} = 0 \quad (m=1, 2, \dots, p). \quad (24)$$

Величины u_m и v_m входят в соотношения (19) лишь для двенадцати (из шестнадцати) ячеек, окружающих узел m .

Поэтому записав соотношения (19) для каждой из 12 ячеек, прилежащих к узлу m , продифференцировав их отдельно по u_m и v_m и просуммировав полученные выражения согласно равенствам (21), с учетом равенств (22) и (23) получим два разрешающих уравнения, связывающих смещения u_m и v_m в узле m с неизвестными смещениями в восьми соседних узлах (см. рис. 1, б) и действующими в них компонентами внешней нагрузки.

Записывая разрешающие уравнения для всех узлов сеточной области, получим $(p+r)$ линейных алгебраических уравнений, здесь p и r — число неизвестных смещений соответственно u_m и v_m^* , которые можно представить в матричной форме

$$[B] \{U\} = \{R\}, \quad (25)$$

где $[B]$ — симметричная, положительно определенная матрица коэффициентов; $\{U\}$ — вектор-столбец с компонентами смещений u_m и v_m ; $\{R\}$ — известный вектор-столбец, характеризующий внешние нагрузки.

Система линейных алгебраических уравнений относительно смещений решается достаточно просто одним из известных методов. Для получения единственного решения система дополняется граничными условиями в перемещениях.

В результате расчета при заданных нагрузках на контуре находятся смещения во всех узлах сеточной области. Далее можно найти деформации и напряжения в каждом узле.

Примеры расчета напряженного состояния в элементах конструкций вариационно-разностным методом приведены в гл. 28 и 29.

Вывод разрешающих уравнений для пространственной задачи аналогичен приведенному.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В последние годы широкое распространение получил метод конечных элементов, который имеет те же принципиальные основы, что и вариационно-разностный метод, но более прост при реализации на ЭВМ. Для расчета область расчленяют на конечное число малых элементов, обычно в виде треугольников для плоской задачи и многогранников для пространственной задачи (рис. 2). В пределах элемента перемещения представляют с помощью суммы аппроксимирующих функций. Например,

$$u(x, y, z) = \sum_{r=1}^v a_r f_r(x, y, z), \quad (26)$$

где $f_r(x, y, z)$ — заранее выбранные функции; a_r — неизвестный параметр. Число параметров v выбирается равным числу узлов элемента, что дает возможность выразить смещения как линейные функции узловых смещений этого же элемента.

Для элемента в виде тетраэдра (см. рис. 2) принимают, что смещение представляет линейную функцию координат

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (27)$$

* Число неизвестных смещений u_m и v_m в общем случае может быть различным (например, если на одной из осей симметрии или в заделке $u_m = 0$).

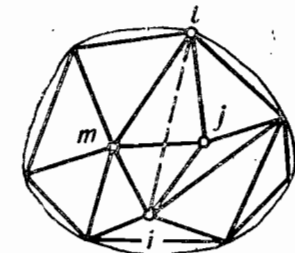


Рис. 2. Конечные элементы

Обозначая $u(x_i, y_i, z_i) = u_i$; $v(x_i, y_i, z_i) = v_i$; $w(x_i, y_i, z_i) = w_i$, где u_i, v_i, w_i — компоненты смещения узла i элемента n , находим из (27) вектор смещения для этого узла в виде

$$\{u_n\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = [\Phi_i^{(n)} \Phi_j^{(n)} \Phi_l^{(n)} \Phi_m^{(n)}] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_l \\ U_m \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

где $\Phi_i^{(n)}, \dots, \Phi_m^{(n)}$ — квадратные матрицы (3×3); U_i, \dots, U_m — векторы смещения четырех узлов тетраэдра i, j, l, m :

$$U_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}; \dots; U_m = \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

В более краткой форме равенство (28) можно записать с помощью матриц и векторов, содержащих блоки,

$$\{u_n\} = [\Phi_n] \{U_n\}. \quad (30)$$

Здесь и в некоторых случаях в дальнейшем указаны числа строк и столбцов в блоке матрицы (верхние цифры) и числа строк и столбцов в самой матрице (нижние цифры). Если одна из пар цифр состоит из единиц (1×1), то верхние и нижние цифры можно переставлять. При умножении матриц «внутренние» (обязательно попарно одинаковые) числа «поглощаются».

После того как сформирована матрица аппроксимирующих функций $\{u_n\}$, вектор деформаций (3) можно записать с помощью матрицы дифференцирования

$$\{\epsilon\} = [D] [\Phi_n] \{U_n\} = [B_n] \{U_n\}, \quad (31)$$

где

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad [D] [\Phi_n] = [B_n]. \quad (32)$$

В соответствии с законом упругости вектор напряжений [см. уравнения (2) и (5)]

$$\{\sigma_n\} = [A] \left([B_n] \{U_n\} - \{\alpha T\} - \{\epsilon^0\} \right). \quad (33)$$

Для получения разрешающей системы уравнений используют начало возможных перемещений (для всего тела), что обеспечивает выполнение условий равновесия

$$\int_V \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{P\} dV - \int_S \{\delta u\}^T \{Q\} dS = 0, \quad (34)$$

где

$$P = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \text{ и } Q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} \quad (35)$$

— векторы внешних нагрузок (объемной и поверхностной).

Принтегрировав по всем элементам, будем иметь (N_3 — число элементов),

$$\sum_{n=1}^{N_3} \left(\int_V \{\delta \epsilon_n\}^T \{\sigma_n\} dV - \int_V \{\delta u_n\}^T \{P\} dV - \int_{S_n} \{\delta u_n\}^T \{Q\} dS \right) = 0. \quad (36)$$

Последний интеграл распространяется на поверхности элемента, принадлежащие внешней поверхности тела; для всех внутренних элементов он обращается в нуль.

Учитывая равенства (30), (31) и (33), находим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_3} \left\{ \int_V ([B_n] \{\delta U_n\})^T [A] [B_n] \{U_n\} dV - \right. \\ & \left. - \int_V ([B_n] \{\delta U_n\})^T [A] (\{\alpha T\} + \{\epsilon^0\}) dV - \right. \\ & \left. - \int_V ([\Phi_n] \{\delta U_n\})^T \{P\} dV - \int_{S_n} ([\Phi_n] \{\delta U_n\})^T \{Q\} dS \right\} = 0 \quad (37) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_3} \left\{ \int_V \{\delta U_n\}^T \left\{ \left(\int_V [B_n]^T [A] [B_n] dV \right) \{U_n\} - \int_V [B_n]^T [A] (\{\alpha T\} + \{\epsilon^0\}) dV - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_V [\Phi_n]^T \{P\} dV - \int_{S_n} [\Phi_n]^T \{Q\} dS \right\} = 0. \quad (38) \end{aligned}$$

Вследствие независимости произвольных вариаций $\{\delta U_n\}$ соотношение (38) эквивалентно системе $3N_3$ линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in i} \left\{ \left(\int_V [B_n]^T [A] [B_n] dV \right) \{U_n\} - \int_V [B_n]^T [A] (\{\alpha T\} + \{\epsilon^0\}) dV - \right. \\ & \left. - \int_V [\Phi_n]^T \{P\} dV - \int_{S_n} [\Phi_n]^T \{Q\} dS \right\}_i = 0. \quad (39) \end{aligned}$$

Запись $n \in i$ означает, что в уравнение входят только элементы, примыкающие к i -му узлу. Индекс i показывает, что в сумму входят составляющие, связанные с узлом i (в четырехблочном векторе для тетраэдрального элемента n сохраняется блок узла i).

Матрица разрешающей системы (39) является редко заполненной (имеет небольшой процент ненулевых коэффициентов) и при надлежащем порядке нумерации узлов имеет ленточную структуру.

Часто используют механическую трактовку уравнения (39), при которой отдельные слагаемые рассматривают как обобщенные усилия, а величину

$$\int_V [B_n]^T [A] [B_n] dV = [k_n] \quad (40)$$

как матрицу жесткости элемента n .

Тогда, если через $\{Q_n\}$ обозначить узловые нагрузки, которые статически эквивалентны граничным напряжениям

$$\int_{S_n} [\Phi_n]^T \{Q\} dS = \{Q_n\},$$

то уравнение (39) для одного элемента (без учета температурных и дополнительных деформаций) имеет вид

$$[k_n] \{u_n\} = \{Q_n\}. \quad (41)$$

Матрица жесткости элемента n имеет блочную структуру, связанную с блочной структурой векторов $\{u_n\}$ и $\{Q_n\}$:

$$[k_n] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{1j} & k_{1l} & k_{1m} \\ k_{j1} & k_{jj} & k_{jl} & k_{jm} \\ k_{l1} & k_{lj} & k_{ll} & k_{lm} \\ k_{m1} & k_{mj} & k_{ml} & k_{mm} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

где k_{ii}, \dots, k_{mm} — квадратные подматрицы (блоки) размерности (3×3) ,

$$k_{ij} = \int_V [B_i]^T [A] [B_j] dV, \quad (43)$$

где согласно (32) $[B_i] = [D] [\Phi_i^{(n)}]$; $[B_j] = [D] [\Phi_j^{(n)}]$.

Подматрица k_{ij} показывает реакцию (обобщенное усилие) в узле i тетраэдра (элемента n) от единичного смещения его j -го узла при неподвижных узлах l, m, l . Так как вся конструкция состоит из совокупности элементов, то матрицы жесткости отдельных элементов объединяются в матрицу системы.

В одном узле сетки обычно сходятся несколько элементов и каждый из них вносит вклад в матрицу жесткости, и i -ая строка суммарной матрицы жесткости будет содержать соответствующие компоненты матриц жесткости элементов, примыкающих к i -му узлу.

С учетом (39) матрица жесткости конструкции $[K]$, содержащей N узлов,

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Обозначая векторы внешних сосредоточенных в узлах сетки усилий и перемещений узлов сетки соответственно

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{Bmatrix}; \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix}, \quad (45)$$

получим систему линейных уравнений относительно узловых смещений

$$\{Q\} = [K] \{U\}. \quad (46)$$

По физическому смыслу уравнение (46) представляет собой уравнение равновесия системы (в смещениях). Для получения единственного решения система должна быть дополнена граничными условиями в перемещениях.

Благодаря тому, что система уравнений (46) соответствует минимуму квадратичного функционала полной потенциальной энергии исследуемого тела, матрица этой системы симметрична и положительно определена. Эти ее свойства, а также ленточную структуру и «редкозаполненность» используют при решении системы точными методами (метод блочного исключения Гаусса, метод квадратного корня и т. п.).

Определив из уравнения (46) узловые перемещения, можно по формулам (33) найти напряжения.

Описанный вариант метода конечного элемента является простейшим. Можно повысить порядок аппроксимации функций перемещения в элементе, вводя, например, дополнительные узлы на ребрах тетраэдра или используя элементы другой фор-

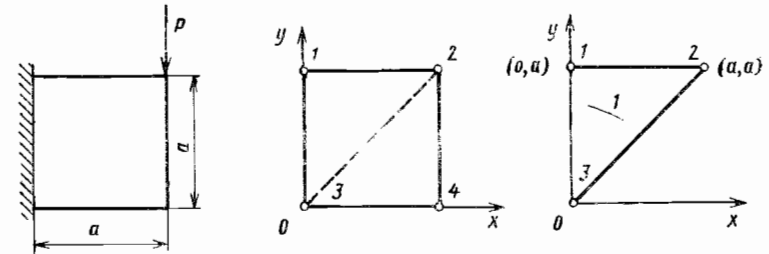


Рис. 3. К расчету пластинки

мы (прямоугольную призму и т. п.). При этом точность расчета повышается быстрее, чем при измельчении сетки простых элементов.

Метод конечного элемента может быть эффективно реализован при наличии полностью автоматизированной программы, реализующей все этапы расчета конструкции (идеализация конструкции, формирование системы (39) или (46), решение этой системы, подсчет напряжений и других величин). Программа должна быть универсальной, пригодной для широкого круга практических задач.

Весьма эффективны программы, имеющие блок автоматического разбиения области на элементы, сокращающие процесс составления и контроля обширной исходной информации. Целесообразно применять графический контроль (вывод на графопостроитель или экран дисплея) данных о геометрии области и характере ее разбиения, а также выходной информации.

Примеры расчета элементов конструкции методом конечных элементов приведены в гл. 28.

Ниже приведен пример решения простейшей задачи, иллюстрирующий основные особенности реализации метода конечных элементов.

Пример. Определить перемещения в квадратной пластинке толщиной 1 мм от заданной нагрузки P , кгс/мм (рис. 3, а).

Для большей наглядности разобьем пластинку всего на два треугольных элемента (рис. 3, б).

Для получения разрешающей системы уравнений сформируем предварительно матрицы $[A]$ и $[B_n]$ [см. соотношение (40)].

С учетом равенств (9) матрица коэффициентов жесткости $[A]$ для плоского напряженного состояния имеет вид

$$[A] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Рассмотрим элемент 1. Соотношения (27) для него будут такими:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \quad (48)$$

Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ определяют через перемещения узлов из следующих систем уравнений (принято $U_1 = U_i, U_2 = U_j$ и $U_3 = U_m$):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i &= u_i; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j &= u_j; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m &= u_m \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i &= v_i; \\ \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j &= v_j; \\ \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m &= v_m. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где x_i и y_i, x_j и y_j, x_m и y_m — координаты узлов.

Определяя $\alpha_i, \dots, \alpha_6$ из уравнений (49) и (50) и внося их в соотношения (48), получаем уравнения (28):

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m]; \\ v &= \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m]; \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

где коэффициенты a_i, b_i, \dots выражаются через определители

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix}; & a_j &= \begin{vmatrix} x_m & y_m \\ x_i & y_i \end{vmatrix}; & a_m &= \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}; \\ b_i &= \begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_m & 1 \end{vmatrix}; & b_j &= \begin{vmatrix} y_m & 1 \\ y_i & 1 \end{vmatrix}; & b_m &= \begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_j & 1 \end{vmatrix}; \\ c_i &= \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix}; & c_j &= \begin{vmatrix} 1 & x_m \\ 1 & x_i \end{vmatrix}; & c_m &= \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{vmatrix}; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} - \text{коэффициент, численно равный площади элемента.}$$

В данном случае (плоская задача) матрицы Φ_i, \dots, Φ_m имеют вид

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \right); \dots \Phi_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{a_m + b_m x + c_m y}{2\Delta} \right). \quad (53)$$

Для плоской задачи матрица дифференцирования принимает вид

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Применяя соотношение (32), находим

$$[B_n] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & c_m \\ c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (54)$$

или

$$[B_n] = [B_i B_j B_m], \quad (55)$$

где

$$[B_i] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}; \dots [B_m] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & c_m \\ c_m & b_m \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Так как в рассчитываемом примере деформации постоянны в пределах каждого элемента, то матрицы $[B_n]$ не зависят от x и y .

В этом случае соотношения (40) и (43) примут вид

$$[k_n] = [B_n]^T [A] [B_n] \Delta; \quad [k_{ij}] = [B_i]^T [A] [B_j] \Delta. \quad (57)$$

Перейдем к расчету пластинки, рассмотрим элемент 1. По формулам (52) находим

$$\begin{aligned} a_1 &= 0; & a_2 &= 0; & a_3 &= -a^2; \\ b_1 &= a; & b_2 &= -a; & b_3 &= 0; & \Delta &= \frac{a^2}{2}. \\ c_1 &= -a; & c_2 &= 0; & c_3 &= a. \end{aligned}$$

Из соотношений (53) получим функции, стоящие множителями у единичных матриц,

$$\Phi_1 = \frac{ax - ay}{a^2}; \quad \Phi_2 = \frac{-ax}{a^2}; \quad \Phi_3 = \frac{ay}{a^2},$$

далее с учетом равенства (54) получаем матрицы

$$B_1 = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \\ -a & a \end{bmatrix}; \quad B_2 = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}; \quad B_3 = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя эти зависимости, по формуле (57) находим блоки матрицы жесткости;

$$k_{11} = [B_1]^T [A] [B_1] \Delta = \frac{E}{2a^2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \\ -a & a \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} \\ -\frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Проводя аналогичные вычисления, получаем остальные блоки для матрицы жесткости 1-го элемента, которая в рассматриваемом примере будет иметь вид

$$[k_1] = \begin{bmatrix} k_{11}k_{12}k_{13} \\ k_{21}k_{22}k_{23} \\ k_{31}k_{32}k_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} & -1 & \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & \nu \\ -\frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} & \nu & -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & -1 \\ -1 & \nu & 1 & 0 & 0 & -\nu \\ \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & 0 & \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & 0 \\ -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 & -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ \nu & -1 & -\nu & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости для 2-го элемента формируется аналогично

$$[k_2] = \begin{bmatrix} k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{32}k_{33}k_{34} \\ k_{42}k_{43}k_{44} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} \\ 0 & 1 & -\nu & 0 & \nu & -1 \\ 0 & -\nu & 1 & 0 & -1 & \nu \\ -\frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \\ -\frac{1-\nu}{2} & \nu & -1 & \frac{1-\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} \\ \frac{1-\nu}{2} & -1 & \nu & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Матрицу жесткости пластинки в соответствии с равенством (39) можно представить в виде (верхние индексы при k показывают номер элемента)

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & (k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)}) & (k_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)}) & k_{24}^{(2)} \\ k_{31}^{(1)} & (k_{32}^{(1)} + k_{32}^{(2)}) & (k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)}) & k_{34}^{(2)} \\ 0 & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} & -1 & \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & \nu & 0 & 0 \\ -\frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} & \nu & -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \nu & 1 & 0 & 0 & -\frac{1+\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} \\ \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & 0 & \frac{3-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} & 0 & \nu & -1 \\ -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 & -\frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} & 0 & -1 & \nu \\ \nu & -1 & -\frac{1+\nu}{2} & 0 & 0 & \frac{3-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1-\nu}{2} & \nu & -1 & \frac{1-\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & -1 & \nu & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание крайние условия ($U_1 = 0, U_3 = 0$), запишем матрицы смещений и внешних сил

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \end{Bmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Значения реакций $\{Q_1\}$ и $\{Q_3\}$ не известны. Однако благодаря использованию крайних условий для перемещений U_1 и U_3 число уравнений уменьшается на 2, и единственное решение задачи получается путем «вычеркивания» 1-й и 3-й строк и таких же столбцов.

Таким образом, для определения неизвестных смещений используем уравнения

$$[K^*] \{U^*\} = \{Q^*\},$$

где

$$[K^*] = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{24} \\ K_{42} & K_{44} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{2} & 0 & -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} \\ 0 & \frac{3-\nu}{2} & \nu & -1 \\ -\frac{1-\nu}{2} & \nu & \frac{3-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} \\ \frac{1-\nu}{2} & -1 & -\frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{bmatrix};$$

$$\{U^*\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}; \quad \{Q^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

При $\nu = 0,3$ получим систему уравнений

$$1,35u_2 + 0 \cdot v_2 - 0,35u_4 + 0,35v_4 = 0;$$

$$0 \cdot u_2 + 1,35v_2 + 0,3u_4 - 1 \cdot v_4 = -1,82 \frac{P}{E};$$

$$-0,35u_2 + 0,3v_2 + 1,35u_4 - 0,65v_4 = 0;$$

$$0,35u_2 - 1 \cdot v_2 - 0,65u_4 + 1,35v_4 = 0,$$

откуда

$$v_2 = -3,385 \frac{P}{E}; \quad v_4 = -2,91 \frac{P}{E};$$

$$u_2 = 0,63 \frac{P}{E}; \quad u_4 = -0,49 \frac{P}{E}.$$

Для определения неизвестных реакций Q_{1x}, Q_{1y} и Q_{3x}, Q_{3y} следует использовать соответственно 1-е и 3-е матричные уравнения. Для данного примера разрешающую систему уравнений можно получить значительно проще путем подстановки функции u и v [соотношения (51)] в уравнение (18) и удовлетворения условий (24). Однако для сложной задачи (с большим числом элементов) указанный алгоритм метода конечных элементов оказывается наиболее простым и универсальным.

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Во многих конструкциях возникают деформации пластичности и ползучести (в деталях паровых и газовых турбин, авиационных и других транспортных двигателей). Нагружение часто осуществляется при переменной температуре, когда механические характеристики материала существенно зависят от температуры.

В отличие от технологических задач теории пластичности и ползучести (обработка давлением и т. п.) деформации пластичности и ползучести в работающих конструкциях невелики, однако их учет оказывается совершенно необходимым для расчета на прочность, оценки надежности и долговечности их работы.

В последние годы расчет на прочность элементов конструкций интенсивно совершенствуется за счет широкого использования электронных вычислительных машин (ЭВМ). Открываются возможности более полного описания элементов конструкций с учетом реальных свойств материалов, характера нагружения и условий разрушения.

Ниже рассмотрены основные модели материала и методы расчета напряжений и деформаций в конструкциях при простом и сложном нагружении с учетом упругости, пластичности и ползучести.

УРАВНЕНИЯ УПРУГОСТИ

Уравнения упругости для анизотропного тела с учетом температурных и дополнительных деформаций имеют вид

$$\{\varepsilon\}^e = [a]^e \{\sigma\} + \{\alpha T\} + \{\varepsilon^0\}, \quad (1)$$

где векторы — столбцы деформаций, напряжений, температурных и дополнительных деформаций

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \{\alpha T\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x T \\ \alpha_y T \\ \alpha_z T \\ \frac{1}{2} \alpha_{xy} T \\ \frac{1}{2} \alpha_{yz} T \\ \frac{1}{2} \alpha_{zx} T \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_z^0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy}^0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz}^0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx}^0 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

$[a]^e$ — симметричная квадратная матрица упругих коэффициентов размерности 6×6 . Верхний индекс e соответствует упругим деформациям.

Введение дополнительных деформаций в равенство (1) связано с последующим использованием модели упругого тела для описания пластичности и ползучести материала. В некоторых задачах дополнительные деформации позволяют учесть структурные и фазовые превращения в материале.

Известно, что напряжения и деформации в точке образуют тензоры. Представление напряженного и деформированного состояния шестимерными векторами, составленными из компонентов тензоров, более удобно для записи уравнений пластичности и ползучести в матричной форме (см. обозначения в гл. 26)

В соотношениях (2) *

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \dots, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dots \quad (x, y, z),$$

* Здесь и в дальнейшем символы (x, y, z) означают, что недостающие соотношения выписываются по правилу круговой перестановки индексов.

где u, v, w — упругие смещения соответственно по осям координат x, y и z . Значение γ_{xy} в технической теории упругости равно удвоенной величине соответствующего компонента тензора деформаций.

Для ортотропного тела матрица упругих коэффициентов имеет вид

$$[a]^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{zx}} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

для обычного изотропного тела

$$[a]^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где E, G — соответственно модули упругости и сдвига; ν — коэффициент Пуассона. Отметим, что в формуле (1) коэффициенты линейного температурного расширения представляют собой средние значения в температурном интервале от 0 до T .

Например, линейная температурная деформация в направлении оси x

$$\epsilon_x^T = \alpha_x^* T = \int_0^T \alpha_x^*(\theta) d\theta, \quad (5)$$

где α_x^* — истинный коэффициент температурного расширения, θ — текущая температура.

Из последнего равенства вытекает

$$\alpha_x^*(T) = \frac{d}{dT} (\alpha_x^* T). \quad (6)$$

Считая коэффициенты упругости зависящими от температуры, из уравнения (1) получим

$$\{d\epsilon\}^e = [a]^e \{d\sigma\} + \left\{ \frac{d}{dT} [a]^e \right\} \{\sigma\} dT + \left\{ \frac{d(\alpha T)}{dT} \right\} dT + \{d\epsilon^0\}. \quad (7)$$

Для изотропного тела соотношения (7) в развернутом виде будут такими:

$$d\epsilon_x^e = \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)] - \frac{1}{E^2} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \frac{dE}{dT} dT - \\ - \frac{1}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \frac{d\nu}{dT} dT + \frac{d(\alpha T)}{dT} dT + d\epsilon_x^0, \dots; \\ d\gamma_{xy}^e = \frac{1}{G} d\tau_{xy} - \frac{1}{G^2} \tau_{xy} \frac{dG}{dT} dT + d\gamma_{xy}^0, \dots \quad (x, y, z).$$

УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Деформационная теория пластичности [3, 4] предполагает наличие однозначной зависимости между суммарными деформациями в упруго-пластическом теле и напряжениями. Для изотропного тела основные соотношения деформационной теории имеют вид

$$\epsilon_x - \epsilon = \frac{1+\nu}{E} \psi (\sigma_x - \sigma), \dots; \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \psi \tau_{xy}, \dots \quad (x, y, z), \quad (8)$$

где E, ν — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона. Средние деформации и напряжение связаны соотношением упругости

$$\epsilon = \frac{1-2\nu}{E} \sigma + \alpha T, \quad (9)$$

здесь ϵ и σ — соответственно средняя деформация и среднее напряжение,

$$\epsilon = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z); \\ \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (10)$$

В равенствах (8) величина ψ представляет собой параметр пластичности,

$$\psi = \frac{3}{2(1+\nu)} E \frac{\epsilon_i}{\sigma_i} = \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i}, \quad (11)$$

где σ_i и ϵ_i — соответственно интенсивности напряжений и деформаций,

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \dots + 6(\tau_{xy}^2 + \dots)}; \\ \epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \dots + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \dots)}, \quad (12)$$

здесь σ_i^* — интенсивность напряжений в упругом теле, соответствующая интенсивности деформаций ϵ_i .

В расчетах принимается, что интенсивности напряжений σ_i и деформаций ϵ_i связаны однозначной зависимостью (рис. 1)

$$\sigma_i = \varphi(\epsilon_i). \quad (13)$$

Эта зависимость (обобщенная кривая деформирования) предполагается одинаковой для любого напряженного состояния.

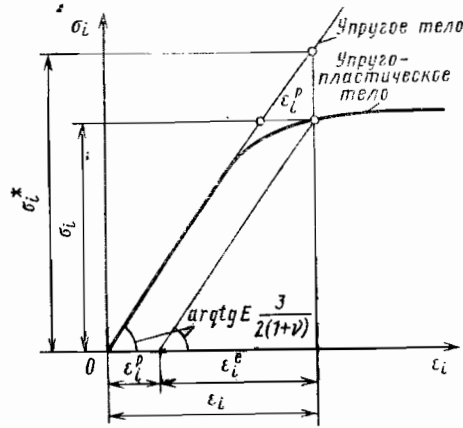


Рис. 1. Кривая деформирования

При упругих деформациях параметр пластичности $\psi = 1$ и уравнения (8) совпадают с уравнениями упругости

$$\epsilon_x^e - \epsilon^e = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_x - \sigma), \dots, \frac{1}{2} \gamma_{xy}^e = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \dots (x, y, z). \quad (15)$$

Верхний индекс e , как и раньше, означает, что рассматривается упругая часть деформации. Вычитая из соотношений (8) равенства (15), получим выражения для пластической деформации

$$\epsilon_x^p = \frac{1+\nu}{E} (\psi - 1) (\sigma_x - \sigma), \dots, \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy}^p = \frac{1+\nu}{E} (\psi - 1) \tau_{xy}, \dots (x, y, z),$$

где верхний индекс p соответствует деформациям пластичности. При выводе последних соотношений учитывали, что для пластических деформаций

$$\epsilon^p = \frac{1}{3} (\epsilon_x^p + \epsilon_y^p + \epsilon_z^p) = 0$$

и поэтому $\epsilon = \epsilon^e$.

Равенства (8) можно записать в векторной форме:

$$\{e\} = \frac{1+\nu}{E} \psi \{S\}, \quad (17)$$

где $\{e\}$ — вектор — девиатор деформаций; $\{S\}$ — вектор — девиатор напряжений,

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x - \epsilon \\ \epsilon_y - \epsilon \\ \epsilon_z - \epsilon \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \{S\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma \\ \sigma_y - \sigma \\ \sigma_z - \sigma \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

При растяжении стержня

$$\sigma_x = \sigma_0; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = 0;$$

$$\tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = 0;$$

$$\epsilon_x = \epsilon_0; \quad \epsilon_y = -\nu^* \epsilon_0; \quad \epsilon_z = -\nu^* \epsilon_0;$$

$$\gamma_{yz} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0; \quad \gamma_{xy} = 0$$

и из (12) получим

$$\sigma_i = \sigma_0;$$

$$\epsilon_i = \frac{2(1+\nu^*)}{3} \epsilon_0, \quad (14)$$

где ν^* — коэффициент Пуассона в области упруго-пластических деформаций ($\nu \leq \nu^* \leq 0,5$). Часто в практических расчетах принимают $\nu^* = 0,5$, и тогда уравнение (13) представляет собой зависимость $\sigma_0 - \epsilon_0$ при растяжении стержня.

Соотношения (16) можно представить в виде

$$\{e\}^p = \frac{1+\nu}{E} (\psi - 1) \{S\}.$$

Вектор пластической деформации коллинеарен вектору-девиатору напряжений.

Приведем еще несколько соотношений деформационной теории пластичности. Если каждое из уравнений (8) возвести в квадрат, сложить все шесть полученных равенств и извлечь квадратный корень, то получим

$$\epsilon_i = \frac{2(1+\nu)}{3E} \psi \sigma_i,$$

что соответствует зависимости (11).

Подобным образом можно найти интенсивность пластических деформаций из уравнения (16)

$$\epsilon_i^p = \frac{2(1+\nu)}{3E} (\psi - 1) \sigma_i.$$

Из последних соотношений вытекает

$$\epsilon_i = \epsilon_i^p + \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_i = \epsilon_i^p + \epsilon_i^e, \quad (19)$$

т. е. интенсивность деформации равна сумме интенсивностей пластических и упругих деформаций.

Для случая растяжения получим

$$\sigma_i = \sigma_0; \quad \epsilon_i^p = \epsilon_0^p.$$

Так как пластическая деформация протекает без изменения объема, то

$$\epsilon_y^p = \epsilon_z^p = -\frac{1}{2} \epsilon_x^p = -\frac{1}{2} \epsilon_0^p.$$

Из уравнения (19)

$$\epsilon_i = \epsilon_0^p + \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_0 = \epsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E} + \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_0$$

или

$$\epsilon_i = \epsilon_0 - \frac{1-2\nu}{3} \frac{\sigma_0}{E}.$$

В качестве обобщенной кривой деформирования можно рассматривать обычную кривую деформирования при растяжении $\sigma_0 - \epsilon_0$.

Для приведения кривой деформирования, соответствующей сложному напряженному состоянию, к эквивалентной кривой при простом растяжении следует положить

$$\epsilon_0 = \epsilon_i + \frac{1-2\nu}{3} \frac{\sigma_i}{E}; \quad (20)$$

$$\sigma_0 = \sigma_i.$$

Экспериментальные исследования показали, что основные зависимости деформационной теории пластичности справедливы по крайней мере при монотонном возрастании нагрузок и в случае простого нагружения*.

* Нагружение называют простым, если соотношение между компонентами напряжения остается неизменным в процессе нагружения.

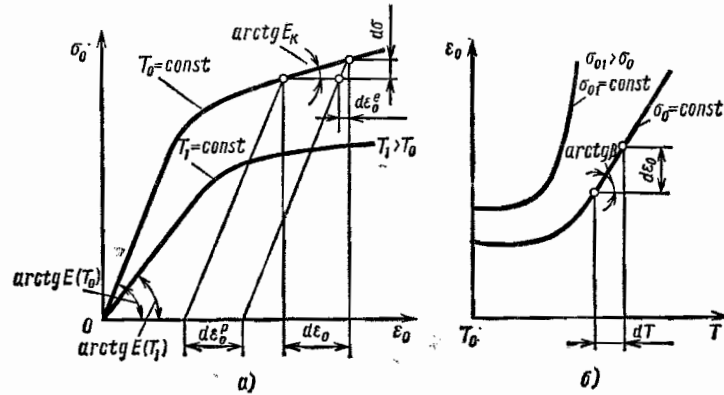


Рис. 2. Кривые деформирования при растяжении с постоянной температурой (а) и с постоянным напряжением (б)

Если $\{\sigma\}_0$ — обобщенный вектор напряжения, соответствующий внешним воздействиям в момент времени t_0 , то при простом нагружении в момент времени t

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}_0 f(t), \tag{21}$$

где $f(t)$ — произвольная, неубывающая функция времени.

Из равенства (21) следует, что в процессе простого нагружения все компоненты вектора напряжения увеличиваются в одинаковое число раз. Следовательно, при одноосном напряженном состоянии нагружение всегда будет простым.

Деформационная теория пластичности нашла широкое применение в практических расчетах. Однако при сложном нагружении, особенно когда на некоторых этапах происходит разгрузка, применение деформационной теории может привести к погрешностям. Основным недостатком этой теории — отрицание роли «истории нагружения».

Во многих случаях более оправданным является применение теории пластического течения [7].

В соответствии с теорией пластического течения приращения пластической деформации в процессе нагружения

$$de_x^p = [F_\sigma(\sigma_i, T) d\sigma_i + F_T(\sigma_i, T) dT] (\sigma_x - \sigma), \dots; \tag{22}$$

$$\frac{1}{2} dy_{xy}^p = [F_\sigma(\sigma_i, T) d\sigma_i + F_T(\sigma_i, T) dT] \tau_{xy}, \dots \quad (x, y, z),$$

где σ_i — интенсивность напряжений [см. (12)]; T — температура.

Применяя равенства (22) для случая простого растяжения при $T = \text{const}$, находим функцию напряженного состояния

$$F_\sigma(\sigma_i, T) = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k(\sigma_i, T)} - \frac{1}{E(T)} \right), \tag{23}$$

где $E(T)$ — модуль упругости материала при температуре T , $E_k(\sigma_i, T)$ — касательный модуль, определяемый по обычным кривым деформирования при $\sigma_0 = \sigma_i$ и $T = \text{const}$ (рис. 2, а).

Термомеханическая функция

$$F_T(\sigma_i, T) = \frac{3}{2\sigma_i} \left[\beta + \frac{\sigma_i}{E^2(T)} \frac{dE(T)}{dT} \right],$$

где $\beta = f(\sigma_i, T)$ — коэффициент температурной податливости, зависящий от напряжения и температуры. В упругой области

$$\beta = - \frac{\sigma_i}{E^2} \frac{dE}{dT}.$$

Коэффициент $\beta(\sigma_i, T)$ определяют по экспериментальным кривым растяжения при $\sigma_0 = \sigma_i = \text{const}$ и непрерывно повышающейся температуре (рис. 2, б), этот коэффициент представляет собой приращение деформаций при $\sigma_i = \text{const}$ за счет увеличения податливости материала при возрастании температуры на 1°C .

Термомеханическую функцию можно представить в виде

$$F_T(\sigma_i, T) = - F_\sigma(\sigma_i, T) \frac{\partial \sigma_s(T, e_{i*}^p)}{\partial T}, \tag{24}$$

где $\sigma_s(T, e_{i*}^p)$ — мгновенный предел текучести, соответствующий температуре T и накопленной пластической деформации e_{i*}^p (рис. 3). Величина e_{i*}^p равна сумме интенсивности приращений пластической деформации на всем пути нагружения:

$$e_{i*}^p = \int de_{i*}^p = \int_0^t \frac{de_{i*}^p}{dt} dt, \tag{25}$$

где

$$de_{i*}^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(de_x^p - de_y^p)^2 + \dots + \frac{3}{2} [(dy_{xy}^p)^2 + \dots]}. \tag{26}$$

Равенства (22) описывают приращение пластической деформации при выполнении условия активного нагружения ($de_{i*}^p > 0$)

$$\sigma_i = \sigma_s \quad \text{и} \quad d\sigma_i > \frac{\partial \sigma_s}{\partial T} dT. \tag{27}$$

Если справедливо хотя бы одно из условий

$$\sigma_i < \sigma_s \quad \text{или} \quad d\sigma_i \leq \frac{\partial \sigma_s}{\partial T} dT, \tag{28}$$

то следует считать, что приращения пластической деформации нет. В этом случае имеет место либо разгрузка, либо упругое нагружение. Равенства (22) можно представить в векторной форме

$$\{de\}^p = [F_\sigma(\sigma_i, T) d\sigma_i + F_T(\sigma_i, T) dT] \{S\}. \tag{29}$$

Вектор приращения пластической деформации коллинеарен вектору — девiatorу напряжений.

Изложенный вариант теории пластического течения предполагает изотропное упрочнение по мере увеличения e_{i*}^p и не описывает эффект Баушингера. Однако его можно использовать как первое приближение при расчете конструкций в условиях сложного нагружения.

УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ползучесть материала (возрастание деформаций с течением времени при постоянном уровне напряжений) проявляется в теплонапряженных конструкциях. В сов-

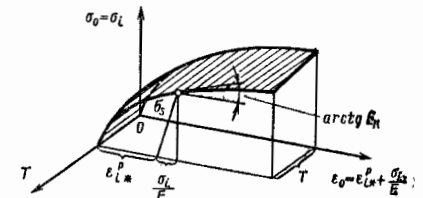


Рис. 3. Поверхность деформирования

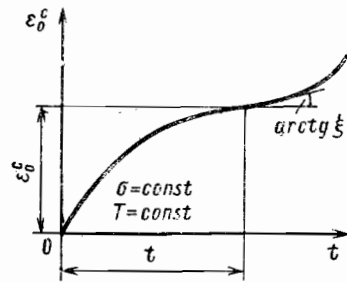


Рис. 4. Кривая ползучести

ременных моделях ползучести приращение деформаций ползучести принимается равным

$$d\epsilon_x^c = \Phi dt (\sigma_x - \sigma), \dots; \quad (30)$$

$$\frac{1}{2} d\gamma_{xy}^c = \Phi dt \tau_{xy}, \dots \quad (x, y, z),$$

где t — время, Φ — функция ползучести, зависящая от инвариантов напряженного и деформированного состояния. Верхний индекс c соответствует деформациям ползучести.

В векторной форме равенство (30) запишется в виде

$$\{d\epsilon\}^c = \Phi dt \{S\}. \quad (31)$$

Вектор приращения деформации ползучести коллинеарен вектору — дивiatorу напряжений.

Теории ползучести различаются определяющими параметрами. В теории течения [5, 7] принимают

$$\Phi = \Phi(\sigma_i, T, t); \quad (32)$$

в теории упрочнения [5, 7]

$$\Phi = \Phi(\sigma_i, T, \epsilon_{i*}^c), \quad (33)$$

где ϵ_{i*}^c — накопленная деформация ползучести.

Величина ϵ_{i*}^c определяется соотношениями (25), (26), в которые входят приращения деформаций ползучести*.

Пусть известна кривая ползучести (рис. 4) и определена скорость деформации ползучести

$$\xi = \frac{d\epsilon_0^c}{dt},$$

где ϵ_0^c — деформация ползучести при одноосном растяжении.

Применяя теорию течения при ползучести для случая простого растяжения, из уравнений (30) получим

$$\Phi = \frac{3}{2\sigma_i} \xi(\sigma_i, T, t). \quad (34)$$

Скорость ползучести определяется по времени нагружения. По теории упрочнения скорость ползучести зависит от накопленной деформации ползучести и

$$\Phi = \frac{3}{2\sigma_i} \xi(\sigma_i, T, \epsilon_{i*}^c), \quad (35)$$

где $\sigma_i = \sigma_0$, $\epsilon_{i*}^c = \epsilon_0^c$.

В зависимости (34) историю нагружения отражает время t , в уравнении (35) — накопленная деформация ползучести ϵ_{i*}^c . В расчетах используют также теорию старения, которая основана на изохронных кривых ползучести

$$\epsilon_0^c = f(\sigma_0),$$

аналогичных кривым деформирования материала. Эти кривые получают перестроением кривых ползучести при $T = \text{const}$, $t = \text{const}$. Расчет по теории старения аналогичен упруго-пластическому расчету. Основной недостаток теории старения — ограниченные возможности описания сложного нагружения.

* Соотношения для ϵ_{i*}^c получаются из равенств (25) и (26) заменой в них верхнего индекса p на c .

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ (ПРОСТОЕ НАГРУЖЕНИЕ)

Часто используют модель простого нагружения, при котором в каждой точке тела соотношения между компонентами напряжений в процессе нагружения остаются неизменными.

Использование такой модели не приводит к существенным погрешностям и в тех случаях, когда нагружение является монотонно возрастающим и главные направления тензора напряжений (или направления главных напряжений) остаются неизменными в процессе нагружения.

Определение напряжений и деформаций в элементах конструкций с учетом пластичности и ползучести связано с большими трудностями, так как расчетные соотношения оказываются нелинейными. Для линеаризации задачи можно использовать метод переменных параметров упругости и метод дополнительных деформаций.

Метод переменных параметров упругости основан на представлении зависимостей для упруго-пластического тела в форме уравнений упругости, в которых параметры упругости зависят от напряженного состояния и поэтому переменны в различных точках тела.

Соотношения деформационной теории пластичности (8) и (9) представим в обычном виде закона Гука

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_*} [\sigma_x - \nu_* (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T, \dots; \quad (36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu_*)}{E_*} \tau_{xy} \dots \quad (x, y, z),$$

где переменные параметры упругости зависят от напряженного состояния, т. е.

$$E_* = E \frac{3}{2(1+\nu)\psi + 1 - 2\nu}; \quad (37)$$

$$\nu_* = \frac{\psi(1+\nu) - (1-2\nu)}{2\psi(1+\nu) + 1 - 2\nu}, \quad (38)$$

здесь ψ — параметр пластичности, определяемый по формуле (11).

Учитывая уравнения (20), найдем

$$\psi = \frac{3}{2(1+\nu)} \frac{E}{E_c} \left(1 - \frac{1-2\nu}{3} \frac{E_c}{E_0} \right), \quad (39)$$

где $E_c = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ — секущий модуль кривой деформирования (при растяжении).

Внося (39) в соотношения (37) и (38), получим простые равенства

$$E_* = E_c;$$

$$\nu_* = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{E_c}{E} (1-2\nu) \right]. \quad (40)$$

Обычно влияние коэффициента Пуассона на напряженное и деформированное состояния невелико и во многих практических задачах можно положить

$$\nu_* = \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) = 0,5\nu + 0,25$$

или считать в упругой области $\nu_* = \nu$, а при наличии пластических деформаций $\nu_* = 0,5$. Так как параметр ψ или секущий модуль E_c заранее неизвестны, то при расчете используют процесс последовательных приближений. В первом приближении, считая материал упругим, при $E_{*(1)} = E$ и $\nu_* = \nu$ (где E и ν — модуль упругости и коэф-

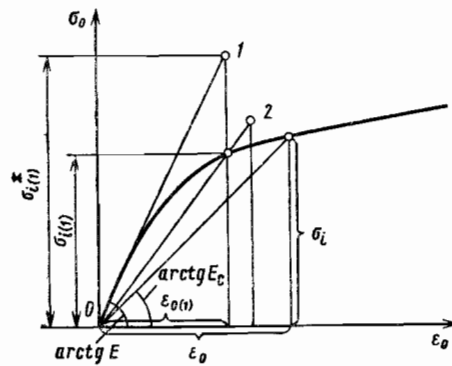


Рис. 5. Схема расчета по методу переменных параметров упругости

эффициент Пуассона материала, зависящие от температуры) решают упругую задачу, из которой находят $\sigma_{i(1)}^*$ (рис. 5) в каждой расчетной точке. В плоскости $\sigma_0 - \epsilon_0$ состояние первого приближения изображается точкой 1, лежащей на пересечении линии $\sigma_{i(1)}^*$ и луча, угол наклона которого равен $\text{arctg } E$. Этому состоянию соответствует эквивалентная деформация

$$\epsilon_{0(i)} = \frac{\sigma_{i(1)}^*}{E}$$

и секущий модуль

$$E_{c(i)} = \frac{\sigma_{i(1)}^*}{\epsilon_{0(i)}}$$

Во втором приближении полагают $E_{*(2)} = E_{c(1)}$;

$$\nu_{*(2)} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{E_{c(1)}}{E} (1 - 2\nu) \right]$$

и, решая ту же задачу при $E_{*(2)}$ и $\nu_{*(2)}$, находят новое состояние 2 и т. д. Расчет заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений.

При расчете с учетом деформации ползучести наиболее простая расчетная схема получается для теории старения. В этом случае также используют метод переменных параметров упругости, но для кривой деформирования, соответствующей времени t . Обычную кривую деформирования применяют для начального момента времени ($t = 0$).

Учет ползучести по теории течения или упрочнения проводят по этапам времени. На начальном этапе выполняют расчет по уравнению (36). Для нового этапа после времени Δt расчетные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{x1} &= \frac{1}{E_*} [\sigma_{x1} - \nu_* (\sigma_{y1} + \sigma_{z1})] + \alpha T + \epsilon_{x0}^c, \dots; \\ \gamma_{xy1} &= \frac{2(1+\nu_*)}{E_*} \tau_{xy1} + \gamma_{xy0}^c, \dots \quad (x, y, z), \end{aligned} \quad (41)$$

где $\epsilon_{x0}^c, \dots, \gamma_{xy0}^c$ — деформации ползучести, соответствующие напряженному состоянию в начале этапа нагружения.

Из уравнений (30) получим

$$\begin{aligned} \epsilon_{x0}^c &= \Phi_0 (\sigma_{x0} - \sigma_0) \Delta t_1, \dots; \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy0}^c &= \Phi_0 \tau_{xy0} \Delta t_1, \dots \quad (x, y, z), \end{aligned} \quad (42)$$

где функции Φ_0 находят из уравнений (34) или (35) при значениях определяющих параметров, соответствующих началу этапа нагружения ($\sigma_{i0}, T_0, t_0 = 0, \epsilon_{i*0}^c = 0$). Величины $\sigma_{x0}, \dots, \tau_{xy0}$ представляют собой напряжения в упругом материале при отсутствии деформаций ползучести.

Для следующего этапа нагружения уравнения «упругости» имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{x2} &= \frac{1}{E_*} [\sigma_{x2} - \nu_* (\sigma_{y2} + \sigma_{z2})] + \alpha T + \epsilon_{x1}^c, \dots; \\ \gamma_{xy2} &= \frac{2(1+\nu_*)}{E_*} \tau_{xy2} + \gamma_{xy1}^c, \dots \quad (x, y, z), \end{aligned}$$

где $\epsilon_{x1}^c, \dots, \gamma_{xy1}^c$ — деформации ползучести, накопленные к началу этапа нагружения,

$$\begin{aligned} \epsilon_{x1}^c &= \epsilon_{x0}^c + \Phi_1 (\sigma_{x1} - \sigma_1) \Delta t_2, \dots; \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy1}^c &= \frac{1}{2} \gamma_{xy0}^c + \Phi_1 \tau_{xy1} \Delta t_2, \dots \quad (x, y, z). \end{aligned}$$

Подобным образом рассчитывают остальные этапы нагружения. Длительность этапов выбирают настолько малой, что изменение напряженного состояния в результате ползучести незначительно.

Наиболее просто изложенный метод расчета можно применять в случае, когда пластические деформации отсутствуют, а деформации ползучести развиваются в упругом теле. Тогда во всех приближениях принимают $E_* = E, \nu_* = \nu$. Если уже на первом этапе нагружения ($t = 0$) возникают пластические деформации (напряжения превосходят предел текучести материала), то для расчета используют метод переменных параметров упругости. Этот метод применяют и для второго этапа нагружения, причем расчет считается достоверным, если в точках, в которых имела пластическая деформация в конце первого этапа нагружения, интенсивность напряжений увеличивается (точнее пластическая деформация возрастает). Если это условие не выполняется, то расчет проводят снова, причем в точках разгрузки принимают $E_* = E, \nu_* = \nu$. Аналогично осуществляется расчет последующих этапов нагружения.

Метод дополнительных деформаций. В этом методе, в отличие от метода переменных параметров упругости, деформация пластичности рассматривается как дополнительная (типа анизотропной температурой деформации). Основной в этом случае является обычная задача теории упругости с постоянными параметрами упругости, что существенно упрощает упругое решение. Однако структура процесса последовательных приближений оказывается несколько сложнее, чем в методе переменных параметров упругости.

Для деформационной теории пластичности основные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T + \epsilon_x^p, \dots; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} + \gamma_{xy}^p, \dots \quad (x, y, z), \end{aligned} \quad (43)$$

где дополнительная пластическая деформация

$$\begin{aligned} \epsilon_x^p &= \frac{1+\nu}{E} (\psi - 1) (\sigma_x - \sigma), \dots; \\ \gamma_{xy}^p &= \frac{2(1+\nu)}{E} (\psi - 1) \tau_{xy}, \dots \quad (x, y, z). \end{aligned} \quad (44)$$

Учитывая соотношения (8), равенства (44) можно записать в виде, часто более удобном для решения задач,

$$\begin{aligned} \epsilon_x^p &= \left(1 - \frac{1}{\psi} \right) (\epsilon_x - \epsilon), \dots; \\ \gamma_{xy}^p &= \left(1 - \frac{1}{\psi} \right) \gamma_{xy}, \dots \quad (x, y, z). \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь, как и ранее, под дополнительными деформациями понимается разность между действительными упруго-пластическими деформациями ϵ_x, \dots и их упругой частью ϵ_x^e, \dots

В первом приближении, которое совпадает с первым приближением в методе переменных параметров упругости, решается упругая задача при отсутствии дополнительных деформаций. Определяются значения компонентов напряжений $\sigma_{x(1)}, \dots, \tau_{xy(1)}, \dots$ и деформаций $\epsilon_{x(1)}, \dots, \gamma_{xy(1)}, \dots$, интенсивности напряжений $\sigma_{i(1)}$. В плоскости $\sigma_0 - \epsilon_0$ состоянию первого приближения соответствует точка 1 (рис. 6).

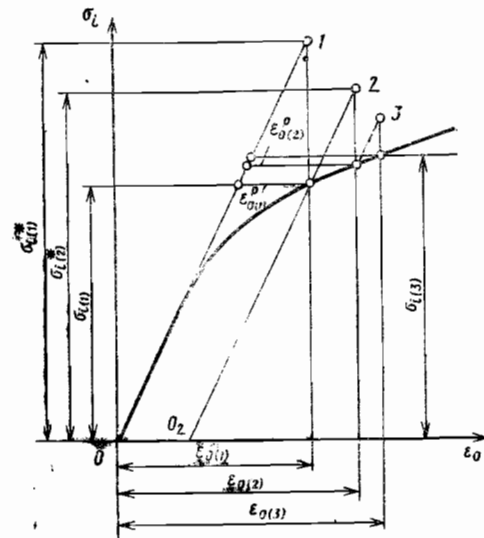


Рис. 6. Схема расчета по методу дополнительных деформаций

Значению $\sigma_{i(1)}^*$ соответствует эквивалентная деформация $\epsilon_{0(1)}$, и по кривой деформирования величина $\sigma_{i(1)}$ и параметр пластичности

$$\Psi_{(1)} = \frac{\sigma_{i(1)}^*}{\sigma_{i(1)}} \quad (46)$$

Далее находим дополнительные деформации

$$\begin{aligned} \epsilon_{x(1)}^p &= \left(1 - \frac{1}{\Psi_{(1)}}\right) (\epsilon_{x(1)} - \epsilon_{(1)}), \dots; \\ \gamma_{xy(1)}^p &= 2 \left(1 - \frac{1}{\Psi_{(1)}}\right) \gamma_{xy(1)}, \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Эквивалентная деформация при простом растяжении

$$\epsilon_{0(1)}^p = \left(1 - \frac{1}{\Psi_{(1)}}\right) \epsilon_{0(1)}$$

показана на рис. 6.

Во втором приближении рассматривается та же упругая задача, но при наличии дополнительных деформаций $\epsilon_{x(1)}^p, \dots, \gamma_{xy(1)}^p, \dots$

$$\epsilon_{x(2)} = \frac{1}{E} [\sigma_{x(2)} - \nu (\sigma_{y(2)} + \sigma_{z(2)})] + \alpha T + \epsilon_{x(1)}^p, \dots; \quad (48)$$

$$\gamma_{xy(2)} = \frac{1}{G} \tau_{xy(2)} + \gamma_{xy(1)}^p, \dots \quad (x, y, z).$$

В результате второго приближения находят новое состояние, характеризуемое компонентами напряжений $\sigma_{x(2)}^*, \dots, \tau_{xy(2)}^*, \dots$ и деформаций $\epsilon_{x(2)}, \dots, \gamma_{xy(2)}, \dots$. Этому состоянию в плоскости $\sigma_0 - \epsilon_0$ соответствует на рис. 6 точка 2, которая лежит на пересечении горизонтальной линии $\sigma_{i(2)}^*$ и наклонной линии O_2J , параллельной линии упругого нагружения O_1J и сдвинутой на величину $O_1O_2 = \epsilon_{0(1)}^p$.

Далее определяют

$$\epsilon_{0(2)} = \frac{\sigma_{i(2)}^*}{E} + \epsilon_{0(1)}^p, \quad (49)$$

а по кривой деформирования — $\sigma_{i(2)}$. Последующий порядок расчета аналогичен расчету первого приближения.

Подобным образом строят третье и последующие приближения, причем для всех приближений параметры упругости E, ν остаются неизменными.

Расчет заканчивают при достаточной близости двух соседних приближений. При необходимости учета деформаций ползучести используют изложенный выше метод. Для каждого этапа нагружения (по времени) в уравнения (48) добавляют деформации ползучести, накопленные к началу этапа. Эти деформации остаются неизменными в процессе последовательных приближений, используемых для нахождения деформаций пластичности на данном этапе.

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Для расчета напряженного и деформированного состояния элемента конструкции, нагружение разбивается на ряд этапов. В большинстве случаев оказывается целесообразным проводить расчленение по этапам действительной истории нагружения во времени. На каждом этапе нагружения должны удовлетворяться уравнения равновесия

$$\frac{\partial \Delta_k \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_k \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_k \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \Delta_k X = \rho \frac{\partial^2 \Delta_k u}{\partial t^2}, \dots \quad (x, y, z), \quad (50)$$

где $\Delta_k \sigma_x, \dots$ — приращение напряжений на k -м этапе нагружения; $\Delta_k X$ — приращение массовой силы; ρ — плотность материала; $\Delta_k u$ — приращения смещения по координате x .

Приращения напряжений должны удовлетворять граничным условиям

$$\Delta_k \sigma_x l + \Delta_k \tau_{xy} m + \Delta_k \tau_{xz} n = \Delta_k q_x, \dots \quad (x, y, z), \quad (51)$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали к элементу поверхности; $\Delta_k q_x$ — приращение составляющей по оси x поверхностной нагрузки на k -м этапе нагружения.

Используя модель материала в виде последовательного соединения моделей упругости, пластичности и ползучести (рис. 7) для приращений деформаций получим

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon^e\} + \{d\epsilon^p\} + \{d\epsilon^c\}, \quad (52)$$

где вектор приращения деформаций

$$\{d\epsilon\} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \\ \frac{1}{2} d\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} d\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} d\gamma_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (53)$$

Учитывая соотношения для приращений деформаций упругости, пластичности и ползучести, найдем

$$\{d\epsilon\} = [a]^e \{d\sigma\} + F_\sigma(\sigma_i, T) \{S\} d\sigma_i + \{\Phi_T\} dT + \{\Phi_c\} dt, \quad (54)$$

где вектор температурных деформаций

$$\{\Phi_T\} = \left\{ \frac{d(\alpha T)}{dT} \right\} + \left(\frac{d}{dT} [a]^e \right) \{\sigma\} + F_T(\sigma_i, T) \{S\} \quad (55)$$

и вектор скоростей деформации ползучести

$$\{\Phi_c\} = \Phi \{S\}. \quad (56)$$

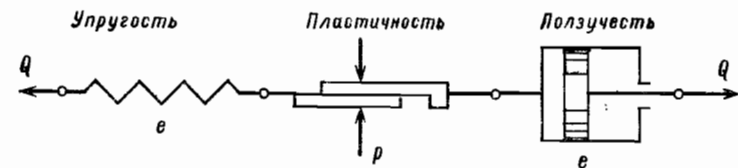


Рис. 7. Модель материала

В равенстве (54) первое слагаемое выражает приращение деформации упругости в связи с ростом напряжений, второе — подобное приращение деформации пластичности, третье — увеличение деформаций, вызванное повышением температуры, последнее — приращение деформаций ползучести. Вектор температурных деформаций состоит из трех векторов. Первый учитывает обычную температурную деформацию, второй и третий — влияние температуры на упругие и пластические свойства материала.

Функции $F_{\sigma}(\sigma_i, T)$ и $F_T(\sigma_i, T)$ в случае разгрузки принимают равными нулю.

Для расчета можно использовать метод переменных параметров упругости или метод дополнительных деформаций.

В методе переменных параметров упругости уравнение (54) записывают в форме

$$\{d\epsilon\} = [a] \{d\sigma\} + \{\varphi_T\} dT + \{\varphi_c\} dt, \quad (57)$$

где

$$[a] = [a]^e + [a]^p. \quad (58)$$

Для этого надо представить второе слагаемое в равенстве (54) в виде

$$F_{\sigma}(\sigma_i, T) \{S\} d\sigma_i = [a]^p \{d\sigma\}. \quad (59)$$

Учитывая, что

$$d\sigma_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \dots + \frac{\partial \sigma_i}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \dots \quad (60)$$

или

$$d\sigma_i = \frac{3}{2} \frac{\sigma_x - \sigma}{\sigma_i} d\sigma_x + \dots + \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} d\tau_{xy} + \dots \quad (61)$$

и сопоставляя однородные члены в равенстве (59), найдем элементы симметричной матрицы $[a]^p$ размерности 6×6 :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3F_{\sigma}}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma)^2, \dots, & a_{16} &= \frac{3F_{\sigma}}{2\sigma_i} 2\tau_{zx} (\sigma_x - \sigma), \dots; \\ a_{21} &= a_{12}; & a_{22} &= \frac{3F_{\sigma}}{2\sigma_i} (\sigma_y - \sigma)^2, \dots; & a_{26} &= \frac{3F_{\sigma}}{2\sigma_i} 2\tau_{zx} (\sigma_y - \sigma), \dots; \\ a_{31} &= \frac{3F_{\sigma}}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma) \tau_{xy}, \dots; & a_{36} &= \frac{3F_{\sigma}}{2\sigma_i} 2\tau_{zx} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (62)$$

Уравнения (57) соответствуют анизотропному упругому телу с дополнительными деформациями, параметры упругости зависят от напряженного состояния. Интегрируя соотношение (57) по времени для k -го этапа нагружения, получим

$$\{\Delta_k \epsilon\} = \langle [a] \rangle \{\Delta_k \sigma\} + \langle \{\varphi_T\} \rangle \Delta T + \langle \{\varphi_c\} \rangle \Delta t, \quad (63)$$

где угловые скобки означают среднее значение.

При расчете используют процесс последовательных приближений. В первом приближении полагают

$$\langle [a] \rangle = [a]_{k-1} = [a]_{k-1}^e + [a]_{k-1}^p, \quad (64)$$

т. е. принимают параметры упругости, соответствующие напряженному и деформированному состоянию в конце предшествующего этапа нагружения. Принимают сначала, что характер нагружения (нагрузка или разгрузка) остается таким же, как и на предшествующем этапе. Аналогичное предположение принимают для векторов

$$\langle \{\varphi_T\} \rangle = \{\varphi_T\}_{k-1}, \quad \langle \{\varphi_c\} \rangle = \{\varphi_c\}_{k-1}. \quad (65)$$

Далее проводят расчет k -го этапа нагружения анизотропного упругого тела с заданными дополнительными деформациями. После расчета проверяют условия

возникновения пластической деформации:

$$\sigma_{i(k)} = \sigma_T(T_k, \epsilon_{i*}^p(k)); \quad (66)$$

$$\Delta_k \sigma_i > \frac{\partial \sigma_i}{\partial T} \Delta_k T, \quad (67)$$

где $\sigma_{i(k)}$ — интенсивность напряжений в конце k -го этапа нагружения; $\sigma_T(T_k, \epsilon_{i*}^p(k))$ — предел текучести, соответствующий температуре T_k и накопленной интенсивности пластической деформации в конце k -го этапа нагружения; $\Delta_k T = T_{(k)} - T_{(k-1)}$ — приращение температуры на k -м участке нагружения; $\Delta_k \sigma_i = \sigma_{i(k)} - \sigma_{i(k-1)}$ — приращение интенсивности напряжений.

Если характер нагружения на k -м этапе остается таким же, как в предыдущем ($k-1$)-м, то корректировка значения $[a]_{k-1}$ не требуется. Если на k -м этапе предполагали нагружение, но после расчета условия (66) и (67) оказались не выполненными, то расчет этапа следует провести заново, положив

$$[a]_{k-1} = [a]_{k-1}^e. \quad (68)$$

Если в k -м этапе предполагали разгрузку [использовали соотношение (68)], но в действительности было нагружение, то расчет следует провести заново, принимая $[a]_{k-1}$ по равенству (64).

В результате рассмотренной процедуры в первом приближении устанавливают приращение напряжений и деформаций на k -м этапе и значение $[a]_k$.

Если принятые вначале величины $[a]_{k-1}$ и полученные после расчета значения $[a]_k$ достаточно близки, то расчет этапа заканчивают и приступают к следующему шагу. Если расхождение параметров упругости велико, полагают

$$\langle [a] \rangle = \frac{1}{2} ([a]_{k-1} + [a]_k) \quad (69)$$

и проводят расчет второго приближения.

Расчет k -го этапа заканчивают при достаточной близости двух соседних приближений, после чего приступают к расчету следующего ($k+1$)-го этапа. При проведении расчетов подобным образом уточняют значения $\{\varphi_T\}$ и $\{\varphi_c\}$.

В методе дополнительных деформаций соотношения (54) представляют в форме

$$\{d\epsilon\} = [a]^e \{d\sigma\} + \{d\epsilon\}^p + (\{\varphi_T\}^e + \{\varphi_T\}^p) dT + \{\varphi_c\} dt, \quad (70)$$

где вектор дополнительной деформации

$$\{d\epsilon\}^p = F_{\sigma}(\sigma_i, T) \{S\} d\sigma_i. \quad (71)$$

Вектор температурной деформации в упругом материале

$$\{\varphi_T\}^e = \left\{ \frac{d(\alpha T)}{dT} \right\} + \left(\frac{d}{dT} [a]^e \right) \{\sigma\}. \quad (72)$$

Вектор температурной деформации, связанный с пластическими деформациями,

$$\{\varphi_T\}^p = F_T(\sigma_i, T) \{S\}. \quad (73)$$

Интегрируя соотношение (70) по времени для k -го этапа нагружения, получим

$$\begin{aligned} \{\Delta_k \epsilon\} &= \langle [a]^e \rangle \{\Delta_k \sigma\} + \langle F_{\sigma}(\sigma_i, T) \{S\} \rangle \Delta_k \sigma_i + \\ &+ (\langle \{\varphi_T\}^e \rangle + \langle \{\varphi_T\}^p \rangle) \Delta T + \langle \{\varphi_c\} \rangle \Delta t. \end{aligned} \quad (74)$$

Основная трудность расчета состоит в том, что приращение пластической деформации (второе слагаемое правой части) заранее неизвестно и находится в процессе последовательных приближений.

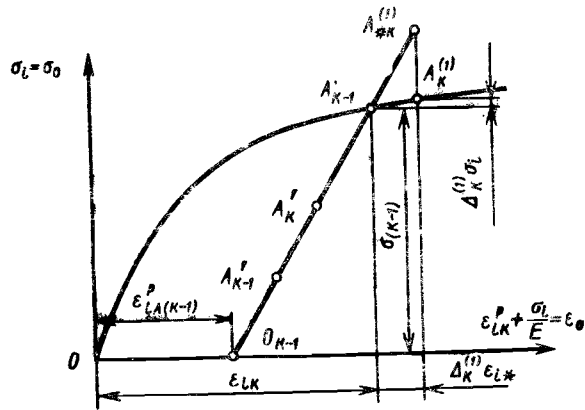


Рис. 8. Схема расчета по методу дополнительных деформаций при сложном нагружении

Процесс деформирования будем рассматривать в координатах σ_0, ϵ_0 (рис. 8), причём накопленная интенсивность деформации

$$\epsilon_{i*} = \epsilon_{i*}^p + \frac{\sigma_i}{E} \quad (75)$$

Обобщенная кривая деформирования представляет собой обычную кривую деформирования при растяжении образцов, так как для этого случая

$$\sigma_i = \sigma_0; \quad (76)$$

$$\epsilon_{i*} = \epsilon_0^p + \frac{\sigma_0}{E} = \epsilon_0.$$

Для расчета необходимо иметь сетку кривых деформирования при различных температурах (термомеханическую поверхность деформирования). В первом приближении проводят расчет напряжений и деформаций, предполагая материал упругим, а дополнительные деформации отсутствующими. Далее считают, что из расчета предшествующего этапа известны величины $\epsilon_{i*}^p(k-1), \sigma_{T(k-1)} = \sigma_T(T_{k-1}, \epsilon_{i*}^p(k-1))$ и, следовательно, положение изображающей точки A_{k-1} на кривой деформирования при $T = T_{k-1}$. Если точка A_{k-1} находится внутри отрезка $O_{k-1} A_{k-1}$, например, A_{k-1}' , то первое приближение завершает расчет. Рассмотрим поэтому случай, когда точка A_{k-1} расположена на кривой деформирования и $\sigma_{T(k-1)} = \sigma_{T(k-1)}$ (рис. 8).

При расчете первого приближения значения $[a]^e, \{\varphi_T\}^e, \{\varphi_c\}$ принимают соответствующими точке $A_{(k-1)}$.

После проведения расчета проверяют выполнение условия нагружения (67). Если имеет место нагружение, то определяют величину $\Delta_k^{(1)} \epsilon_{i*}$ — интенсивность приращений деформаций, полученных из уравнения (74).

Полагая

$$\Delta_k^{(1)} \sigma_i = E_{k(k-1)}, \Delta_k^{(1)} \epsilon_{i*},$$

где $E_{k(k-1)}$ — касательный модуль в точке A_{k-1} , проводят расчет второго приближения, в котором дополнительную пластическую деформацию считают равной

$$\langle [F_\sigma(\sigma_i, T)] \{S\} \rangle \Delta_k^{(1)} \sigma_i.$$

В расчете принимают среднее значение функции $F_\sigma(\sigma_i, T)$ по ее значениям для точек A_{k-1} и $A_k^{(1)}$.

При наличии пластической деформации учитывают также дополнительную температурную деформацию

$$\langle \{\varphi_T\}^p \rangle dT.$$

Подобным образом проводят расчет следующего приближения. Расчет заканчивают при достаточной близости двух соседних приближений. В результате расчета находят приращение напряжений и деформаций на k -м этапе нагружения, вектора напряжений и деформаций в конце этапа нагружения, значения $\sigma_{i(k)}, \epsilon_{i*}^p(k)$. Для начала расчета следующего $(k+1)$ -го этапа точку A_k (при заданных значениях $\epsilon_{i*}^p(k), T_k$) переносят на кривую деформирования, соответствующую температуре T_k . Расчет $(k+1)$ -го этапа проводят по указанной выше процедуре.

Пример. Рассмотрим задачу об упруго-пластическом изгибе стержня прямоугольного сечения при $M_H = 1600$ кгс·см. Стержень (рис. 9) изготовлен из стали 30ХГСА, кривая деформирования приведена на рис. 10.

Расчет по методу переменных параметров упругости выполним по схеме, описанной выше. Напряжения изгиба в стержне

$$\sigma = Ey \frac{M}{F} \quad (77)$$

В первом приближении материал принимаем упругим, и при $E = \text{const}$

$$\sigma_{(1)}^* = \frac{My}{J_x}; \quad (78)$$

$$\epsilon_{(1)} = \frac{\sigma_{(1)}^*}{E}. \quad (79)$$

Деформации $\epsilon_{(1)}$ в каждой точке стержня соответствует по кривой деформирования напряжение $\sigma_{(1)}$ (табл. 1, рис. 10) и модуль упругости

$$E_{c(1)} = \frac{\sigma_{(1)}}{\epsilon_{(1)}}. \quad (80)$$

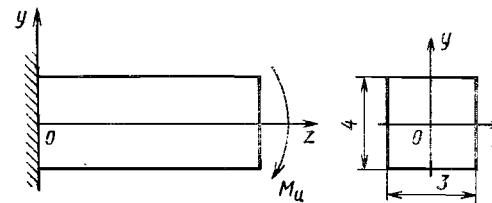


Рис. 9. Расчетная схема задачи

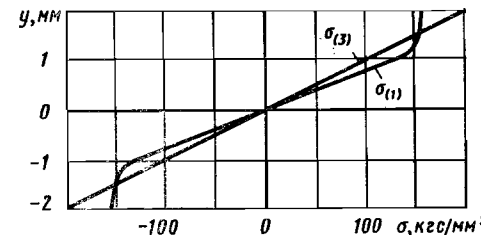


Рис. 11. Распределение напряжений в поперечном сечении стержня при изгибе

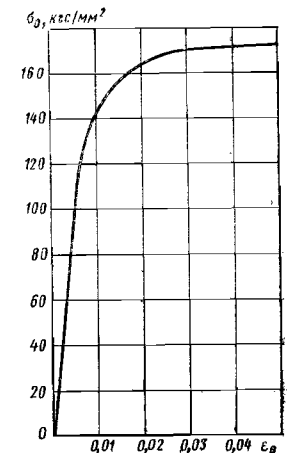


Рис. 10. Кривая деформирования

1. Последовательность и результаты расчета напряжений в стержне по методу переменных параметров упругости

y	$\sigma_{(1)}^*$	$\epsilon_{(1)} \cdot 10^2$	$\sigma_{(1)}$	$E_{\#(1)} \cdot 10^{-4}$	y^2	$E_{\#(1)} y^2 \cdot 10^{-4}$	$\sigma_{(2)}^*$	$\sigma_{(2)}$	$\epsilon_{(2)} \cdot 10^2$	$E_{\#(2)} \cdot 10^{-4}$	$E_{\#(2)} y^2 \cdot 10^{-4}$	$\sigma_{(3)}^*$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	25	0,125	25	2	0,0625	0,125	28,7	25	0,125	2	0,125	31
0,5	50	0,25	50	2	0,25	0,5	57,7	50	0,25	2	0,5	62
0,75	75	0,375	75	2	0,56	1,12	86,5	75	0,375	2	1,12	93
1,0	100	0,5	100	2	1,0	2,0	115	100	0,5	2	2,0	128
1,25	125	0,625	123	1,9	1,56	2,96	137	133	0,625	1,96	3,06	151
1,5	150	0,75	135	1,8	2,25	4,05	155	139	0,85	1,64	3,7	182
1,75	175	0,875	140	1,6	3,06	4,9	161	143	1,0	1,43	4,87	194
2,0	200	1	145	1,45	4	5,81	167	150	1,20	1,25	5,0	155

Примечание. y в мм, σ и E в кгс/мм².

2. Последовательность и результаты расчета напряжений в стержне по методу дополнительных деформаций

y	$\sigma_{(1)}^*$	$\sigma_{(1)}$	$\epsilon_{(1)} \cdot 10^2$	$\epsilon_{(1)}^e \cdot 10^2$	$\epsilon_{(1)}^p \cdot 10^2$	$\epsilon_{(1)}^p/E$	$\sigma_{(2)}^*$	$\sigma_{(2)}$	$\epsilon_{(2)}^e \cdot 10^2$	$\epsilon_{(2)}^p \cdot 10^2$	$\epsilon_{(2)}^p/E$	$\sigma_{(3)}^*$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	25	25	0,125	0,125	0	0	28,45	25	0,1422	0	0	30,35
0,50	50	50	0,250	0,250	0	0	56,9	50	0,2845	0	0	60,7
0,75	75	75	0,375	0,375	0	0	85,35	85,35	0,4268	0	0	91,05
1,00	100	100	0,5	0,5	0	0	113,8	113,8	0,5690	0	0	123,4
1,25	123	123	0,65	0,615	0,035	7	135,25	129	0,6762	0,0662	13,24	146,5
1,50	135	135	0,75	0,675	0,075	15	155,7	135	0,7785	0,1110	22,2	150,05
1,75	140	140	0,875	0,7	0,175	35	164,2	144	0,821	0,276	55,2	150,2
2,00	145	145	1	0,725	0,275	55	172,5	146	0,863	0,408	81,6	152,4

Примечание. y в мм, σ и E в кгс/мм².

Во втором приближении

$$\sigma_{(2)}^* = E_{c(1)} y \frac{M}{\frac{h}{2}}; \tag{81}$$

$$2b \int_0^{\frac{h}{2}} E_{c(1)} y^2 dy$$

$$\epsilon_{(2)} = \frac{\sigma_{(2)}^*}{E_{c(1)}}. \tag{82}$$

Далее найдем $\sigma_{(2)}$ и $E_{c(2)}$ и перейдем к следующему приближению.

В табл. 1 приведены результаты расчета напряжений в поперечном сечении стержня. На рис. 11 показано распределение напряжений по сечению стержня в первом и третьем приближениях. При расчете принимали, что кривые деформирования при растяжении и сжатии одинаковы.

Расчет по методу дополнительных деформаций также выполним по схеме, описанной выше. Напряжения изгиба в стержне при введении в расчет дополнительных деформаций вычислим по соотношению

$$\sigma = E \left[y \frac{M_x}{F \int y^2 E dF} + y \frac{F \int E y \epsilon^p dF}{F \int E y^2 dF} - \epsilon^p \right]. \tag{83}$$

Учитывая, что в рассматриваемом методе основной является упругая задача, при $E = \text{const}$ запишем

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x} + E y \frac{F \int \epsilon^p y dF}{J_x} - E \epsilon^p, \tag{84}$$

В первом приближении принимаем, что $\epsilon^p = 0$ и

$$\sigma_{(1)}^* = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \epsilon_{(1)} = \frac{\sigma_{(1)}^*}{E}.$$

Деформации $\epsilon_{(1)}$ соответствует по кривой деформирования напряжение $\sigma_{(1)}$ (табл. 2) и упругая часть деформации

$$\epsilon_{(1)}^e = \frac{\sigma_{(1)}}{E}. \tag{85}$$

Дополнительная деформация в каждой точке сечения

$$\epsilon_{(1)}^p = \epsilon_{(1)} - \epsilon_{(1)}^e = \frac{\sigma_{(1)}^*}{E} - \frac{\sigma_{(1)}}{E}. \tag{86}$$

Во втором приближении

$$\sigma_{(2)}^* = \sigma_{(1)}^* + \frac{2Eby}{J_x} \int_0^{\frac{h}{2}} \epsilon_{(1)}^p(y) y dy - E \epsilon_{(1)}^p(y); \tag{87}$$

$$\epsilon_{(2)}^* = \frac{\sigma_{(2)}^*}{E}. \tag{88}$$

Далее найдем $\sigma_{(2)}$, $\epsilon_{(2)} = \epsilon_{(2)}^* + \epsilon_{(1)}^p$, $\epsilon_{(2)}^e$ и $\epsilon_{(2)}^p$ и перейдем к третьему приближению. Расчет закончим при малой разности между $\sigma_{(i)}^*$ и $\sigma_{(i)}$.

Существенное достоинство этого метода решения состоит в том, что упругая задача решается лишь один раз, что позволяет значительно сократить длительность расчета при численном решении задач упругости, пластичности и ползучести. В табл. 2 приведены результаты расчета напряжений в поперечном сечении стержня.

Из сравнения данных, приведенных в табл. 1 и 2, следует, что оба метода расчета приводят практически к одинаковым результатам.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ДЕТАЛЯХ МАШИН

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При проектировании и оценке прочности деталей, работающих при переменных нагрузках и температурах, необходимо особое внимание уделять зонам концентрации напряжений и деформаций — источникам образования трещин, приводящих к преждевременному разрушению деталей.

Концентрацией напряжений (деформаций) принято называть резкое местное изменение поля напряжений (деформаций), вызываемое:

- а) конструктивными факторами — изменением размеров сечений и формы деталей (выточки, галтели, отверстия, пазы, канавки и т. п.);
- б) условиями внешних воздействий (силовых, например контактных и т. п., а также температурных);
- в) технологическими факторами (трещинами технологического происхождения от литья, сварки и т. п.).

Существенная особенность явления концентрации напряжений состоит в том, что в зоне концентратора часто образуется сложное напряженное состояние (даже при одноосном напряженном состоянии на невозмущенной границе области). Зона возмущения поля напряжений обычно невелика, однако, как показывает практика, концентрация напряжений снижает прочность деталей, работающих при переменных нагрузках и в условиях повышенных температур. Детали из хрупких материалов (например, из высокопрочных сталей) могут разрушаться преждевременно и при статических нагрузках. Ниже рассмотрена концентрация напряжений в элементах конструкций, обусловленная конструктивными факторами.

Концентрацию напряжений принято оценивать теоретическим коэффициентом концентрации напряжений α , равным отношению напряжения при наличии концентратора к напряжению в той же точке при отсутствии концентратора.

Если деталь работает при простом напряженном состоянии на границе невозмущенной области, то

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}; \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{ном}}}, \quad (1)$$

где σ_{\max} , τ_{\max} — соответственно максимальные местные нормальное и касательное напряжения, вычисленные методами теории упругости или определенные экспериментально; $\sigma_{\text{ном}}$, $\tau_{\text{ном}}$ — номинальные нормальные и касательные напряжения, найденные без учета возмущения напряжений (обычно по формулам сопротивления материалов).

Для деталей, работающих в условиях сложного напряженного состояния (на границах невозмущенной области),

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{i \max}}{\sigma_{i \text{ ном}}}, \quad (2)$$

где $\sigma_{i \max}$ и $\sigma_{i \text{ ном}}$ — интенсивность максимального местного и номинального напряжения в точке тела.

Для оценки прочности, особенно при циклических нагружениях, важное значение имеет теоретический коэффициент концентрации деформаций

$$\alpha_\epsilon = \frac{\epsilon_{i \max}}{\epsilon_{i \text{ ном}}}. \quad (3)$$

В ряде случаев для оценки сопротивления разрушению помимо коэффициентов концентрации напряжений (деформаций) используют градиент напряжений (де-

* Кроме теоретического коэффициента часто используют эффективный, характеризующий прочность конкретного материала в условиях концентрации напряжений (см. гл. 31).

формаций) — быстроту затухания напряжений (деформаций) по мере удаления от концентратора. Градиент напряжений (деформаций) находят как отношение приращения величины напряжений (деформаций) в двух соседних точках к расстоянию между ними.

Расчет концентрации напряжений производят часто методами теории упругости (с использованием теории аналитических функций и аппарата конформного отображения). В последние годы получили развитие и широкое применение численные методы теории упругости*, позволяющие эффективно решать задачи расчета концентрации напряжений и деформаций в элементах конструкций в условиях упругости, пластичности и ползучести.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОТВЕРСТИЙ

Многие элементы конструкций имеют отверстия конструктивного или технологического назначения.

При одноосном (в одном направлении) растяжении пластинки большой ширины ($b > 5d$) с круглым отверстием (рис. 1, а) в точках на контуре отверстия возникают нормальные напряжения

$$\sigma_\theta = (1 - 2 \cos 2\theta) p, \quad (4)$$

где угол θ отсчитывается от оси x к оси y ; p — напряжение растяжения на стороне пластинки.

* См. гл. 26.

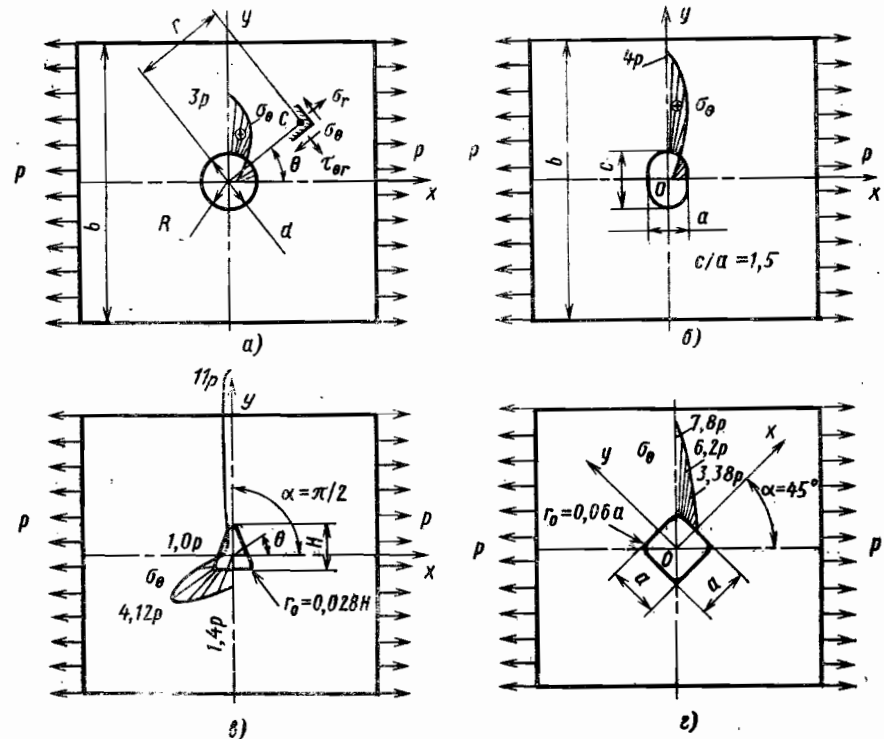


Рис. 1. Распределение напряжений в пластинках с отверстиями различной формы

В некоторой точке C , удаленной от центра отверстия на расстояние r (см. рис. 1, а), при $\rho = d/2r$

$$\sigma_r = [(1 - \rho^2) + (1 - 4\rho^2 + 3\rho^4) \cos 2\theta] \frac{p}{2};$$

$$\sigma_\theta = [(1 + \rho^2) - (1 + 3\rho^4) \cos 2\theta] \frac{p}{2};$$

$$\tau_{r\theta} = [(1 + 2\rho^2 - 3\rho^4) \sin 2\theta] \frac{p}{2}.$$

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают соответственно в точках пересечения контура отверстия с осью y ($\sigma_{\max} = 3p$) и с осью x ($\sigma = -p$), а коэффициент концентрации напряжений

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{p} = 3. \quad (6)$$

Если пластина большой ширины имеет эллиптическое отверстие (рис. 1, б) и растягивается в направлении оси x , то

$$\alpha_\sigma = 1 + 2 \frac{c}{a}. \quad (7)$$

Эллиптические отверстия выгодно располагать так, чтобы большая ось эллипса была параллельна действующему усилию.

В пластинах с треугольным (рис. 1, в) и квадратным (рис. 1, г) отверстиями высокая концентрация напряжений имеет место вблизи углов отверстий.

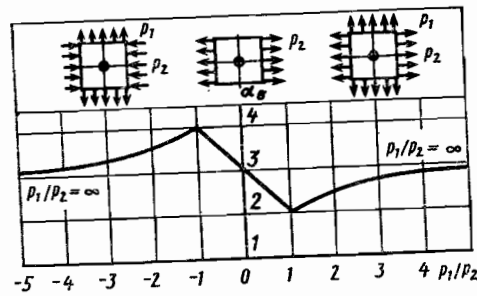


Рис. 2. Зависимость α_σ от отношения напряжений на границе невозмущенной области пластины с круглым отверстием

жения на контуре будут одинаковыми во всех точках. Такая концентрация напряжений типична для дисков компрессоров, где часто в полотно имеются отверстия для стяжных болтов, пропускающие охлаждающего воздуха и т. д.

Большой практический интерес представляет случай действия на границе невозмущенной области пластины с отверстием растягивающих и сжимающих напряжений (см. рис. 2). Концентрация напряжений в этом случае также зависит от соотношения p_1 и p_2 . Такой случай встречается в дисках газовых и паровых турбин, где при большом градиенте температур окружающие напряжения могут быть сжимающими, хотя радиальные напряжения растягивающие. Аналогичное напряженное состояние, хотя с равными нагрузками в невозмущенной области ($p_1 = -p_2$) имеет место при кручении полых валов трансмиссии двигателей. Теоретический коэффициент кон-

центрации напряжений в этом случае имеет наибольшее значение $\alpha_\sigma = 4,0$ (см. рис. 2). На рис. 3 приведены зависимости теоретического коэффициента концентрации напряжений от отношений b/a при различных случаях нагружения пластины больших размеров с двумя одинаковыми отверстиями.

Изменение теоретического коэффициента концентрации напряжений в пластинках, ослабленных рядом отверстий, при различных условиях нагружения показано на рис. 4.

При двухосном растяжении пластины больших размеров ($b > 5a$), ослабленной отверстием диаметром d , концентрация напряжений снижается и зависит от соотношения p_1 и p_2 на невозмущенной границе области (рис. 2). При $p_1 = p_2 = p$ ($p_1/p_2 = 1$) теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha_\sigma = 2$, и нормальные напря-

1. Значения α_σ для пластины с прямоугольным отверстием

$\frac{c}{a}$	r_0/c									
	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
1,0	4,8	4,2	3,8	3,5	3,4	3,1	2,9	2,9	2,9	3,0
1,5	4,6	4,1	3,7	3,4	3,3	3,0	2,8	2,7	2,6	2,5
2,0	4,5	4,0	3,6	3,4	3,2	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3
2,5	4,4	3,9	3,5	3,3	3,1	2,9	2,6	2,4	2,3	2,2
3,0	4,3	3,8	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,3	2,2	2,1
3,5	—	3,8	3,4	3,2	3,0	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1
4,0	—	3,7	3,4	3,1	2,9	2,7	2,5	2,3	2,1	2,1
5,0	—	3,7	3,3	3,1	2,9	2,7	2,4	2,2	2,1	2,0

Примечание. a, c — стороны прямоугольного отверстия; r_0 — радиус скругления вершин.

центрации напряжений в этом случае имеет наибольшее значение $\alpha_\sigma = 4,0$ (см. рис. 2).

На рис. 3 приведены зависимости теоретического коэффициента концентрации напряжений от отношений b/a при различных случаях нагружения пластины больших размеров с двумя одинаковыми отверстиями.

Изменение теоретического коэффициента концентрации напряжений в пластинках, ослабленных рядом отверстий, при различных условиях нагружения показано на рис. 4.

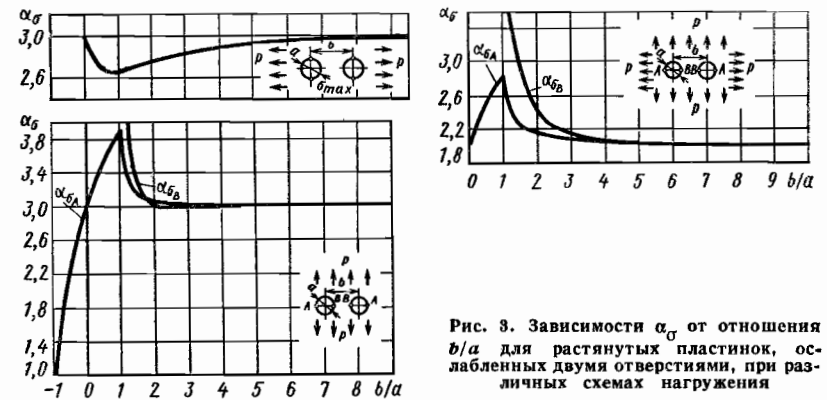


Рис. 3. Зависимость α_σ от отношения b/a для растянутых пластинок, ослабленных двумя отверстиями, при различных схемах нагружения

При растяжении полосы конечной ширины теоретический коэффициент концентрации напряжений снижается (рис. 5) при увеличении диаметра отверстия (или уменьшении ширины пластины), что связано с увеличением номинальных напряжений в наиболее нагруженном сечении

$$\sigma_{\text{ном}} = \frac{pb}{b-a}. \quad (8)$$

Приведенные значения коэффициентов концентрации можно использовать при расчете перфорированных колец (например, сепараторов шарикоподшипников и др.). Зависимости теоретического коэффициента концентрации напряжений от отношения основных размеров полосы, ослабленной смещенным от оси симметрии отверстием, даны на рис. 6.

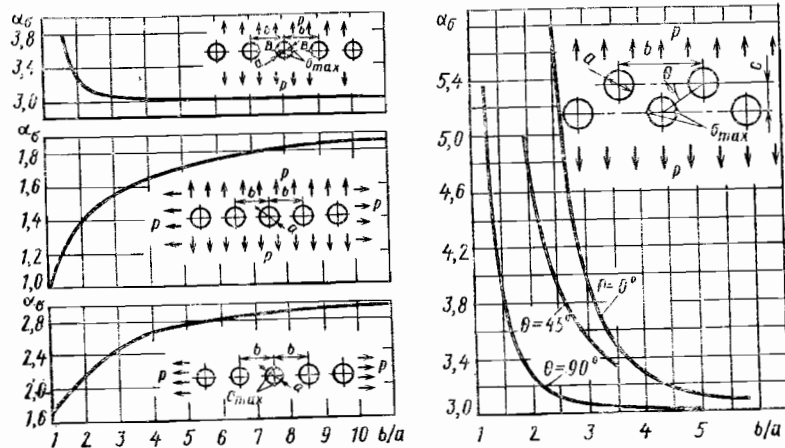


Рис. 4. Зависимости α_σ от отношения b/a для пластинок, ослабленных рядом отверстий, при различных схемах нагружения

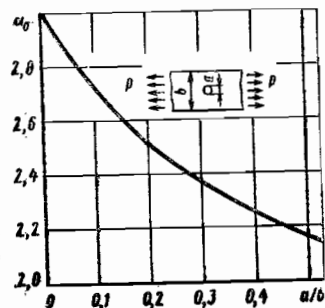


Рис. 5. Зависимости α_σ от отношения a/b для пластинок конечной ширины с отверстием

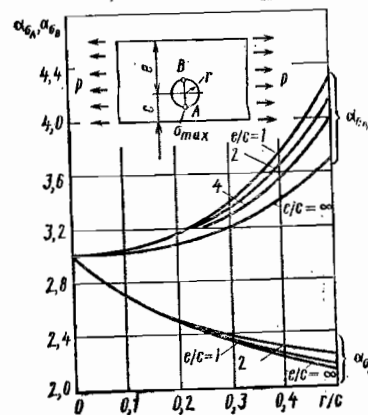
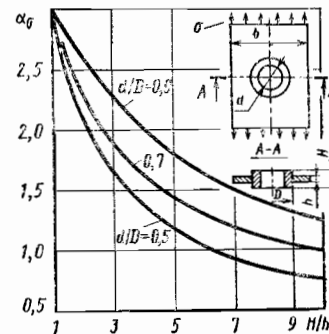


Рис. 6. Зависимости α_σ от отношения r/c для пластинок с эксцентричным отверстием

Рис. 7. Зависимости α_σ от отношения H/h для пластинок с подкрепленным отверстием



Для снижения концентрации напряжений в пластинках на практике иногда подкрепляют отверстия жесткими* впаиваемыми втулками или кольцами, а также втулками из основного материала, но большей толщины. На рис. 7 приведены зависимости коэффициента концентрации напряжений в пластинке от толщины H и диаметра D подкрепляющего кольца.

Кривые на рис. 7 можно использовать для приближенных расчетов в тех случаях, когда $\frac{H}{h} < 6$ и $E_k = E_0 \frac{H}{h}$; $\nu_k = \nu_0$, где E_k и ν_k — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материала подкрепляющего кольца.

На практике встречаются случаи цилиндрического изгиба пластинок большой ширины ($b > 5d$) с отверстием. Значения теоретического коэффициента концентрации напряжений в этом случае можно определить по рис. 8, а; в случае изгиба вала с отверстием — по рис. 8, б.

Более подробно концентрация напряжений около отверстий рассмотрена в работах [1, 2, 4].

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВЫТОЧКАХ И ГАЛТЕЛЯХ

На рис. 9 приведены эпюры нормальных напряжений (осевых σ_z , окружных σ_θ и радиальных σ_r) в наиболее нагруженном сечении растянутого стержня с кольцевой выточкой. Для плоского образца такой же формы наибольшие напряжения в сечении выточки на 20—30% выше, чем для осесимметричного (из-за отсутствия кольцевых напряжений).

* Из материала с большим модулем упругости, чем основной материал пластинок.

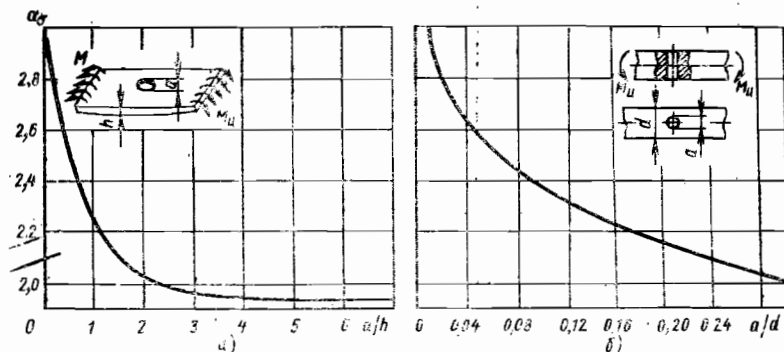


Рис. 8. Зависимости α_σ от отношения a/h для пластинки (а) и от отношения a/d для вала (б) с поперечным отверстием

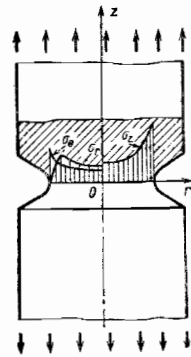


Рис. 9. Распределение напряжений в стержне с кольцевой выточкой

Рис. 10. Зависимости α_σ от основных размеров для пластинок (а) и стержней (б) при растяжении

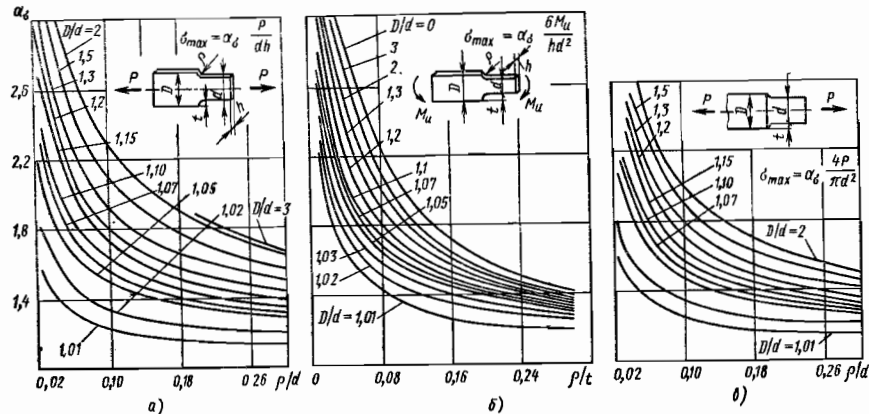
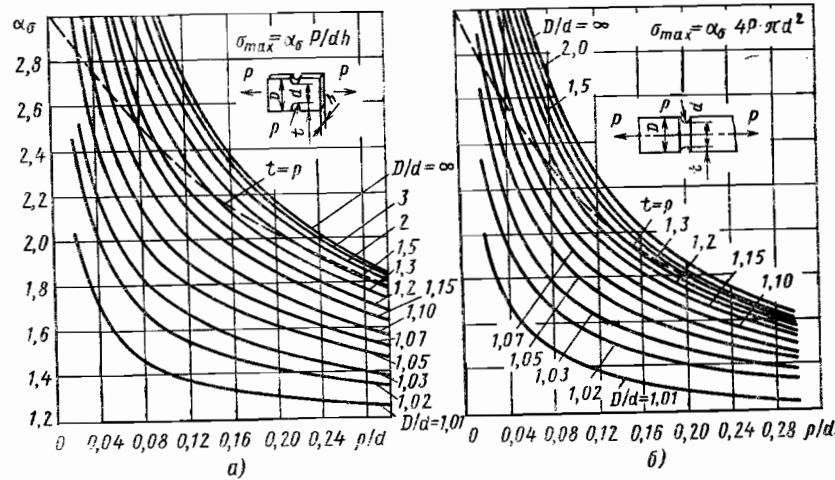


Рис. 11. Зависимости α_σ от основных размеров для пластинок при растяжении (а) и изгибе (б) и для стержней при растяжении (в)

На рис. 10—13 показаны зависимости теоретического коэффициента концентра-

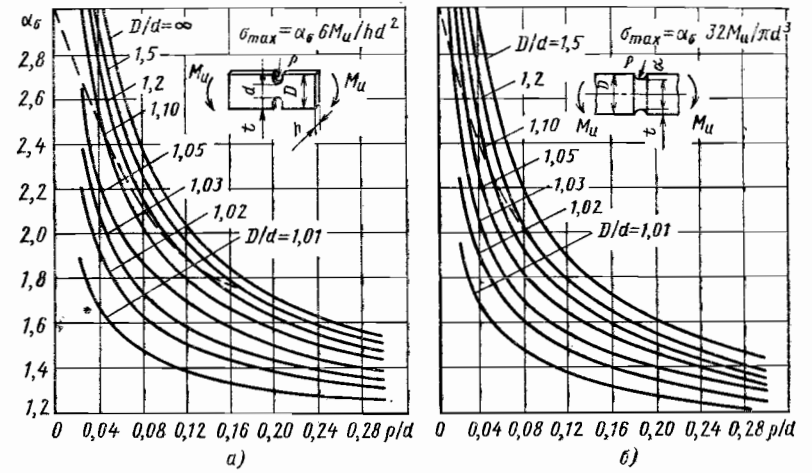


Рис. 12. Зависимости α_σ при изгибе симметричной ступенчатой пластины с выточками (а) и ступенчатого вала с канавкой (б) от основных размеров

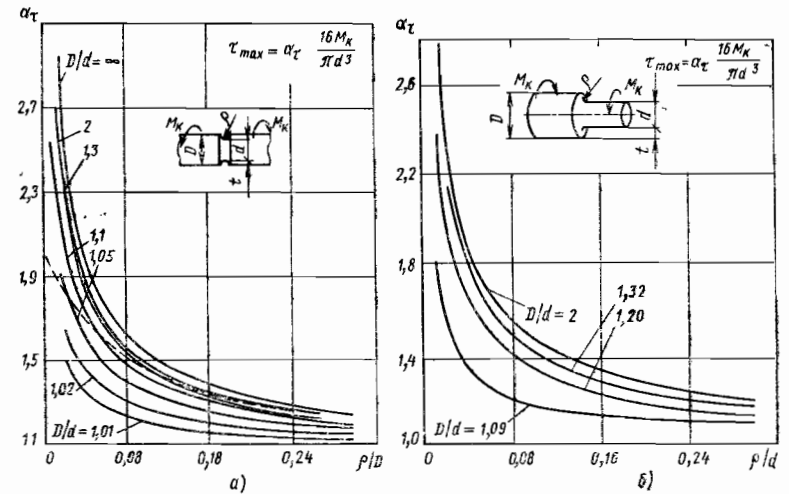


Рис. 13. Зависимости α_τ при кручении вала с канавкой (а) и ступенчатого вала с галтелью (б) от основных размеров

ции напряжений при растяжении и изгибе пластин и осесимметричных стержней с выточками и галтелями от основных размеров. Из графиков следует, что с увеличением радиуса скругления выточки (галтели) концентрация напряжений снижается,

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ПОЛЗУЧЕСТИ

При больших нагрузках в зонах концентрации напряжений появляются пластические деформации. На рис. 14 показано распределение напряжений σ_y и интенсивности деформаций ϵ_t в наиболее нагруженном сечении растягиваемой пластинки с отверстием в условиях плоского напряженного состояния, а также изменение нормальных напряжений σ_θ и интенсивности деформаций $\epsilon_{t\theta}$ на контуре отверстия (материал пластинки — сталь 45, $\sigma_T = 65 \text{ кгс/мм}^2$). Расчет напряжений и деформаций произведен вариационно-разностным методом. Из рисунка видно, что при наличии упруго-пластических деформаций (зоны пластичности заштрихованы) максимум напряжений сдвигается от контура отверстия вглубь. Последнее связано с возникновением в глубине зон плоского напряженного состояния с одинаковыми знаками главных напряжений, что затрудняет пластическое течение и делает соответствующие кольцевые слои более жесткими.

Если пластинка работает при повышенной температуре, то в тех же зонах около отверстия развиваются деформации ползучести. Характер напряженного состояния в пластинке не меняется, лишь деформации ползучести появляются при более низких напряжениях на границе невозмущенной области.

Следует отметить, что реальные возможности работы детали в условиях пластичности и ползучести, особенно при циклических нагружениях, целесообразно оценивать не только по коэффициенту концентрации напряжений α_σ^* , значения которого уменьшаются в неупругой области, но и по коэффициенту концентрации деформаций α_ϵ^* , значения которого увеличиваются по мере развития неупругих деформаций (рис. 15).

Коэффициенты концентрации напряжений α_σ^* и деформаций α_ϵ^* в области упруго-пластических деформаций связаны с коэффициентом концентрации напряжений в идеально упругом материале α_σ следующим приближенным соотношением:

$$\frac{\alpha_\sigma^* \alpha_\epsilon^*}{\alpha_\sigma^2} = 0,8 \div 0,9. \quad (9)$$

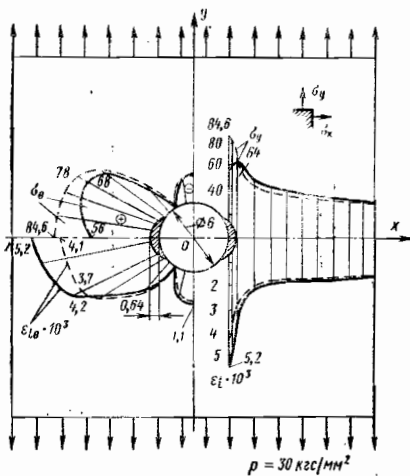


Рис. 14. Распределение напряжений (в кгс/мм^2) и деформаций при растяжении пластинки с отверстием в условиях упругости (штриховые линии) и пластичности (сплошные линии)

Рис. 15. Зависимости α_σ^* и α_ϵ^* от внешней нагрузки в растянутой пластинке с отверстием

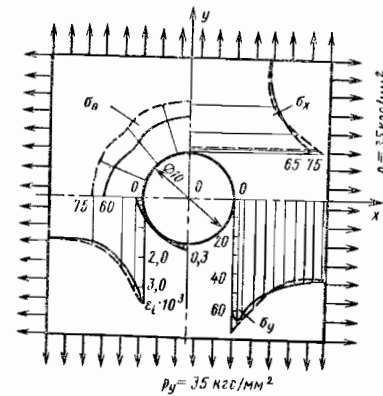
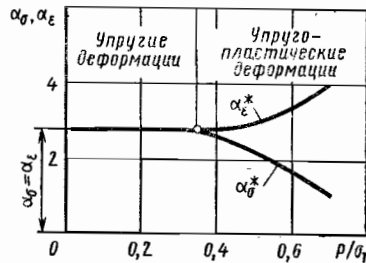


Рис. 16. Распределение напряжений и деформаций в пластинке с отверстием при двухосном растяжении

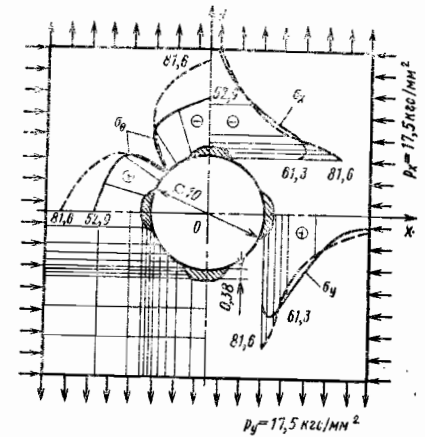


Рис. 17. Распределение напряжений в пластинке с отверстием при разных знаках напряжений на границе

В случае плоского напряженного состояния коэффициенты α_σ^* и α_ϵ^* на 20—30% выше, чем при плоской деформации для деталей такой же формы. Коэффициенты концентрации напряжений в условиях упругости в этих случаях будут одинаковыми. При двухосном растяжении пластинки с отверстием (рис. 16) развитие пластических деформаций затруднено, и они появляются при больших (почти на 20%) значениях напряжений на невозмущенной границе пластинки, чем при одноосном растяжении. Зона пластических деформаций (на рисунке заштрихована $1/4$ часть зоны) в этом случае охватывает весь контур отверстия. Характер изменения коэффициентов α_σ^* и α_ϵ^* такой же, как и в случае растяжения пластинки.

При действии на границе невозмущенной области пластинки с отверстием растягивающих и сжимающих напряжений (рис. 17) концентрация напряжений сказывается в большей степени. Пластические деформации появляются при меньших (на 40—45%) нагрузках, чем при одноосном напряжении.

При растяжении пластин с двумя симметричными выточками (см. рис. 10, а), как и при растяжении пластин с отверстием, происходит смещение максимума осевых растягивающих напряжений от дна выточки в тело пластинки.

При растяжении стержня (вала) с кольцевой выточкой (осесимметричная задача) существенного смещения максимума напряжений σ_z при наличии упруго-пластических деформаций не наблюдается (рис. 18). В этом случае, в отличие от плоской задачи (для пластин) в центре впадины имеет место плоское напряженное состояние с одинаковыми знаками главных напряжений σ_z и σ_θ .

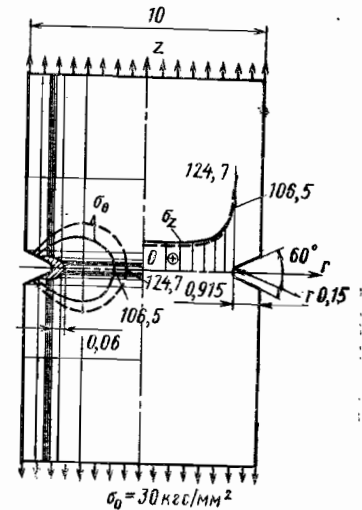


Рис. 18. Распределение напряжений в стержне с кольцевой выточкой при растяжении (штриховые линии соответствуют упругому состоянию, сплошные — упруго-пластическому состоянию; вертикальные и горизонтальные тонкие линии показывают сеточную разметку области)

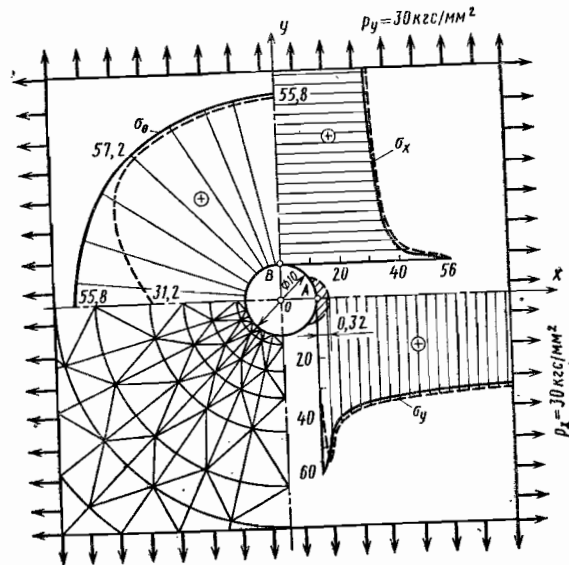


Рис. 19. Распределение напряжений в пластинке с отверстием при простом и сложном нагружении

Следует особо отметить, что при работе деталей в условиях пластичности и ползучести значительное влияние на напряженное состояние, концентрацию напряжений и деформаций оказывают условия нагружения (последовательность нагружения и т. п.).

На рис. 19 сравниваются напряженные состояния двух тонких пластинок * из сплава ХН77ТЮР ($\sigma_T = 56$ кгс/мм²). В первой пластинке при двухосном растяжении $p_x = p_y = 30$ кгс/мм² пластические деформации отсутствовали (эпюры напряжений на рис. 19 построены сплошными линиями).

Вторую пластинку вначале растягивали вдоль оси y ($p_y = 30$ кгс/мм²), а затем — вдоль оси x ($p_x = 30$ кгс/мм²). При первом нагружении в центральной части пластинки (вблизи отверстия справа и слева) образовались две зоны пластичности (одна из них на рисунке заштрихована), в которых $\alpha_{\sigma}^* = 1,97$ и $\alpha_{\epsilon}^* = 3$. В результате второго нагружения глубина проникновения пластических деформаций несколько уменьшилась вследствие разгрузки, и коэффициент концентрации напряжений в точке А стал равным $\alpha_{\sigma}^* = 1,04$. Наибольшие напряжения возникли в точке В на контуре отверстия, где $\alpha_{\sigma}^* = 1,86$ (эпюры напряжений на рис. 19 после второго нагружения показаны штриховыми линиями).

На рис. 20, а сравниваются напряженные состояния двух пластинок, одна из которых была растянута лишь вдоль оси y ($p_y = 30$ кгс/мм²; эпюры показаны сплошными линиями). При этом в центральной части пластинки вблизи отверстия образовались две зоны пластичности (возле точек А и В). Вторую пластинку вначале нагружали в направлении оси x ($p_x = 30$ кгс/мм²), в результате чего появились две зоны пластичности возле точек С и D (одна из них заштрихована), а затем полностью разгрузили. В результате разгрузки в точках пластинки возникли остаточные напряжения. На рис. 20, б показано изменение нормальных напряжений (в кгс/мм²) в сечениях AA' и DD'. После разгрузки пластинку нагружали вдоль оси y ($p_y = 30$ кгс/мм²). Эпюры нормальных напряжений на контуре отверстия σ_{θ} , а также

* Плоское напряженное состояние; расчет выполнен методом конечных элементов.

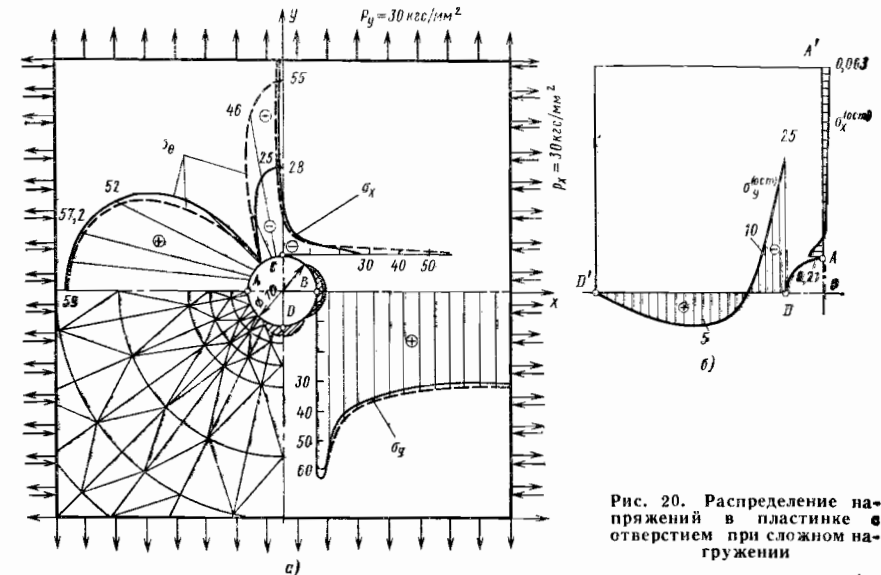


Рис. 20. Распределение напряжений в пластинке с отверстием при сложном нагружении

напряжений σ_x и σ_y в сечениях Oy и Ox , вычисленные с учетом остаточных напряжений от первого этапа нагружения, показаны штриховыми линиями.

В результате второго этапа нагружения зоны пластичности возникли вблизи точек А и В. Глубина проникновения этих зон оказалась несколько меньшей, чем при простом нагружении.

Предварительное нагружение до появления упруго-пластических деформаций и последующая разгрузка увеличивают упругий диапазон нагружения деталей и снижают коэффициент концентрации напряжений. Этот эффект лежит в основе одного из способов упрочнения деталей машин (например, предварительное растяжение болтов).

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

Прямоугольные цилиндрические передачи. При расчете на изгиб зубьев цилиндрических эвольвентных передач вместо теоретического коэффициента концентрации напряжений используют коэффициент Y_F , учитывающий форму зуба и равный значению максимальных контурных напряжений σ_0 от окружной силы 1 кгс/мм, приложенной к вершине зуба с модулем $m = 1$ (см. гл. 11).

Типичная сеточная разметка области зуба при расчете σ_0 вариационно-разностным методом и изменении контурных напряжений вдоль сжатой и растянутой сторон показаны на рис. 21. Контурные напряжения достигают наибольшего значения в некотором (пластом) сечении зуба в области переходной кривой.

На рис. 22—25 приведены графики для определения значений Y_F и σ_0 , дополняющие материал гл. 11.

При нарезании зубьев доля значения Y_F зависит от числа зубьев колеса z (рис. 22), а также от числа зубьев долбяка z^* и в большей степени от коэффициента смещения долбяка x_0 , характеризующего степень его износа. Наиболее существенное влияние на величину Y_F оказывает смещение инструмента x (рис. 23). Последнее

* При увеличении числа зубьев долбяка уменьшается радиус переходной кривой.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений в зубьях храповых колес

$$\alpha_{\sigma} = 1 + 2\gamma \sqrt{\frac{IK}{\rho}}$$

где $\gamma = \pi - \frac{\alpha}{\pi}$ — коэффициент влияния угла профиля; $l = l_1 - c_0$ — глубина выреза;

$K = \frac{\text{tg } \alpha/2}{\cos \alpha_1}$ — коэффициент.

Номинальные напряжения в зубьях вычисляют по известной формуле для изгиба бруса постоянной ширины

$$\sigma_{\text{ном}} = \frac{6Pl}{bS^2}$$

Замковые соединения лопаток. Для закрепления рабочих лопаток в дисках осевых компрессоров, паровых и газовых турбин используют замки различных конструкций (елочный замок, замок типа «ласточкин хвост» и т. п.).

Замки в турбинах работают в сложных силовых и температурных условиях. Центробежные силы и изгибающие моменты от центробежных и газовых сил вызывают достаточно высокие осевые номинальные напряжения во впадине первого зуба (~ 10 ÷ 15 кгс/мм²). При этих напряжениях и достаточно высоких температурах (до 700° С) уже в начальный момент времени в зонах концентрации напряжений появляются упруго-пластические, а затем и деформации ползучести материалов дисков и лопаток. Разрушение соединений происходит в зонах концентрации напряжений и деформаций.

На рис. 27 показано распределение напряжений (в кгс/мм²) во впадинах елочного хвостовика лопатки при температуре 700° С; штриховые линии соответствуют $t = 0$ ч и сплошные линии — $t = 100$ ч (расчет выполнен методом конечных элементов). Материал лопатки — сплав ХН70ВМТЮ. В качестве расчетной принята нагрузка в корне лопатки от центробежных сил, которая равномерно распределена между зубцами и вдоль зубцов.

Из рис. 27 следует, что наибольшие контурные напряжения

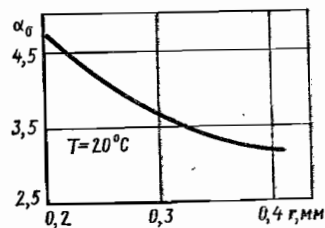


Рис. 28. Зависимость α_{σ} от r для елочного замка

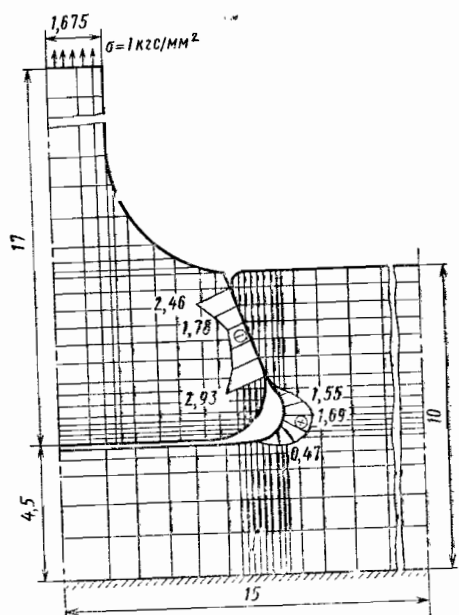


Рис. 29. Распределение напряжений в соединении типа «ласточкин хвост»

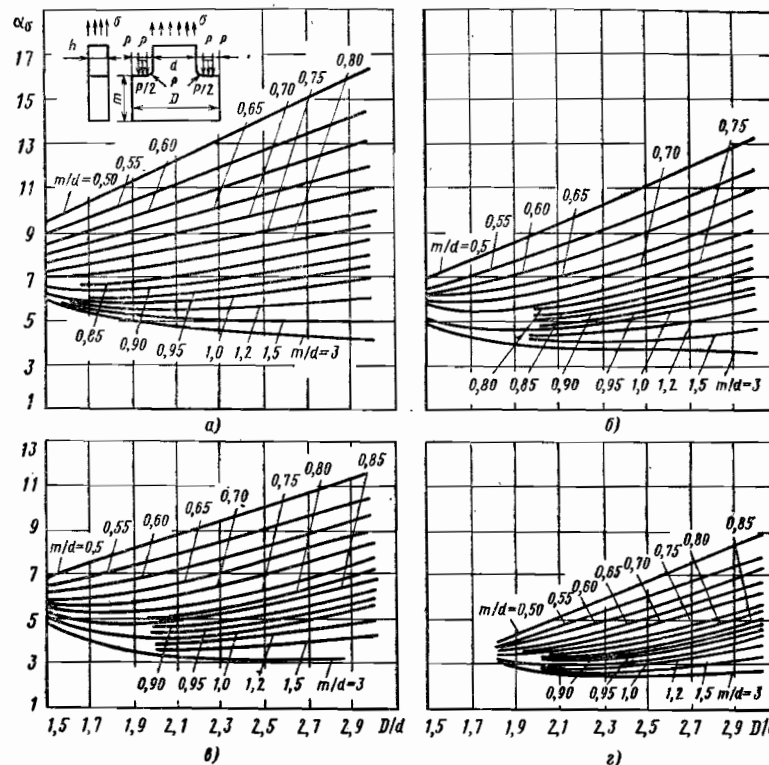


Рис. 30. Зависимости α_{σ} от основных параметров для Т-образного хвостовика а — $\rho/D = 0,05$; б — $\rho/D = 0,075$; в — $\rho/D = 0,1$; г — $\rho/D = 0,2$

действуют вблизи перехода от радиусного участка впадины к прямолинейной рабочей грани первого зуба.

При нагреве хвостовика до 700° С в начальный момент времени ($t = 0$ ч) возникают небольшие упруго-пластические деформации, хотя номинальные напряжения растяжения в сечении впадины первого зуба составляют $\sigma_n = 14,5$ кгс/мм² и соответствуют типичному уровню средних напряжений для многих турбинных лопаток. Со временем происходит развитие деформаций ползучести (зона этих деформаций через 100 ч работы заштрихована на рис. 27, цифры указывают наибольшую глубину распространения деформаций ползучести).

Наибольшие напряжения во впадине при этом существенно снижаются и смещаются в глубь тела. Теоретический коэффициент концентрации напряжений также снижается от $\alpha_{\sigma,0}^* = 3,5$ (при $t = 0$ ч) до $\alpha_{\sigma,100}^* = 3^*$, а коэффициент концентрации деформаций возрастает на 10% и достигает $\alpha_{\epsilon,100}^* = 3,8$, это значение соответствует наибольшей глубине неупругой зоны, равной 0,05 мм. При увеличении нагрузки до $\sigma_n = 29$ кгс/мм² происходит существенное развитие зон пластичности (на глубину 0,27 мм при $t = 0$ ч) и ползучести (на глубину 0,31 мм через 100 ч работы).

* Индексы 0 и 100 соответствуют $t = 0$ и 100 ч; расчет выполнен по теории старения с использованием изохронных кривых ползучести; значения α_{σ}^* вычислены по отношению к σ_0 .

Существенно, что значительное увеличение $\alpha_{\epsilon,t}^*$ наблюдается лишь в первые часы работы турбины. В дальнейшем изменения $\alpha_{\epsilon,t}^*$ незначительны, и длительная прочность замкового соединения лопаток и дисков турбины при $t = 50$ ч будет в большей степени зависеть от характеристик длительной прочности материала, чем от концентрации деформаций.

Существенное снижение коэффициентов концентрации напряжений и деформаций в елочных замках можно получить за счет увеличения радиусов скругления впадин зубцов (рис. 28). Однако при увеличении радиусов скругления сокращается перекрытие зубцов лопатки и диска и возрастают контактные давления. Последнее может ускорить развитие деформаций ползучести в зубцах.

В соединениях лопаток и дисков осевых компрессоров распространены замки типа «ласточкин хвост» (рис. 29).^{*} Наиболее нагруженными оказываются перемычки в дисках (между соседними пазами). При угле раствора паза 45° контактные давления и коэффициент концентрации напряжений снижаются. Однако в этом случае уменьшается перемычка между пазами, и меньшее число лопаток может быть размещено на ободе диска.

В ряде конструкций для соединения или взаимного направления деталей используют Т-образные хвостовики, в которых также наблюдается высокая концентрация напряжений. Значения теоретических коэффициентов концентрации напряжений α_σ при расчете таких хвостовиков (или деталей) можно определить по рис. 30.

В заключение отметим, что для исследования концентрации напряжений в элементах конструкций на практике широко используют теоретические и экспериментальные методы. Среди теоретических методов в настоящее время наиболее распространены численные методы решения на ЭВМ задач теории упругости, пластичности и ползучести (среди них вариационно-разностный метод и метод конечных элементов, см. гл. 26). Они позволяют достаточно точно исследовать концентрацию напряжений в телах произвольной формы (плоских, осесимметричных и пространственных) при простом и сложном нагружении.

Экспериментальные методы исследования напряжений разнообразны. В основном применяют тензометрирование с использованием датчиков сопротивления, методы фотоупругости и фотопластичности, голографические и рентгеновские методы, методы муаровых полос, лаковых и гальванических покрытий.

^{*} Расчет напряжений выполнен вариационно-разностным методом с использованием сетки, показанной на рисунке.

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Часто возникает необходимость рассчитывать напряжения и деформации в зонах контакта элементов машин. На рис. 1 приведены типичные контактные задачи для элементов простой формы (классические контактные задачи). К ним относятся задачи о контакте шаров, цилиндров и давления штампа. Результаты решения подобных задач широко используют при расчете подшипников качения, зубчатых передач и др. Обычно при решении классических контактных задач ограничиваются анализом напряжений и деформаций в зонах контакта.

Вторую группу образуют конструкционные контактные задачи (рис. 2). Они характеризуются совместным учетом контактных и общих деформаций сопрягаемых элементов машин. Во многих случаях в конструкционных контактных задачах приходится рассматривать несколько зон контакта (рис. 2, а).

Основные особенности контактных задач состоят в следующем. В большинстве контактных задач, даже при работе материала в упругой зоне, зависимость между внешней силой и вызванным ею перемещением оказывается нелинейной. Это объясняется изменением (увеличением) площадки контакта по мере возрастания силы. Последнее всегда имеет место, если первоначальный контакт деталей осуществляется в точке (контакт шаров) или по линии (контакт цилиндров). В том случае, когда площадь контакта остается в процессе нагружения неизменной (давление штампа на полу-

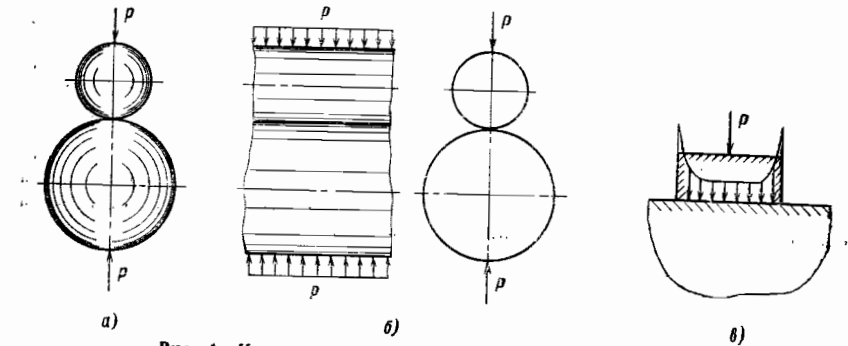


Рис. 1. Контактные задачи для элементов простой формы:
а — контакт шаров; б — контакт цилиндров; в — давление штампа на полуплоскость

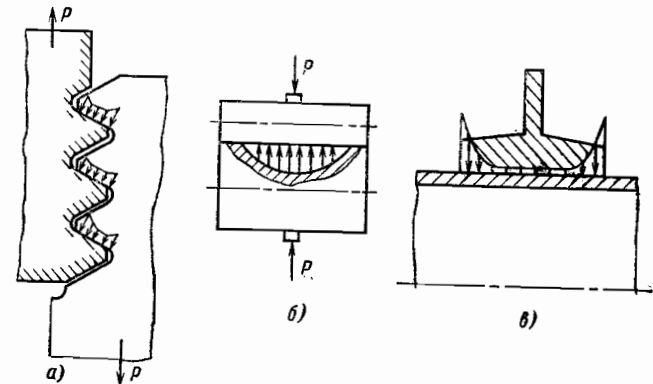


Рис. 2. Конструкционные контактные задачи для: а — зубчатого соединения; б — цилиндра конечной длины; в — прессового соединения

плоскость), зависимость между силой и перемещением (для упругого материала) линейная.

Вторая особенность контактных задач состоит в появлении значительных напряжений в зоне контакта, особенно в случаях, когда площадь первоначального контакта равна нулю (контакт в точке или по линии). Однако для зон контакта характерно возникновение всесторонних сжимающих напряжений, что позволяет материалу выдерживать без разрушения высокие поверхностные напряжения.

Контактирующие поверхности деталей должны иметь высокую поверхностную прочность, что характеризуется одновременно высокой поверхностной твердостью. Последнее достигается термической и химико-термической обработкой деталей и т. п.

КОНТАКТ ДЕТАЛЕЙ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Задачи об упругом контакте деталей простой формы (цилиндры, шары и т. п.) имеют решения в замкнутой форме.

Рассмотрим контакт цилиндров (рис. 3, задача Герца). На расстоянии ξ от плоскости, проходящей через оси цилиндров, возьмем две точки: A_1 и A_2 . Если первоначальный контакт цилиндров (без нагрузки) происходил по линии, параллельной их осям и проходящей через точку B , то расстояние между этими точками вдоль оси y (см. рис. 1)

$$\eta_1 + \eta_2 \approx \frac{\xi^2}{2R_1} + \frac{\xi^2}{2R_2} = \frac{\xi^2}{R}, \quad (1)$$

где R_1 и R_2 — радиусы первого и второго цилиндров; R — «средний» радиус кривизны,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

Под действием нагрузки p произойдет деформация цилиндров в зоне контакта, и их оси переместятся к этой зоне на величины Δ_1 и Δ_2 . Общее кинематическое перемещение (сближение) осей координат, связанных с цилиндрами, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$. Точки A_1 и A_2 займут при этом новое положение A_1^* и A_2^* .

Давление в зоне контакта деформируют близлежащие неконтактирующие поверхности цилиндров, и точки A_1^* и A_2^* , получив перемещения, равные v_1 и v_2 , займут положение $A_1^{\#}$ и $A_2^{\#}$.

Если в зоне контакта полуширина полоски контакта $a \geq \xi$, то точки A_1^* и A_2^* совместятся, поэтому

$$\Delta_1 - v_1 + \Delta_2 - v_2 = \Delta - v_1 - v_2 = \eta_1 + \eta_2 = \frac{\xi^2}{R}. \quad (3)$$

Соотношение (3) представляет собой условие совместности перемещений контактирующих точек цилиндров. Оно показывает, что кинематические перемещения цилиндров под нагрузкой компенсируются их смещениями в результате деформации.

Предположим, что между сжимаемыми цилиндрами трение отсутствует. Тогда в точках контакта будут действовать лишь нормальные давления $q(x)$, и условие равновесия примет вид

$$\int_{-a}^a q(x) dx = p. \quad (4)$$

Для решения задачи необходимо выразить смещения в уравнении (3) через контактные давления.

Если ширина полоски контакта мала по сравнению с радиусами цилиндров, то каждый из них можно приближенно рассматривать как упругую полуплоскость под действием давления $q(x)$.

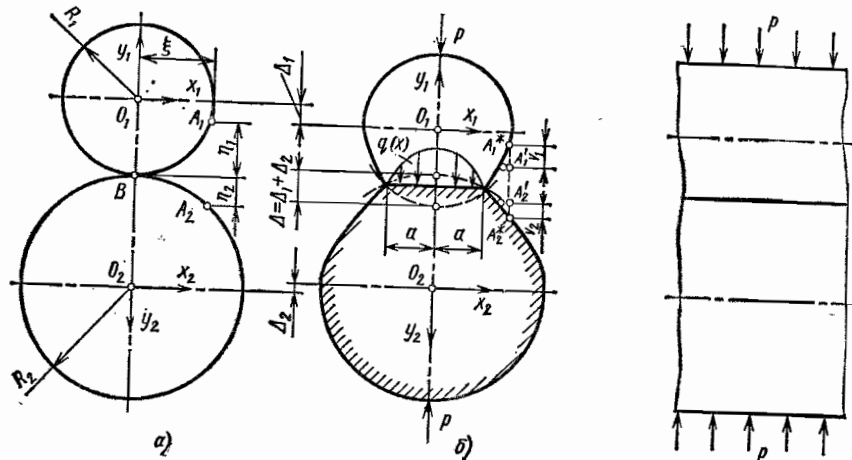


Рис. 3. К расчету контактирующих цилиндров

Смещение точки A с координатой $x = \xi$ (рис. 4) можно вычислить, используя известное решение задачи Фламана о действии силы на полуплоскость:

$$v_i = -\frac{2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i} \left\{ \int_{-a}^a q(x) \ln |\xi - x| dx + \left(\frac{1}{2(1-\nu_i)} - \ln R_i \right) p \right\}, \quad (5)$$

где E_i и ν_i — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала i -го цилиндра. Подставив соотношение (5) в условие (3) и учитывая равенство (4), получим

$$(\theta_1^* + \theta_2^*) \int_{-a}^a q(x) \ln |\xi - x| dx = \frac{\xi^2}{R} + C, \quad (6)$$

где

$$C = (\theta_1^* + \theta_2^*) \left[\ln(R_1 R_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\nu_1} + \frac{1}{1-\nu_2} \right) \right] p - \Delta; \quad (7)$$

$$\theta_1^* = \frac{2}{\pi E_1} (1-\nu_1^2); \quad \theta_2^* = \frac{2}{\pi E_2} (1-\nu_2^2).$$

Если продифференцировать уравнение (6) по ξ , то получим

$$(\theta_1^* + \theta_2^*) \int_{-a}^a \frac{q(x)}{\xi - x} dx = 2 \frac{\xi}{R}. \quad (8)$$

Задача сводится к нахождению функции $q(x)$, удовлетворяющей условию (4) и уравнению (8) при всех значениях $-a \leq \xi \leq a$.

Можно показать, что этим требованиям будет удовлетворять выражение

$$q(x) = \frac{q_{\max}}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (9)$$

В соотношении (9)

$$q_{\max} = \frac{2p}{\pi a}; \quad (10)$$

$$a = \sqrt{\rho R (\theta_1^* + \theta_2^*)}. \quad (11)$$

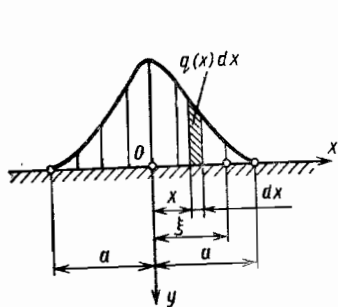


Рис. 4. К расчету перемещений точек полуплоскости

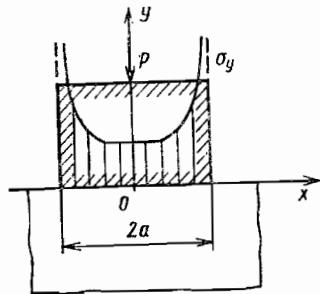


Рис. 5. Схема давления штампа на полуплоскость

Подставляя в равенство (10) и (11) значения входящих в них величин, получим

$$q_{\max} = 0,798 \sqrt{\frac{p \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}}{\theta_1 + \theta_2}}; \quad (12)$$

$$a = 0,798 \sqrt{p \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} (\theta_1 + \theta_2)},$$

где

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \theta_1^* = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1}; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} \theta_2^* = \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}.$$

Если цилиндры изготовлены из материалов, у которых:

$$\left. \begin{aligned} E_1 = E_2 \text{ и } \nu_1 = \nu_2 = 0,3, \text{ то} \\ q_{\max} = 0,42 \sqrt{pE \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}; \\ a = 1,52 \sqrt{\frac{p}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Общее кинематическое смещение (сближение осей цилиндров)

$$\Delta = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E} p \left(\ln \frac{4R_1 R_2}{a^2} + 0,815 \right). \quad (14)$$

В соотношениях (12)–(14) R_1 и R_2 — радиусы первого и второго цилиндров. Так как полуширина контактной площадки a зависит от p , то смещение Δ является величиной функцией от p , хотя материал цилиндров предполагается упругим. Это объясняется изменением величины a в процессе нагружения: полуширина a возрастает по мере увеличения p , и относительная податливость контактной зоны уменьшается.

Соотношения (13)–(14) применяют в расчетах на контактную прочность деталей машин (фрикционных и зубчатых передач и др.) конечной длины. Использование решения задачи о контакте бесконечных цилиндров в расчетах передач обосновывается тем, что ширина площадки контакта мала по сравнению с высотой зубьев колес, и краевые эффекты (возрастание контактных давлений на концах зубьев) распространяются на небольшие участки контактных линий.

В заключение отметим, что определение контактных перемещений при контакте двух цилиндров имеет существенную особенность: общие перемещения возрастают с увеличением размеров поперечного сечения [см. (14)]. В этом случае, как и в аналогичной задаче Фламанна, перемещения определяют относительно достаточно

удаленной от места контакта точки. В формуле (14) в качестве таких точек взяты центры кривизны O_1 и O_2 (см. рис. 1). Таким образом, что перемещения центров кривизны определяются только общими деформациями цилиндров (или присоединенных к ним деталей) и не связаны с контактной деформацией.

Другие случаи контакта цилиндров, а также задачи о контакте шаров решаются аналогично.

В табл. 1 и 3 показаны распространенные случаи контакта тел простой формы и даны основные соотношения.

Давление штампа*. Для штампа прямоугольного сечения (рис. 5) ширина площадки контакта равна ширине штампа, а контактное давление

$$q(x) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (15)$$

где сжимающая сила

$$P = \int_{-a}^a q(x) dx.$$

Несложно заметить, что вблизи краев штампа ($x \rightarrow a$ или $x \rightarrow -a$) напряжения резко возрастают. Для снижения концентрации напряжений следует скруглять края штампа.

Для круглого цилиндрического штампа контактное давление

$$q(r) = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (16)$$

Осадка штампа

$$\Delta = \frac{P(1 - \nu^2)}{2aE}$$

оказывается линейной функцией от нагрузки, так как размер поверхности контакта при нагружении не изменяется. В этом случае также для снижения концентрации напряжений необходимо скруглять края штампа.

Для штампа в виде цилиндра с осью, параллельной полупространству, или шара соотношения для q_{\max} и a получаются, если в соответствующих формулах в табл. 1 и 3 принять $E_2 \rightarrow \infty$.

Анализ напряженного состояния. Напряженное состояние контактирующих цилиндров является сложным. Однако в плоскости $x = 0$, проходящей через оси цилиндров, касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$, а нормальные главные напряжения**

$$\sigma_x = -q_{\max} \left[\frac{1 + 2\left(\frac{y}{a}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2}} - 2\frac{y}{a} \right]; \quad (17)$$

$$\sigma_y = -q_{\max} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2}};$$

$$\sigma_z = -q_{\max} 2\nu \left[\sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} - \frac{y}{a} \right].$$

При $y = 0$, т. е. для всех точек средней линии полоски контакта, $\sigma_x = \sigma_y = -q_{\max}$; $\sigma_z = -2\nu q_{\max}$.

* Под штампом понимают абсолютно твердое тело.

** Начало координат перенесено в центр полоски контакта, а ось z направлена вдоль этой полоски.

1. Основные соотношения для задач о контакте цилиндров

№ по-пор.	Схема контакта	Максимальное давление (напряжение) в зоне контакта q_{max}	Полуширина площадки контакта a	Сближение осей контактирующих тел Δ	Максимальные касательные напряжения τ_{max}	Глубина задевания τ_{max}
1		$0,798 \sqrt{\frac{p}{2R(\theta_1 + \theta_2)}}$	$0,798 \sqrt{2pR(\theta_1 + \theta_2)}$	$2p \frac{\theta}{\pi} \left(0,41 + \ln \frac{2R}{a} \right)$	$0,304 q_{max}$	0,786a
2		$0,798 \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 (\theta_1 + \theta_2)}}$	$0,798 \sqrt{\frac{R_1 R_2}{2p(R_1 + R_2)} (\theta_1 + \theta_2)}$	$2p \frac{\theta}{\pi} \left(0,815 + \ln \frac{4R_1 R_2}{a^2} \right)$		
3		$0,798 \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{2R_1 R_2 (\theta_1 + \theta_2)}}$	$0,798 \sqrt{\frac{R_1 R_2}{2p(R_1 - R_2)} (\theta_1 + \theta_2)}$	—		
4		$\frac{1,5P}{\pi ab}$	Эллипс с полуосями: $a = \alpha \sqrt{\frac{R_1 R_2}{2p(R_1 + R_2)} (\theta_1 + \theta_2)}$ $b = \beta a$	$\lambda \sqrt{\frac{P^2}{(\theta_1 + \theta_2)^2} \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}}$	—	—

Примечания: 1. В случае контакта цилиндра и полуэллипса дано сближение центра цилиндра с поверхностью полуэллипса (уменьшение радиуса цилиндра).

2. Коэффициенты $\theta_i = \frac{E}{1 - \nu_i}$; $\theta = \frac{E}{1 - \nu}$.

3. Формулы для определения сближения осей цилиндров для случаев 1-2 получены при $E_1 = E_2 = E$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

4. Значения τ_{max} и глубины их задевания получены при $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^4$ кгс/мм² и $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

5. Значения коэффициентов α , β и λ для случая контакта 4 даны в табл. 2.

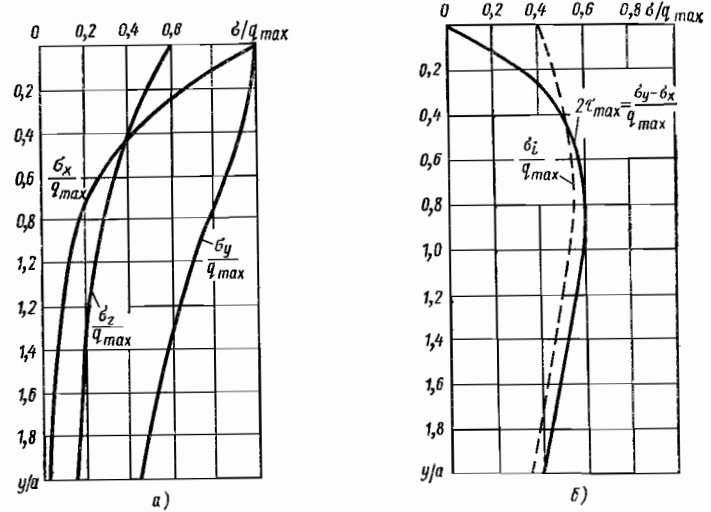


Рис. 6. Изменение нормальных (а), наибольших касательных напряжений и интенсивности напряжений (б) в контактирующих цилиндрах

Для материала с $\nu=0,5$ в этих точках будет всестороннее равномерное сжатие.

На рис. 6 показано изменение главных напряжений от отношения y/a при $\nu = 0,3$.

На прочность деталей машин существенное влияние оказывают наибольшие касательные напряжения в площадках, нормальных к главным. Расчеты показывают, что наибольшего значения касательное напряжение достигает в точке, лежащей на нормали, восстановленной в середине площадки контакта, на глубине $y \approx 0,786 a$,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = 0,304 q_{max}. \quad (18)$$

Это напряжение действует по двум взаимно перпендикулярным площадкам, нормальным к плоскости xu и образующим с осью y углы, равные 45° .

В расчетах на прочность важное значение имеет интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (19)$$

Изменение интенсивности напряжений показано на рис. 6, б. Из графика следует, что максимальное значение (на глубине $y = 0,7a$)

$$\sigma_{i max} = 0,557 q_{max}.$$

При контакте шаров для произвольной точки оси z^* все площадки, параллельные этой оси, и площадка, перпендикулярная к ней, являются главными. Это следует

* Ось z проходит через центр площадки контакта и перпендикулярна к ней.

2. Значения коэффициентов α , β , λ

R_1/R_2	α	β	λ
1	0,908	1	2,080
1,5	1,045	0,765	2,060
2	1,158	0,632	2,025
3	1,350	0,482	1,950
4	1,506	0,400	1,875
6	1,762	0,368	1,770
10	2,175	0,221	1,613

3. Основные соотношения для задач о контакте тел сферической формы

№ по пор.	Эскиз контактирующих тел	Максимальное давление (напряжение) в зоне контакта q_{max}	Радиус площадки контакта a	Сближение осей контактирующих тел Δ
1		$0,918 \sqrt[3]{\frac{P}{4R^2(\theta_1 + \theta_2)^2}}$	$0,721 \sqrt[3]{2PR(\theta_1 + \theta_2)}$	$1,55 \sqrt[3]{\frac{P^2}{2E^2R}}$
2		$0,918 \sqrt[3]{\frac{P}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2}\right)^2(\theta_1 + \theta_2)^2}}$	$0,721 \sqrt[3]{2P \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}(\theta_1 + \theta_2)}$	$1,55 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2}}$
3		$0,918 \sqrt[3]{\frac{P}{\left(\frac{R_1 - R_2}{2R_1R_2}\right)^2(\theta_1 + \theta_2)^2}}$	$0,721 \sqrt[3]{2P \frac{R_1R_2}{R_1 - R_2}(\theta_1 + \theta_2)}$	$1,55 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{R_1 - R_2}{2R_1R_2}}$
4		$\frac{\xi_q}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P}{(\theta_1 + \theta_2)^2}}$	Эллипс с полуосями: $a = \xi_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P}{\theta_1 + \theta_2}}$; $b = a \xi_b / \xi_a$	$\frac{1}{\xi_\delta} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{P^2}{E} (\theta_1 + \theta_2)^2}$

Примечания: 1. Соотношения для коэффициентов θ_1 см. в табл. 1.

2. Значения коэффициентов ξ_a , ξ_b , ξ_q и ξ_δ в зависимости от отношения $\Omega = \frac{1/R_2 + 1/R_1}{\kappa}$ даны в табл. 4 ($\kappa = 1/R_1 + 2/R_2 + 1/R_2 -$ сумма главных кривизн соприкасающихся тел).

3. Зависимость для определения сближения осей контактирующих тел получены при $E_1 = E_2 = E$ и $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

4. Максимальные касательные напряжения $\tau_{max} = 0,31q_{max}$, глубина их залегания 0,48a.

5. В случаях 1—3 площадка контакта — круг радиуса a, в 4-м случае — эллипс с большей полуосью a и меньшей полуосью b.

4. Значения коэффициентов ξ_a , ξ_b , ξ_q и ξ_δ

Ω	ξ_a	ξ_b	ξ_q	ξ_δ	Ω	ξ_a	ξ_b	ξ_q	ξ_δ
0,01923	1,013	0,9873	0,9999	0,9999	0,7037	1,916	0,6059	0,8614	0,8566
0,03949	1,027	0,9742	0,9997	0,9997	0,7449	2,053	0,5808	0,8386	0,8320
0,06087	1,042	0,9606	0,9992	0,9992	0,7911	2,248	0,5505	0,8082	0,7990
0,08350	1,058	0,9465	0,9985	0,9985	0,8300	2,463	0,5224	0,7774	0,7650
0,1075	1,076	0,9318	0,9974	0,9974	0,8587	2,669	0,4993	0,7504	0,7349
0,1330	1,095	0,9165	0,9960	0,9960	0,8904	2,975	0,4704	0,7144	0,6943
0,1894	1,141	0,8837	0,9919	0,9919	0,9113	3,253	0,4484	0,6856	0,6618
0,2545	1,198	0,8472	0,9853	0,9852	0,9187	3,373	0,4398	0,6740	0,6481
0,3314	1,274	0,8056	0,9746	0,9744	0,9264	3,514	0,4304	0,6612	0,6333
0,4245	1,381	0,7565	0,9571	0,9566	0,9342	3,683	0,4199	0,6467	0,6164
0,4914	1,473	0,7216	0,9409	0,9400	0,9425	3,890	0,4080	0,6300	0,5970
0,5161	1,511	0,7086	0,9340	0,9329	0,9511	4,156	0,3942	0,6104	0,5741
0,5423	1,554	0,6949	0,9262	0,9248	0,9601	4,515	0,3777	0,5864	0,5460
0,5702	1,603	0,6801	0,9172	0,9155	0,9698	5,046	0,3568	0,5555	0,5096
0,5999	1,660	0,6642	0,9067	0,9045	0,9803	5,976	0,3273	0,5112	0,4574
0,6317	1,729	0,6468	0,8944	0,8916	0,9923	8,609	0,2722	0,4267	0,3579
0,6662	1,812	0,6276	0,8766	0,8759					

и из симметрии напряженного состояния относительно оси z. Нормальные напряжения в окрестности произвольной точки оси z

$$\sigma_z = -q_{max} \frac{1}{1 + (z/a)^2};$$

$$\sigma_x = \sigma_y = -q_{max} \left[(1 + \nu) - \frac{0,5}{1 + (z/a)^2} - (1 + \nu) \frac{z}{a} \arctg \frac{a}{z} \right]. \quad (20)$$

Из соотношений (20) следует, что при $z = 0$ напряжение $\sigma_z = -q_{max}$ (в центре площадки контакта), а при $z \rightarrow \infty \sigma_z \rightarrow 0$.

Напряжения σ_x и σ_y в отличие от σ_z зависят и от упругих свойств материала (коэффициента Пуассона). Для точки $z = 0$

$$\sigma_x = \sigma_y = -q_{max} \frac{1 + 2\nu}{2},$$

при $\nu = 0,3 \sigma_y = -0,8q_{max}$, а при $\nu = 0,5 \sigma_y = -q_{max}$.

В площадках, нормальных к плоскости zy и наклоненных на 45° к оси z, действуют максимальные касательные напряжения

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} |(\sigma_z - \sigma_y)|,$$

которые достигают наибольшего значения при $z = 0,48a$ (при $\nu = 0,3$),

$$\tau_{max}^{(наиб)} = 0,31q_{max}.$$

Интенсивность напряжений максимальна на глубине $z = 0,48a$,

$$\sigma_{lmax} = 0,620q_{max}.$$

Точки поверхности контакта, лежащие на пересечении контура круговой площадки с осью x, находятся в состоянии чистого сдвига при напряжениях

$$\sigma_x = \frac{1 - 2\nu}{3} q_{max}; \quad (21)$$

$$\sigma_y = -\frac{1 - 2\nu}{3} q_{max}.$$

КОНСТРУКЦИОННЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Классические задачи охватывают случаи контакта тел простой формы (цилиндр, шар и т. д.), в них рассматривают только местные напряжения и деформации в зоне контакта.

Многие реальные конструкции имеют более сложную форму и передают нагрузку через несколько площадок контакта (например, в зубчатых передачах, подшипниках качения, резьбовых и зубчатых соединениях и т. п.). При расчете таких конструкций требуется учесть не только местные, но и общие деформации тел (изгиб, сдвиг и др.) в связи с их действительной формой, особенностями закрепления, с действием других силовых факторов и т. п.

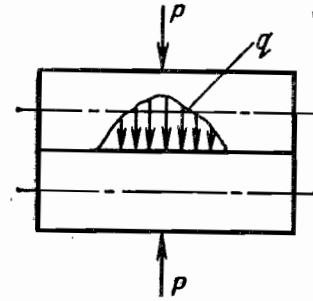


Рис. 7. Схема контакта стержней

Наиболее простой способ такого учета — разделение контактных и общих деформаций. Для расчета вводят представление об условном контактном слое, в котором сосредотачивается контактная деформация. Во многих случаях такой слой может иметь реальный смысл, если в задачах рассматривать деформацию микронеровностей поверхности деталей.

Упругий контакт стержней. Рассмотрим контакт двух стержней под действием сосредоточенной нагрузки (рис. 7). Будем считать, что контактные давления направлены вдоль общей нормали к контактирующим поверхностям (силами трения пренебрегаем), а стержень имеет постоянное сечение вдоль оси x ; ось y направлена вдоль общей нормали.

На рис. 8 показаны сечения стержней после деформации. Принято, что O_i^* и $O_i^{\#}$ — центры жесткости сечений, а оси ξ_i и η_i — главные оси сечения (i — номер стержня, $i = 1, 2$).

Кинематическое условие контакта в точке A имеет вид

$$v_1 + r_1 \theta_1 - (v_2 + r_2 \theta_2) = -(\delta_1 + \delta_2 - e),$$

где v_i — составляющая поступательного смещения сечения по оси y в результате деформации изгиба и сдвига; θ_i — угол поворота сечения; δ_i — контактная деформация; e — зазор между контактирующими точками до деформации.

Предположим, что между стержнями имеется условный нелинейно-упругий контактный слой, и контактная деформация определяется контактным давлением в этом же сечении:

$$\delta_1 + \delta_2 = \psi(q).$$

Это соответствует обычному в технических задачах допущению, что контактная деформация в данном сечении такая же, как и при постоянном по длине стыка давлении*.

Соотношение (23) позволяет приближенно учесть контактные деформации. Введя компоненты смещения по главным осям, запишем условие контакта в следующей форме:

$$\xi_1 \sin \alpha_1 + \eta_1 \cos \alpha_1 + r_1 \theta_1 - \xi_2 \sin \alpha_2 - \eta_2 \cos \alpha_2 - r_2 \theta_2 = -[\psi(q) - e].$$

Последовательное четырехкратное дифференцирование этого равенства с учетом уравнений деформации и равновесия приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4 \psi(q)}{dx^4} + \alpha \frac{d^2 q}{dx^2} + \beta q = f,$$

* Для сложных контактных слоев контактная деформация зависит также от распределения давлений по всей поверхности контакта.

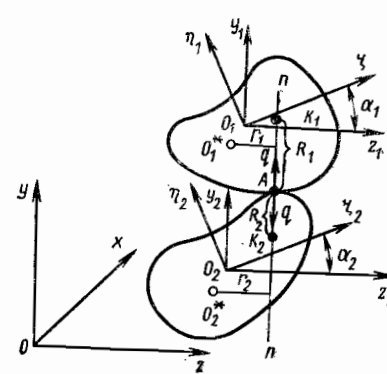


Рис. 8. Сечения стержней после деформации

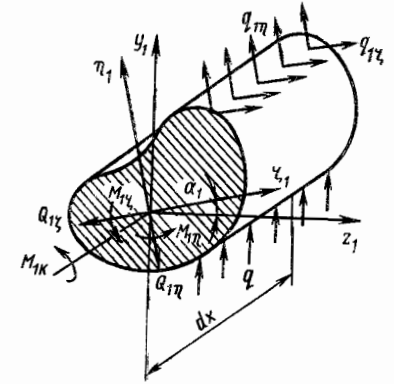


Рис. 9. Схема действия моментов и сил на стержень

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{r_i^2}{G_i T_i} - \frac{k_{i\xi} \sin^2 \alpha_i + k_{i\eta} \cos^2 \alpha_i}{G_i F_i} \right); \\ \beta &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha_i}{E_i J_{i\eta}} + \frac{\cos^2 \alpha_i}{E_i J_{i\xi}} \right); \\ j &= -\frac{d^4 e}{dx^4} + \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(\frac{q_{i\xi} \sin \alpha_i}{E_i J_{i\eta}} + \frac{q_{i\eta} \cos \alpha_i}{E_i J_{i\xi}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

здесь $G_i T_i$, $G_i F_i$, $E_i J_{i\eta}$, $E_i J_{i\xi}$ — жесткости стержня соответственно на кручение, сдвиг и изгиб относительно главных осей; $k_{i\xi}$, $k_{i\eta}$ — безразмерные коэффициенты при учете деформации сдвига; $q_{i\xi}$, $q_{i\eta}$ — составляющие внешней распределенной нагрузки по главным осям сечения.

При выводе уравнения (25) использовали следующие уравнения деформаций ($i = 1, 2$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dx} &= \psi_i + \frac{k_{i\eta} Q_{i\eta}}{G_i F_i}; \\ \frac{d\xi_i}{dx} &= -\varphi_i + \frac{k_{i\xi} Q_{i\xi}}{G_i F_i}; \\ \frac{d\theta_i}{dx} &= \frac{M_{iK}}{G_i T_i} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

В вытекающие из них соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \eta_i}{dx^2} &= \frac{M_{i\xi}}{E_i J_{i\xi}} + \frac{k_{i\eta}}{G_i F_i} \frac{dQ_{i\eta}}{dx}; \\ \frac{d^2 \xi_i}{dx^2} &= -\frac{M_{i\eta}}{E_i J_{i\eta}} + \frac{k_{i\xi}}{G_i F_i} \frac{dQ_{i\xi}}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

в которых ψ_i, ϕ_i, θ_i — углы поворота сечений; $M_{i\xi}, M_{i\eta}, M_{i\kappa}$ — моменты; $Q_{i\xi}, Q_{i\eta}$ — поперечные силы (рис. 9).
Силловые факторы связаны условиями равновесия (см. рис. 9)

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{i\eta}}{dx} &= -q_{i\eta} + (-1)^i q \cos \alpha_i; \\ \frac{dQ_{i\xi}}{dx} &= -q_{i\xi} + (-1)^i q \sin \alpha_i; \\ \frac{dM_{i\eta}}{dx} &= Q_{i\xi}; \quad \frac{dM_{i\xi}}{dx} = -Q_{i\eta}; \\ \frac{dM_{i\kappa}}{dx} &= -m_i - (-1)^i q r_i, \end{aligned} \quad (29)$$

где m_i — распределенный крутящий момент, постоянный по длине. Во многих случаях вполне оправдан метод линеаризации контактного слоя. Если представить равенство (23) в виде

$$\psi(q) = \delta_1 + \delta_2 = \lambda(q) q \quad (30)$$

и положить

$$\lambda(q) = \text{const} = \lambda(q_{cp}) = \lambda, \quad (31)$$

то уравнение (25) можно записать в виде

$$\frac{d^4 q}{dx^4} + \alpha_0 \frac{d^2 q}{dx^2} + \beta_0 q = f_0, \quad (32)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{\lambda}; \quad \beta_0 = \frac{\beta}{\lambda}; \quad f_0 = \frac{f}{\lambda}. \quad (33)$$

Величину податливости слоя λ можно выбрать в процессе решения с помощью последовательных приближений. Решение уравнения (32) целесообразно представить с помощью нормальных фундаментальных функций в виде

$$q(x) = q(0) Y_0(x) + q'(0) Y_1(x) + q''(0) Y_2(x) + q'''(0) Y_3(x) + \int_0^x Y_3(x-s) f_0(s) ds, \quad (34)$$

где $q(0), q'(0), q''(0), q'''(0)$ — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий в сечении $x=0$; Y_i — нормальные фундаментальные функции.

$$\left. \begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{1}{2mn} [2mn \operatorname{ch} mx \cos nx - (m^2 - n^2) \operatorname{sh} mx \sin nx] \\ Y_1(x) &= \frac{1}{2mn(m^2 + n^2)} [m(3n^2 - m^2) \operatorname{ch} mx \sin nx - n(n^2 - 3m^2) \operatorname{sh} mx \cos nx]; \\ Y_2(x) &= \frac{1}{2mn} \operatorname{sh} mx \sin nx; \\ Y_3(x) &= \frac{1}{2mn(m^2 + n^2)} [m \operatorname{ch} mx \sin nx - n \operatorname{sh} mx \cos nx]. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

В формулах (35)

$$m = \sqrt{-\frac{1}{4} \alpha_0 + \sqrt{\frac{1}{4} \alpha_0^2 + \frac{1}{4} \beta_0}}; \quad n = \sqrt{\frac{1}{4} \alpha_0 + \sqrt{\frac{1}{4} \alpha_0^2 + \frac{1}{4} \beta_0}}. \quad (36)$$

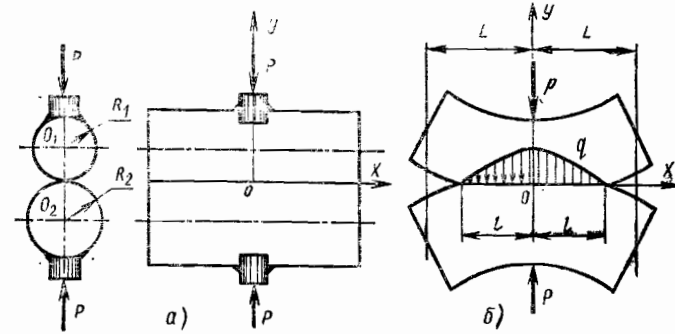


Рис. 10. Контакт цилиндрических стержней

Рассмотрим в качестве примера упругий контакт цилиндрических стержней при действии сосредоточенной нагрузки (рис. 10, а).

Контактная деформация связана с контактными давлениями известным соотношением А. Н. Динника.

$$\delta_1 + \delta_2 = \psi(q) = \lambda(q) q = \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^2 \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \left(\ln \frac{2R_i}{b} + \frac{1}{3} \right) \right\} q, \quad (37)$$

где полуширина полоски контакта

$$b = \frac{2q}{\pi \sigma_0}, \quad (38)$$

σ_0 — наибольшее контактное давление.

Если упругие постоянные материалов цилиндров одинаковы, то при $\nu = 0,3$

$$\psi(q) = \left\{ \frac{0,386}{E} + \frac{0,579}{E} \ln \left[1,725 (R_1 + R_2) \frac{E}{q} \right] \right\} q; \quad (39)$$

$$\sigma_0 = 0,418 \sqrt{qE \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (40)$$

Пренебрегая деформацией сдвига в цилиндрических стержнях ($\alpha = 0$), получим

$$\frac{d^4 q}{dx^4} + \beta_0 q = 0. \quad (41)$$

Граничные условия при $x=l$ (рис. 10, б)

$$q'(l) = 0; \quad q'''(l) = 0 \quad (42)$$

связаны с отсутствием изгибающего момента и поперечной силы в этом сечении. При $x=0$

$$q'(0) = 0; \quad q'''(0) = \frac{1}{2} \beta_0 P. \quad (43)$$

С учетом граничных условий

$$q(x) = \frac{1}{2} P \left(\frac{Y_1 Y_3 + \frac{1}{\beta_0} Y_0^2}{Y_2 Y_3 + \frac{1}{\beta_0} Y_0 Y_1} Y_0(x) + \frac{Y_0 Y_2 - Y_1^2}{Y_2 Y_3 + \frac{1}{\beta_0} Y_0 Y_1} Y_2(x) + \beta_0 Y_3(x) \right), \quad (44)$$

где $Y_i(x)$ ($i = 0, \dots, 3$) — функции А. Н. Крылова*; Y_i — значения этих функций при $x = l$.

Протяженность половины зоны контакта может быть найдена из условия

$$q(l) = 0 \quad (45)$$

или

$$\int_0^l q(x) dx = \frac{1}{2} P. \quad (46)$$

Условие (45) выполняется для достаточно длинных стержней: $L > l$. Если $l > L$, то следует принять $l = L$, и задача значительно упрощается, ее решение выражается уравнением (44) при $l = L$.

Рассмотрим случай, когда зона контакта занимает часть длины стержня. Для определения l используем условие (45), тогда получим

$$\cos ml = 0; \quad l = \frac{\pi}{2 \sqrt{\frac{1}{4} \beta_0}} = \frac{\pi}{2m} \quad (47)$$

или

$$l = \frac{\pi}{4 \sqrt{\frac{4}{\lambda(q_{cp})} \left(\frac{1}{E_1 J_1} + \frac{1}{E_2 J_2} \right)}} \quad (48)$$

Так как

$$q_{cp} = \frac{P}{2l},$$

то соотношение (48) позволяет найти величину l и затем λ . С учетом равенства (47) решение уравнения (44) можно представить в виде

$$q(x) = \frac{Pm}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} \left[\cos \frac{\pi x}{2l} \operatorname{ch} \frac{\pi(l-x)}{2l} + \sin \frac{\pi x}{2l} \operatorname{sh} \frac{\pi(l-x)}{2l} \right]. \quad (49)$$

Относительное распределение контактного усилия по длине зоны контакта не зависит от величины нагрузки. Последняя, как и упругие характеристики контактного слоя и стержней, влияет только на длину зоны контакта.

Подобным образом может быть решена задача и при учете деформации сдвига стержней. Условие для определения длины зоны контакта в этом случае запишем в виде

$$\operatorname{th} ml \operatorname{tg} nl = \frac{2mn}{m^2 - n^2}, \quad (50)$$

где значения m и n вычисляются из соотношений (36). При $\alpha_0 = 0$ условия (47) и (50) совпадают.

В общем случае один из наиболее эффективных методов решения состоит в применении интегральных уравнений и использовании алгоритма последовательных приближений. Интегрируя последовательно уравнение (25) и учитывая граничные условия

$$\left. \frac{d^3 \psi}{dx^3} \right|_{x=l} = \left(\frac{k_1}{G_1 F_1} + \frac{k_2}{G_2 F_2} \right) \frac{dq}{dx}(l); \quad \left. \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right|_{x=l} = 0; \quad (51)$$

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = \alpha \int_0^l q(x_1) dx_1; \quad \psi \Big|_{x=0} = 0,$$

* Соотношения для функций А. Н. Крылова можно получить из формул (35) и (36), если принять $\alpha_0 = 0$.

получим

$$\psi(q) = -\alpha \int_0^l \int_0^l q(x_2) dx_2 dx_1 + \beta \int_0^l \int_0^l \int_0^l q(x_4) dx_4 dx_3 dx_2 dx_1. \quad (52)$$

Вводя безразмерную координату $\xi = x/l$ и учитывая равенство

$$l = \frac{P}{2 \int_0^1 q(\xi) d\xi}, \quad (53)$$

запишем уравнение (52) в виде нелинейного интегрального уравнения:

$$q(\xi) = \frac{1}{\lambda(q)} \left\{ -\alpha \frac{P^2}{4 \left(\int_0^1 q(\xi) d\xi \right)^2} \int_0^1 \int_0^1 q(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \right. \\ \left. + \beta \frac{P^4}{16 \left(\int_0^1 q(\xi) d\xi \right)^4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \right\}, \quad (54)$$

или в сокращенной форме

$$q = K(q). \quad (55)$$

Для решения используем метод «подобной итерации», принимая для $(i+1)$ -го приближения

$$q_{i+1} = K(c_i q_i). \quad (56)$$

Определив коэффициент подобия c_i из условия

$$q_{i+1}(0) = c_i q_i(0), \quad (57)$$

получим следующее уравнение для вычисления c_i :

$$c_i q_i(0) = \frac{1}{\lambda(c_i q_i(0))} \left\{ -\alpha \frac{P^2}{4 c_i \left(\int_0^1 q(\xi) d\xi \right)^2} \int_0^1 \int_0^1 q_i(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \right. \\ \left. + \beta \frac{P^4}{16 c_i^3 \left(\int_0^1 q(\xi) d\xi \right)^4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q_i(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \right\}. \quad (58)$$

В качестве исходного приближения можно принять линейное распределение

$$q_0(\xi) = q_0(0) (1 - \xi), \quad (59)$$

причем

$$q_0(0) = \frac{P}{l_{(0)}}, \quad (60)$$

где $l_{(0)}$ — исходное приближение для протяженности половины зоны контакта.

Пример. Примем $R_1 = R_2 = 50$ мм; $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^4$ кгс/мм²; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $k = \frac{10}{9}$, усилие $P = 10^5$ кгс.

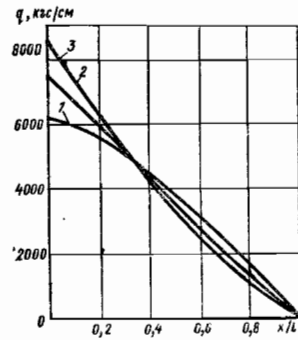


Рис. 11. Распределение давлений на стыке двух стержней

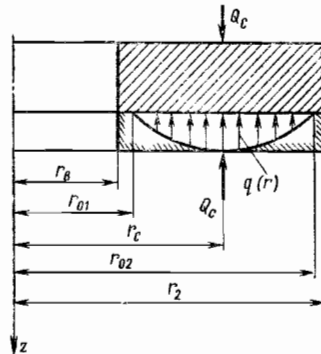


Рис. 12. Схема контакта пластинок

Принимаем для исходного приближения $l_0 = 2,5 R = 125$ мм. В соответствии с равенством (39)

$$\lambda(q) = \frac{1}{E} \left[0,386 + 0,579 \ln \left(3,45R \frac{E}{q} \right) \right].$$

Уравнение (58) для определения c_0 принимает вид

$$5,232 - 0,579 \ln c_0 = \frac{1,926}{c_0^2} + \frac{3,353}{c_0^4},$$

откуда $c_0 = 1,003$.

В процессе последовательных приближений получаем

$$\frac{l}{R} = 2,5; 2,82; 2,69; 2,67; \dots$$

$$q^{(i)} \cdot 10^{-3} = 8; 8,03; 8,50; 8,57.$$

На рис. 11 показано распределение q , полученное по уравнению (54) (кривая 3, $\lambda = \text{var}$) и на основании приближенных решений при $\lambda = \text{const}$ с учетом сдвига (кривая 2) и без учета сдвига (кривая 1).

Упругий контакт пластинок. При осесимметричной контактной задаче для двух круглых пластинок (рис. 12) получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 \psi(q)}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \psi(q)}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \psi(q)}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d \psi(q)}{dr} + \beta q = f, \quad (61)$$

в котором

$$\beta = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{D_i}; \quad f = - \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{q_i}{E_i}, \quad (62)$$

здесь $D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины (h_i — толщина пластины); i — номер пластины ($i = 1, 2$).

Для линейно-упругого контактного слоя уравнение (61) можно переписать в виде

$$\frac{d^4 q}{d\xi^4} + \frac{2}{\xi} \frac{d^3 q}{d\xi^3} - \frac{1}{\xi^2} \frac{d^2 q}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} \frac{dq}{d\xi} + q = \frac{f_0}{\alpha^4}, \quad (63)$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{\beta_0}; \quad \beta_0 = \beta/\lambda; \quad f_0 = f/\lambda. \quad (64)$$

При выводе уравнения (63) независимая переменная r (r — радиус пластины) заменена другой ξ , связанной с ней соотношением $\xi = \alpha r$.

Обозначая

$$\Delta = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}, \quad (65)$$

получим

$$\Delta^2 q + q = \frac{f_0}{\alpha^4}. \quad (66)$$

Решение уравнения (66), можно, как и для стержней, представить в виде $q(\xi) = q(\xi_c) Y_1(\xi_c, \xi) + q'(\xi_c) Y_2(\xi_c, \xi) + q''(\xi_c) Y_3(\xi_c, \xi) + q'''(\xi_c) Y_4(\xi_c, \xi)$, (67) где $q(\xi_c)$, $q'(\xi_c)$, $q''(\xi_c)$ и $q'''(\xi_c)$ — произвольные постоянные; $Y_i(\xi_c, \xi)$ — нормальные фундаментальные функции при ξ_c от ξ ,

$$Y_1(\xi_c, \xi) = \frac{\pi}{2} \xi_c [-u'_0(\xi_c) g_0(\xi) - v'_0(\xi_c) f_0(\xi) + f'_0(\xi_c) v_0(\xi) + g'_0(\xi_c) u_0(\xi)];$$

$$Y_2(\xi_c, \xi) = \frac{\pi}{2} \xi_c [-u_0(\xi_c) g_0(\xi) - v_0(\xi_c) f_0(\xi) + f_0(\xi_c) v_0(\xi) + g_0(\xi_c) u_0(\xi)];$$

$$Y_3(\xi_c, \xi) = \frac{\pi}{2} \xi_c [u'_0(\xi_c) f_0(\xi) - v'_0(\xi_c) g_0(\xi) - f'_0(\xi_c) u_0(\xi) + g'_0(\xi_c) v_0(\xi)];$$

$$Y_4(\xi_c, \xi) = \frac{\pi}{2} \xi_c [u_0(\xi_c) f_0(\xi) - v_0(\xi_c) g_0(\xi) - f_0(\xi_c) u_0(\xi) + g_0(\xi_c) v_0(\xi)]. \quad (68)$$

В соотношениях (68) $u_0, v_0, f_0, g_0, u'_0, v'_0, f'_0, g'_0$ — функции и их производные, определяемые с помощью функций Кельвина I и II родов нулевого порядка,

$$u_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{4k}}{2^{4k} [(2k)!]^2}; \quad v_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{4k+2}}{2^{4k+2} [(2k+1)!]^2};$$

$$g_0(\xi) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(c - \ln \frac{2}{\xi} \right) u_0(\xi) + \frac{\pi}{4} v_0(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{4k}}{2^{4k} [(2k)!]^2} \sum_{m=1}^{2k} \frac{1}{m} \right\};$$

$$f_0(\xi) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{2}{\xi} - c \right) v_0(\xi) + \frac{\pi}{4} u_0(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{4k+2}}{2^{4k+2} [(2k+1)!]^2} \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{1}{m} \right\}, \quad (69)$$

где $c = 0,577$ — постоянная Эйлера.

При больших значениях аргумента можно пользоваться следующими приближенными асимптотическими зависимостями:

$$u_0(\xi) \approx \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi\xi}} \cos \left(\sigma - \frac{\pi}{8} \right);$$

$$v_0(\xi) \approx - \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi\xi}} \sin \left(\sigma - \frac{\pi}{8} \right);$$

$$g_0(\xi) \approx - \frac{2e^{-\sigma}}{\pi \sqrt{\frac{2}{\pi} \xi}} \cos \left(\sigma - \frac{\pi}{8} \right);$$

$$f_0(\xi) \approx - \frac{2e^{-\sigma}}{\pi \sqrt{\frac{2}{\pi} \xi}} \sin \left(\sigma - \frac{\pi}{8} \right), \quad (70)$$

где $\sigma = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$.

Граничные условия в рассматриваемой задаче:

$$\text{при } \xi = \xi_c \quad q'(\xi_c) = 0; \quad q'''(\xi_c) = \frac{1}{2} \alpha Q; \quad (71)$$

$$\text{при } \xi = \xi_{01} \quad Q_{ri} = 0; \quad M_{ri} = 0, \quad (72)$$

где Q_r и M_r — соответственно перерезывающая сила и радиальный изгибающий момент.

Из уравнений (67) с учетом этих условий найдем

$$q(\xi_c) = \frac{1}{2} Q \alpha \eta_0(\xi_c, \xi_{01}); \quad (73)$$

$$q''(\xi_c) = \frac{1}{2} Q \alpha \eta_1(\xi_c, \xi_{01}),$$

где

$$\eta_0(\xi_c, \xi_{01}) = \frac{Y_2 [Y_1 \xi_{01} + (1-\nu) Y_3'] - Y_1' [Y_2 \xi_{01} + (1-\nu) Y_4']}{Y_3' [Y_1 \xi_{01} + (1-\nu) Y_3'] - Y_1' [Y_2 \xi_{01} + (1-\nu) Y_4']}, \quad (74)$$

$$\eta_1(\xi_c, \xi_{01}) = \frac{\eta_0(\xi_c, \xi_{01}) Y_3' - Y_2'}{Y_1'},$$

здесь Y_i и Y_i' — значения нормальных фундаментальных функций и их производных при $\xi = \xi_{01}$ (см. рис. 12).

Подставляя значения произвольных постоянных из равенств (71) — (73) в уравнение (67), получим

$$q(\xi) = \frac{1}{2} \alpha Q [\eta_0(\xi_c, \xi_{01}) Y_1(\xi_c, \xi) + \eta_1(\xi_c, \xi_{01}) Y_3(\xi_c, \xi) + Y_4(\xi_c, \xi)]. \quad (75)$$

Значение ξ_{01} при условии, что $q(\xi_{01}) = 0$, находят из уравнения (75) с помощью известных методов решения трансцендентных уравнений. Аналогично определяют и значение ξ_{02} .

Решение задачи существенно упрощается, если $\xi_{01} \leq \xi_b$ и $\xi_{02} \geq \xi_2$ (см. рис. 12). В этом случае следует принять $\xi_{01} = \xi_b$ и $\xi_{02} = \xi_2$.

На рис. 13 показано изменение давлений на стыке одинаковых пластинок толщиной $h_1 = h_2 = 18$ мм. Податливость слоя определялась из соотношения

$$\lambda = \frac{t_1 + t_2}{E}.$$

В заключение отметим, что решение задачи об упругом контакте пластинок можно весьма эффективно использовать при расчете беспрокладочных фланцевых соединений [3].

ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Основные уравнения задачи. Рассмотрим для простоты два плоских тела ($i = 1, 2$) произвольной формы в декартовой системе координат xOy (рис. 14).

В некоторых двух точках тел O_i , удаленных от зоны контакта, поместим системы координат $x_i O_i y_i$, жестко связанные с телами.

Под действием внешних сил произойдет кинематическое перемещение тел относительно общей системы координат xOy на величины Δ_i , компенсируемые перемещениями в зоне контакта.

В зоне контакта возникнут контактные давления $q(x, y)$,

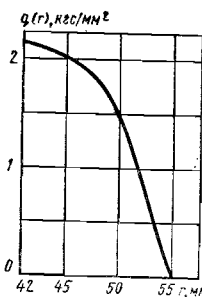


Рис. 13. Распределение давлений в стыке двух пластинок

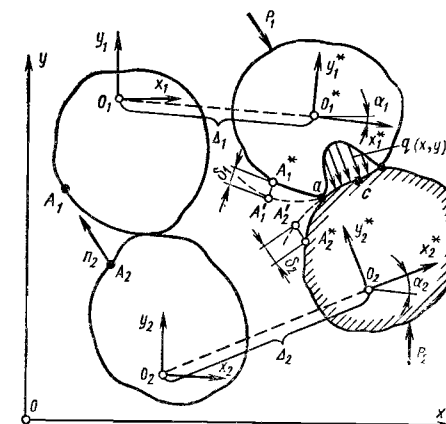


Рис. 14. Схема контакта двух тел произвольной формы

Уравнения равновесия в рассматриваемой задаче имеют вид (силы трения не учитываются)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n P_{imx} &= e \int_{y_{ia}}^{y_{ib}} q dy; \\ \sum_{m=1}^n P_{imy} &= e \int_{x_{ia}}^{x_{ib}} q dx; \\ \sum_{m=1}^n M_{O_i}(P_{im}) &= e \int_{x_{ia}}^{x_{ib}} qx dx + e \int_{y_{ia}}^{y_{ib}} qy dy, \end{aligned} \quad (76)$$

где P_{imx} и P_{imy} — проекции на оси x и y внешних сил P_{im} (i и m — соответственно номер тела и силы); q — контактные давления; x_{ia} и y_{ia} — координаты начала площадки контакта в системе $x_i O_i y_i$; x_{ib} и y_{ib} — то же, для конца зоны контакта; e — ширина тела (размер по оси z).

В результате кинематического перемещения некоторые сопряженные точки A_i тел ($i = 1, 2$) займут новое положение A_i' (см. рис. 14) с координатами

$$\begin{aligned} y(A_i') &= y(A_i) + \Delta_{iy}; \\ x(A_i') &= x(A_i) + \Delta_{ix}, \end{aligned} \quad (77)$$

где Δ_{ix} и Δ_{iy} — проекции перемещений Δ_i соответственно на оси x и y ; $\Delta_{iy} = \Delta_i \cos \alpha_i$; $\Delta_{ix} = \Delta_i \sin \alpha_i$; α_i — угол поворота осей x_i относительно оси x в результате кинематического перемещения тел.

В зоне первоначального контакта деформируются близлежащие участки тел. В результате точки A_i' переместятся относительно местных осей на величины δ_i и займут положение A_i^* (рис. 14):

$$\begin{aligned} y_i(A_i^*) &= y_i(A_i') - v_i; \\ x_i(A_i^*) &= x_i(A_i') - u_i, \end{aligned} \quad (78)$$

где v_i и u_i — компоненты смещений δ_i соответственно вдоль осей y_i и x_i .

Принимая во внимание, что условия касания точек имеют вид

$$\begin{aligned} y(A_1^*) &= y(A_2^*); \\ x(A_1^*) &= x(A_2^*), \end{aligned} \quad (79)$$

и учитывая связь между системами координат, получим условие совместности перемещений для контактирующих точек тел:

$$\left. \begin{aligned} y(A_1) - y(A_2) &= \Delta_{1y} - \Delta_{2y} - \sum_{i=1}^2 (-1)^i (v_i \cos \alpha_i + u_i \sin \alpha_i), \\ x(A_1) - x(A_2) &= \Delta_{1x} - \Delta_{2x} - \sum_{i=1}^2 (-1)^i (-v_i \sin \alpha_i + u_i \cos \alpha_i), \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

где $y(A_i)$ и $x(A_i)$ — координаты точек тел в ненагруженном состоянии.

Из уравнения (80) следует, что кинематические перемещения тел под нагрузкой компенсируются их смещениями в результате деформации. Уравнения (80) в точной постановке задачи должны удовлетворяться для всех сопряженных контактирующих точек тел на всех площадках контакта. Решая совместно системы уравнений (76) и (80) с учетом граничных условий, можно найти контактные давления и размеры площадки (площадок) контакта.

Связь между силовыми факторами и перемещениями в зоне контакта. В большинстве контактных задач граничные условия задают в напряжениях на свободных поверхностях (вне зоны контакта), и решение задач выполняют в напряжениях.

Поэтому для решения систем уравнений (76) и (80) необходимо выразить смещения в уравнениях (80) через силовые факторы (контактные давления и внешние нагрузки).

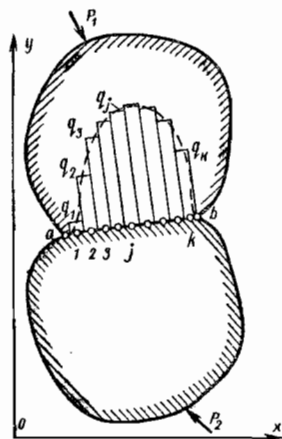
В классических контактных задачах связь смещений и давлений принимали такой же, как и при действии сил на полуплоскость (из задачи Фламана). Такой подход позволяет учесть лишь деформации и напряжения в зоне контакта.

Рис. 16. Распределение давлений в зоне контакта

Если известна система сил, действующих на тело (см. рис. 14), то перемещение некоторой точки C на его поверхности можно определить с помощью функций влияния (функций Грина):

$$\begin{aligned} v_i(C) &= \int_a^{\xi_b} K_q^{(v)}(C, \xi) q(\xi) d\xi + \sum_{m=1}^n K_p^{(v)}(C, x_p) P_{im}; \\ u_i(C) &= \int_a^{\xi_b} K_q^{(u)}(C, \xi) q(\xi) d\xi + \sum_{m=1}^n K_p^{(u)}(C, y_p) P_{im}, \end{aligned} \quad (81)$$

где $K_q^{(v)}(C, \xi)$ — функция влияния давлений q на перемещение точки C , показывающая перемещение точки C в направлении оси y_i под действием единичной силы, приложенной в точке ξ ; $K_q^{(u)}(C, \xi)$ — то же, для перемещения точки C в направлении оси x при действии единичной силы в точке ξ ; $K_p^{(v)}$ и $K_p^{(u)}$ — функции влияния сил P_{im} , показывающие перемещение точки C соответственно в направлении осей y_i и x_i от единичной силы, приложенной в той же точке.



Подставив соотношения (81) в условия (80), получим систему интегральных уравнений. С помощью этой системы и уравнений равновесия можно найти неизвестные давления в зонах контакта, размеры этих зон и кинематические перемещения тел.

Эта система уравнений решается достаточно просто, если принять допущение о наличии дискретного контакта в j точках каждой зоны ($j = 1, 2, \dots, k$), а неизвестную функцию распределения контактных давлений аппроксимировать ступенчатым законом с постоянными давлениями в зоне j -й точки контакта (рис. 15). В этом случае уравнения равновесия примут вид ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n P_{imx} &= \sum_{j=1}^k q_j \Delta t_{jy}; \\ \sum_{m=1}^n P_{imy} &= \sum_{j=1}^k q_j \Delta t_{jx}; \\ \sum_{m=1}^n M_{O_i}(P_{im}) &= \sum_{j=1}^k q_j (y_j \Delta t_{jy} + x_j \Delta t_{jx}). \end{aligned} \quad (82)$$

Соотношения (81) можно переписать в виде ($l = 1, 2, \dots, k$)

$$\begin{aligned} v_{ij} &= \sum_{l=1}^k K_{ijl}^{(v)} q_{jl} \Delta t_l + \sum_{m=1}^n K_{ijP}^{(v)} P_{im}; \\ u_{ij} &= \sum_{l=1}^k K_{ijl}^{(u)} q_{jl} \Delta t_l + \sum_{m=1}^n K_{ijP}^{(u)} P_{im}, \end{aligned} \quad (83)$$

где $K_{ijl}^{(u)}$ и $K_{ijl}^{(v)}$ — функции влияния, показывающие перемещения соответственно в направлении осей x_i и y_i точки тела i в сечении j от единичной силы, приложенной в сечении l .

Если вместо нормальных давлений в расчет ввести проекции давлений q_x и q_y , то в соотношениях (81) появятся дополнительные слагаемые, учитывающие изменение перемещений u и v соответственно от проекций давлений q_y и q_x .

Таким образом, записывая уравнения (80) для всех k точек контакта и заменяя входящие в них смещения соотношениями (83), с учетом уравнений равновесия (82) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных давлений, кинематических перемещений и размеров зоны контакта. Эта система с учетом граничных условий задачи решается по методу последовательных приближений (для определения размеров действительной площадки контакта).

Определение функций влияния. Дискретность контакта существенно упрощает определение функций влияния. Функции влияния в простых случаях (для стержней, оболочек и пластин) можно вычислить, используя известные соотношения между перемещениями и действующими силами (например, с помощью интеграла Мора для стержней). Для тел сложной формы эти функции достаточно просто вычисляются с помощью одного из численных методов (методом конечных элементов и др.).

Функции влияния в этом случае вычисляют по обычной методике численного расчета напряженного состояния в телах при заданных граничных условиях. При этом учитывают реальную форму тела и его общие деформации (см. гл. 26).

В более сложных задачах функции влияния можно определить экспериментально, измеряя перемещения в различных точках тела под действием сосредоточенных сил.

При определении функций влияния возникает вопрос об уравнивании свободных (не имеющих точек закрепления) тел при действии единичной силы. Следует уравнивать единичную силу в начале координат тела (рис. 16, а), удовлетворяя условиям равновесия (рис. 16, б).

Из графиков на рис. 17, б следует, что при $\sigma = 1 \text{ кгс/мм}^2$ раскрытия стыка под головкой не происходит (условие раскрытия стыка $q(r_j) = 0$ в одной из точек контакта).

После определения контактных давлений произведем расчет напряженного состояния тела болта. На рис. 17, а показана сеточная разметка тел болта и втулки для вычисления функций влияния и расчета напряженного состояния. На этом же рисунке показано изменение нормальных напряжений на контуре головки, цифрами обозначены напряжения в отдельных точках (в кгс/мм^2) при контакте головки с деформируемой втулкой. При опирании головки на недеформируемую втулку наибольшие напряжения в галтели незначительно снижаются.

Пример 2. Давление абсолютно жесткого диска ($i=1$) на упругую полуплоскость ($i=2$, плоское напряженное состояние).

На рис. 18, а показана сеточная разметка области.

Граничные условия задачи:

$$\begin{aligned} \text{при } y = -100 \text{ мм } v = 0; \\ x = 0 \quad u = 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Уравнение равновесия

$$\sum_{j=1}^5 q_j \Delta x_j = \frac{1}{2} P, \quad (90)$$

где Δx_j — ширина j -й ступени ($j=5$) контактных давлений q_j . Множитель $1/2$ в правой части уравнения (90) связан с рассмотрением половины полуплоскости (по условию симметрии задачи).

Уравнение совместности перемещений, как и в предыдущей задаче, имеет вид (87), а смещения связаны с контактными давлениями ($i=1, 2$) соотношением

$$v_{2j} = \sum_{l=1}^5 K_{2/l} q_l \Delta x_l. \quad (91)$$

Порядок решения задачи не отличается от изложенного выше.

Однако рассматриваемый пример имеет следующие две особенности:

1) разность координат точек в ненагруженном состоянии [см. уравнения (80)] равна нулю лишь при $x=0$, а в остальных точках контакта равна зазору между диском и полуплоскостью;

2) размер (полуширина) площадки контакта заранее неизвестен и зависит от внешней нагрузки (по аналогии с задачей о контакте цилиндров). Поэтому задачу целесообразно решать методом последовательных приближений. В нулевом приближении полуширину площадки контакта можно принять такой же, как и для контактирующих цилиндров (или в общем случае произвольно). Далее площадку разбивают на j ступеней (постоянной или переменной ширины), вычисляют функции влияния, по описанной выше методике определяют контактные давления и проверяют выполнение граничных условий: при $x=a$ $q(a) = 0$.

Если в результате расчета окажется, что принятая в нулевом приближении полуширина площадки $a_{п(0)}$ больше действительной $a_{п}^*$ ($a_{п(0)} > a_{п}^*$), то в первом приближении принимают новое значение $a_{п(1)}$ (например, из условия $q(a_j) = 0$, где a_j — координата ступени, в которой давления равны нулю) и повторяют расчет вновь (разбивают новую площадку на ступени и т. д.).

Расчет заканчивается, если

$$\frac{a_{п(j+1)}}{a_{п(j)}} \leq \varepsilon,$$

где ε — принятая погрешность расчета.

На рис. 18, б показано распределение контактных давлений при $P = 1 \text{ кгс}$ (кривая 1 соответствует численному решению задачи, кривая 2 — точному).

Точность решения задачи зависит также от числа разбиений площадки контакта. В общем случае для оценки точности решения целесообразно увеличивать число первоначально принятых ступеней (в 1,5 — 2 раза).

* В результате расчета появляются растягивающие контактные давления.

Глава 30

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

КРИТЕРИИ СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ

Для оценки статической прочности при сложном напряженном состоянии используют критерии прочности или разрушения, зависящие от напряженного и деформированного состояния, а также механических свойств материала. Эти критерии позволяют перенести результаты опытов по разрушению образцов при простых напряженных состояниях на случай сложных напряженных состояний. В курсах сопротивления материалов их называют теориями или гипотезами прочности.

Условие статической прочности или разрушения удобно представить в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \lambda_0, \lambda_1, \dots) = \sigma_B, \quad (1)$$

где $\sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентное напряжение; σ_1, σ_2 и σ_3 — главные напряжения, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; λ_0, λ_1 — параметры, зависящие от механических свойств материала; σ_B — предел прочности материала при одноосном растяжении.

Эквивалентное напряжение устанавливает соответствие между сложным напряженным состоянием и одноосным растяжением.

Если в наиболее напряженной точке детали

$$\sigma_{\text{экв}} < \sigma_B, \quad (2)$$

то условие прочности считают выполненным. При

$$\sigma_{\text{экв}} \geq \sigma_B \quad (3)$$

наступает разрушение в опасной точке. Условие (3) является граничным для состояния прочности и разрушения. Условие прочности или разрушения можно представить через деформации

$$\varepsilon_{\text{экв}} = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \omega_0, \omega_1, \dots) = \varepsilon_B, \quad (4)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные деформации ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$); ω_0, ω_1 — параметры, зависящие от механических свойств материала; ε_B — удлинение в момент разрушения при одноосном растяжении.

В дальнейшем, ограничимся рассмотрением критериев прочности, выраженных в напряжениях.

Критерии статической прочности для пластичных материалов. Для пластичных материалов условия прочности при растяжении и сжатии совпадают. Разрушение таких материалов определяется преимущественно касательными напряжениями. Основными критериями разрушения являются критерий интенсивности напряжений, выражающий «среднее» касательное напряжение в точке, и критерий максимального касательного напряжения.

Критерий интенсивности напряжений (критерий Губера — Мизеса).

Для этого критерия условие прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_i < \sigma_B, \quad (5)$$

где интенсивность напряжений

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}; \quad (6)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ — нормальные и касательные напряжения в трех, взаимно перпендикулярных площадках, нормали к которым обозначены x, y, z .

Для плоского напряженного состояния, когда отличны от нуля компоненты σ_x, σ_y и τ_{xy} ,

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}. \quad (7)$$

Если оси x, y, z совпадают с главными осями напряженного состояния ξ, η, ζ , то

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_\xi - \sigma_\eta)^2 + (\sigma_\eta - \sigma_\zeta)^2 + (\sigma_\zeta - \sigma_\xi)^2}. \quad (8)$$

Последнее соотношение не зависит от обозначения главных осей. Если, например, $\sigma_\xi = \sigma_1, \sigma_\eta = \sigma_2, \sigma_\zeta = \sigma_3$, то

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (9)$$

В частном случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma_\xi^2 - \sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\eta^2} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}. \quad (10)$$

Критерий интенсивности напряжений (6) для плоского случая выражается эллипсом (рис. 1).

Если точка σ_ξ, σ_η находится внутри эллипса, условие прочности соблюдается, при переходе за пределы области наступает разрушение.

Для случая кручения главные напряжения

$$\sigma_\xi = -\sigma_\eta = \tau. \quad (11)$$

где τ — касательное напряжение в поперечном сечении (рис. 2, площадки главных напряжений направлены под углом 45° к оси вала). Отсюда, с учетом условий (5) и (10), следует связь предела прочности при кручении и растяжении:

$$\tau_B = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_B \approx 0,57 \sigma_B. \quad (12)$$

Это соотношение хорошо соответствует экспериментальным данным для пластичных материалов.

К р и т е р и й м а к с и м а л ь н ы х к а с а т е л ь н ы х н а п р я ж е н и й. В соответствии с этим критерием условие прочности

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_B, \quad (13)$$

где σ_1 и σ_3 — соответственно наибольшее (в алгебраическом смысле) и наименьшее напряжения.

Если главные напряжения σ_ξ, σ_η и σ_ζ не упорядочены по величине, то критерий прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{экр}} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\xi - \sigma_\eta \\ \sigma_\eta - \sigma_\zeta \\ \sigma_\zeta - \sigma_\xi \end{array} \right\}_{\max} < \sigma_B. \quad (14)$$

Для плоского напряженного состояния критерий максимальных касательных напряжений выражается шестиугольником, вписанным в эллипс. Как видно из рис. 1, оба критерия близки между собой.

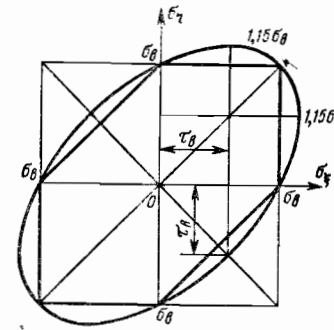


Рис. 1. Эллипс напряжений

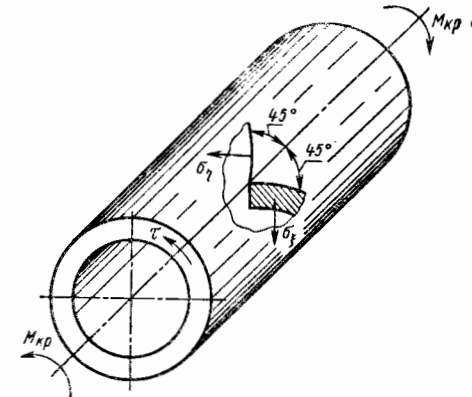


Рис. 2. Напряжения при кручении образца

Для случая кручения получаем

$$\tau_B = 0,5 \sigma_B. \quad (15)$$

Критерии пластичности. Критерии возникновения пластической деформации при сложном напряженном состоянии, как показали экспериментальные исследования, часто имеют такую же структуру, как и критерии разрушения, но величина σ_B заменяется на предел текучести σ_T .

Например, критерий пластичности Губера — Мизеса имеет вид

$$\sigma_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_\xi - \sigma_\eta)^2 + (\sigma_\eta - \sigma_\zeta)^2 + (\sigma_\zeta - \sigma_\xi)^2} = \sigma_T. \quad (16)$$

Развитие пластических деформаций, вплоть до разрушения путем среза, определяется в основном действием касательных напряжений. Перед разрушением могут возникнуть существенные изменения первоначальной формы детали, что следует учитывать при составлении условий разрушения.

В тех случаях, когда деформации стеснены и возникает объемное напряженное состояние, создаются условия, благоприятные для хрупкого разрушения. Для оценки прочности подобных состояний, приведенные критерии мало пригодны.

Например, при равномерном всестороннем растяжении ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) критерии (6) и (13) прогнозируют бесконечную прочность, что не соответствует физическому смыслу задачи.

В связи с указанным условия прочности

$$\sigma_{\text{экр}} < \sigma_B \quad (17)$$

по уравнениям (6) и (13) должны быть дополнены ограничением на величину наибольших растягивающих напряжений

$$\sigma_I = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \sigma_\zeta \end{array} \right\}_{\max} < \sigma_B. \quad (18)$$

Тогда общее условие прочности пластичных материалов получит вид

$$\sigma_I < \sigma_B \wedge \sigma_I < \sigma_B, \quad (19)$$

где \wedge — знак конъюнкции (знак логического умножения, т. е. одновременного осуществления двух событий).

Общее условие разрушения

$$\sigma_1 \geq \sigma_B \vee \sigma_1 \geq \sigma_B, \quad (20)$$

где \vee — знак дизъюнкции (знак логического суммирования, осуществление одного из событий или обоих событий вместе).

Критерии статической прочности для хрупких (малопластичных) материалов. Одно из важных свойств хрупких материалов — прочность при сжатии выше, чем при растяжении. Ответственными за разрушения являются преимущественно нормальные напряжения.

Критерий максимального нормального напряжения. В соответствии с этим критерием условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 < \sigma_B, \quad (21)$$

Возможность разрушения в области сжимающих напряжений отрицается. Для случая действия касательных напряжений (кручения)

$$\tau_k < \sigma_B. \quad (22)$$

где τ_k — разрушающее касательное напряжение.

Критерий максимальной деформации растяжения. По этому критерию условие прочности принимают в виде

$$\epsilon_1 < \epsilon_B, \quad (23)$$

где ϵ_1 — наибольшая деформация растяжения; ϵ_B — деформация в момент разрушения при растяжении образцов.

Для хрупких материалов принимают

$$\epsilon_B \approx \frac{\sigma_B}{E}, \quad (24)$$

где E — модуль упругости материала.

Далее предполагают, что в момент разрушения

$$\epsilon_1 \approx \frac{1}{E} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]. \quad (25)$$

Критерий прочности по максимальной деформации растяжения, выраженный в напряжениях, с учетом соотношений (24) и (25) будет

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) < \sigma_B. \quad (26)$$

Область прочности по этому критерию также простирается в бесконечность при сжимающих напряжениях.

Критерий прочности Мора. В соответствии с этим критерием условие разрушения зависит от величины как касательных, так и нормальных напряжений в опасной площадке.

Эквивалентное напряжение может быть записано в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_3 \sigma_3, \quad (27)$$

где λ_1 и λ_3 — постоянные материала.

Применим выражение (27) к условию разрушения $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_B$ для случая растяжения и сжатия. Так как при растяжении $\sigma_1 = \sigma_B$, $\sigma_3 = 0$, при сжатии $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_{\text{сж}}$, где $\sigma_{\text{сж}}$ — абсолютная величина предела прочности материала при сжатии, то получим соответственно

$$\sigma_{\text{экв}} = \lambda_1 \sigma_B = \sigma_B, \quad \sigma_{\text{экв}} = -\lambda_3 \sigma_{\text{сж}} = \sigma_B.$$

Рис. 3. Области прочности

$$\text{при } \chi = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}} = \frac{1}{2}$$

для различных отношений

$$\frac{\sigma_B}{\tau_k};$$

$$\triangle - \frac{\sigma_B}{\tau_k} = 2;$$

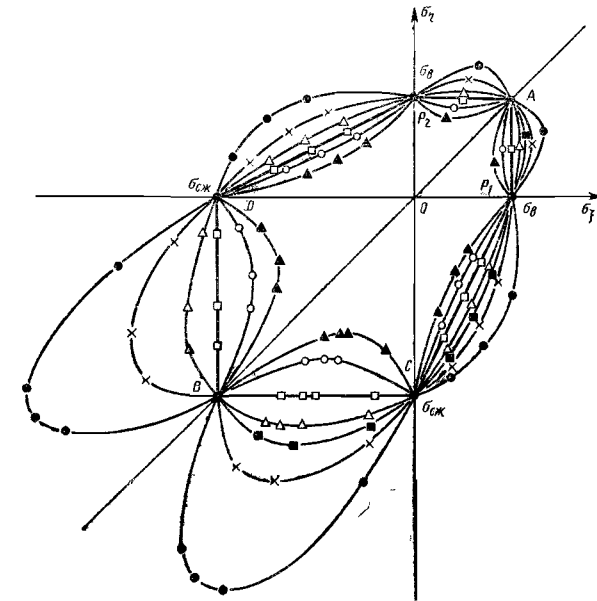
$$\circ - \frac{\sigma_B}{\tau_k} = \sqrt{3};$$

$$\square - \frac{\sigma_B}{\tau_k} = 1,5;$$

$$\Delta - \frac{\sigma_B}{\tau_k} = \frac{\sqrt{3}+1}{2};$$

$$\blacksquare - \frac{\sigma_B}{\tau_k} = 1,31;$$

$$\bullet - \frac{\sigma_B}{\tau_k} = 1; \quad \times - \frac{\sigma_B}{\tau_k} = 1,2.$$



Из последних соотношений определяем постоянные материала

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_3 = -\frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}}.$$

Условие прочности Мора приобретает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}} \sigma_3 < \sigma_B \quad (28)$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \chi \sigma_3 < \sigma_B, \quad (29)$$

где $\chi = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}}$.

Величина χ характеризует пластичность материалов, для очень хрупких материалов $\chi \rightarrow 0$. Если $\chi = 1$, то условие Мора совпадает с условием максимальных касательных напряжений.

На рис. 3 граница области прочности для критерия прочности Мора составляет неправильный шестиугольник AP_1CBDP_2 .

Для случая кручения, когда $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, из условия (29) предел прочности при срезе

$$\tau_k = \frac{\sigma_B}{1+\chi} = \frac{\sigma_B}{1+\frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}}} \quad (30)$$

или

$$\frac{\sigma_B}{\tau_k} = 1 + \chi. \quad (31)$$

Критерий прочности Писаренко — Лебедева. Рассматриваемый критерий может быть получен, если представить

$$\sigma_{\text{экв}} = \lambda_0 \sigma_1 + \lambda_1 \sigma_1, \quad (32)$$

где λ_0 и λ_1 — постоянные материала, σ_i и σ_1 — соответственно интенсивность напряжений и наибольшее напряжение.

Применяя условие разрушения

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_B$$

для случая растяжения и сжатия, найдем

$$\lambda_0 \sigma_B + \lambda_1 \sigma_B = \sigma_B; \quad \lambda_0 \sigma_{\text{сж}} = \sigma_B.$$

Из последних соотношений получаем

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}} = \chi; \quad \lambda_1 = 1 - \chi, \quad (33)$$

и критерий прочности Писаренко — Лебедева приобретает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 < \sigma_B. \quad (34)$$

При $\chi = 0,5$ этот критерий совпадает с критерием Сдобырева.

Для случая кручения $\sigma_i = \sqrt{3}\tau$, $\sigma_1 = \tau$

$$\tau_k = \frac{\sigma_B}{1 + (\sqrt{3} - 1)\chi} = \frac{\sigma_B}{1 + 0,73\chi}. \quad (35)$$

Граница области прочности по критерию Писаренко — Лебедева представляет собой неправильный эллипс, описанный относительно шестиугольника Мора (рис. 3).

Критерий Надаи. Эквивалентное напряжение представляется в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \lambda_0 \sigma_i + \frac{1}{3} \lambda_1 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (36)$$

Применяя критерий для растяжения и сжатия, найдем

$$\lambda_0 \sigma_B + \frac{1}{3} \lambda_1 \sigma_B = \sigma_B; \quad \lambda_0 \sigma_{\text{сж}} - \frac{1}{3} \lambda_1 \sigma_{\text{сж}} = \sigma_B$$

Из последних соотношений получаем условие прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{2} (1 + \chi) \sigma_i + \frac{1}{2} (1 - \chi) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) < \sigma_B, \quad (37)$$

где $\chi = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}}$; σ_i — интенсивность напряжения; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения.

Для прочности при кручении (срезе) из условия (37) находим

$$\tau_k = \frac{\sigma_B}{\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \chi)}. \quad (38)$$

Наиболее общими условиями прочности являются условия Мора и Писаренко — Лебедева, которые при $\chi = 1$ (пластичный материал) переходят соответственно в критерий максимальных касательных напряжений или интенсивности напряжений. При $\chi = 0$ (очень хрупкий материал) критерий Мора и Писаренко — Лебедева совпадают с критерием наибольших нормальных напряжений.

Однако при использовании критериев Мора или Писаренко — Лебедева требуется знание двух пределов прочности материала: при растяжении и сжатии. Если величина $\sigma_{\text{сж}}$ не известна, но имеются результаты опытов на кручение (среза), то по теории Мора

$$\chi = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}} = \frac{\sigma_B}{\tau_k} - 1, \quad (39)$$

по критерию Писаренко — Лебедева

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \left(\frac{\sigma_B}{\tau_k} - 1 \right) = 1,37 \left(\frac{\sigma_B}{\tau_k} - 1 \right). \quad (40)$$

КРИТЕРИИ ДЛИТЕЛЬНОЙ И МАЛОЦИКЛОВОЙ ПРОЧНОСТИ

Критерии длительной прочности. Для расчета длительной прочности могут быть использованы критерии прочности для хрупких материалов.

Условие длительной прочности

$$\sigma_{\text{экв}} < \sigma_{\text{дл}}(t, T), \quad (41)$$

где $\sigma_{\text{дл}}(t, T)$ — предел длительной прочности на растяжение при времени t и температуре T .

Критерий Мора для длительной прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \chi \sigma_3 < \sigma_{\text{дл}}(t, T), \quad (42)$$

где

$$\chi = \frac{\sigma_{\text{дл}}(t, T)}{\sigma_{\text{дл.сж}}(t, T)}, \quad (43)$$

$\sigma_{\text{дл.сж}}(t, T)$ — предел длительной прочности на сжатие.

На основании экспериментальных данных следует считать

$$\chi \leq 0,5. \quad (44)$$

Если величина $\sigma_{\text{дл.сж}}(t, T)$ неизвестна, то можно принять

$$\chi = 0,5. \quad (45)$$

Обобщенный критерий прочности для пластичных и хрупких материалов. Условие прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \lambda_0 \sigma_i + \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 < \sigma_B. \quad (46)$$

При надлежащем выборе параметров материала $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ условие (46) содержит как частные случаи многие практически применяемые критерии прочности.

В общем случае параметры материала определяют из базовых опытов на разрушение:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при растяжении } \sigma_i = \sigma_B; \sigma_1 = \sigma_B; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = 0; \\ \text{при сжатии } \sigma_i = \sigma_{\text{сж}}; \sigma_1 = 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\sigma_{\text{сж}}; \\ \text{при кручении } \sigma_i = \sqrt{3}\tau_k; \sigma_1 = \tau_k; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau_k. \end{array} \right\} \quad (47)$$

Если пренебречь влиянием «промежуточного» главного напряжения σ_2 на прочность и положить $\lambda_2 = 0$, то из условия (46) и (47) находим

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 = (2 + \sqrt{3}) \left(1 + \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}} - \frac{\sigma_B}{\tau_k} \right); \\ \lambda_1 = (2 + \sqrt{3}) \left(1 - \sqrt{3} - \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}} + \frac{\sigma_B}{\tau_k} \right); \\ \lambda_3 = (2 + \sqrt{3}) \left[1 + (\sqrt{3} - 1) \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}} - \frac{\sigma_B}{\tau_k} \right]. \end{array} \right\} \quad (48)$$

На рис. 3 показаны области прочности для различных значений $\frac{\sigma_B}{\tau_k}$ при $\frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}} = 0,5$.

В более общем случае можно использовать опыты на разрушение трубчатых образцов под действием гидравлического давления. Обозначая разрушающее (окружающее) напряжение σ_{Γ} , получим

$$\lambda_2 = 2 \frac{\sigma_B}{\sigma_{\Gamma}} - 1 + \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{сж}}} - \frac{\sigma_B}{\tau_k}. \quad (49)$$

При этом критерием прочности (46) и равенствами (48) можно воспользоваться, если известны значения $\sigma_B, \sigma_{\text{сж}}$ и τ_k .

Если какая-либо из трех экспериментальных характеристик не известна, то следует применять двухпараметрические критерии прочности (например, критерий Мора).

Критерии малоциклового прочностии. Критерий малоциклового прочностии при одноосном напряженном состоянии — предельный размах полных деформаций $\Delta \epsilon_a$ [см. гл. 2, формула (16)] обобщается на случай сложного напряженного состояния с помощью размаха интенсивности деформаций $\Delta \epsilon_i$, вычисляемого по разности главных деформаций ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 :

$$\Delta \epsilon_{экв} = \Delta \epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{[\Delta (\epsilon_1 - \epsilon_2)]^2 + [\Delta (\epsilon_2 - \epsilon_3)]^2 + [\Delta (\epsilon_3 - \epsilon_1)]^2}. \quad (50)$$

Если в наиболее деформируемой точке детали $\Delta \epsilon_{экв} = \Delta \epsilon_a$, то наступает разрушение.

Вопросы прочностии при малоциклового нагрузках рассмотрены в работе [5]. Критерии усталостной прочностии при сложном напряженном состоянии приведены в гл. 31.

РАСЧЕТ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ*

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ

Усталостные поломки составляют основной вид разрушения деталей машин и нередко приводят к тяжелым последствиям, так как возникают внезапно.

Связь величины разрушающего напряжения и числа циклов. Экспериментальные исследования показали, что характер разрушения конструкционных материалов (черных и цветных металлов, жаропрочных сплавов и др.) зависит от числа циклов нагружений.

При малом числе циклов в образце из пластичных материалов образуется шейка, и разрыв происходит по минимальному сечению — статическое разрушение (рис. 1). При числе циклов 10^2 — 10^4 появляется сетка трещин и заметные пластические деформации — наступает разрушение от малоциклового усталости. Разрушение имеет смешанный характер, в изломе видны отдельные участки усталостных разрушений. Наконец, при числе циклов $N > 10^6$ наблюдается типичное усталостное разрушение без заметных следов пластических деформаций. При уменьшении знакопеременного (разрушающего) напряжения σ число циклов нагружений N возрастает. Число циклов до разрушения имеет статистический разброс и обычно под N понимают среднее число циклов до разрушения.

На рис. 2 показаны типичные зависимости $\sigma = \varphi(N)$.

В логарифмических координатах эти зависимости характеризуются полигональной кривой (отрезками прямых линий). Кривая первого типа (рис. 2, а), типичная для деталей из углеродистых сталей, имеет при симметричном цикле нагружения предел выносливости σ_{-1} , при напряжениях $\sigma < \sigma_{-1}$ усталостное разрушение невозможно. Кривые второго типа (рис. 2, б, высоколегированные стали и титановые сплавы) после точки перелома имеют наклон ($\text{tg } \beta_0 \approx 0,1 \text{ tg } \beta_1$).

Для третьего типа кривых (рис. 2, в, легкие цветные металлы, жаропрочные сплавы в определенном интервале температур) наклон прямой сохраняется вплоть до очень малого уровня напряжений.

В общем случае пределом выносливости называют наибольшее напряжение цикла, которое может выдержать деталь (образец) без разрушения при базовом числе циклов N_0 . Базовое число циклов N_0 может быть больше или меньше N_0 .

Точка перелома кривых усталости (в логарифмических координатах) обычно соответствует числу циклов $N_0 = 10^6 \div 10^7$.

При числе циклов $N < N_1$ ($N_1 \approx 10^3 \div 10^4$) кривые усталости имеют еще один перелом, связанный с переходом в область малоциклового усталости, где возрастает роль пластического деформирования.

* Первоначальные сведения см. гл. 2.

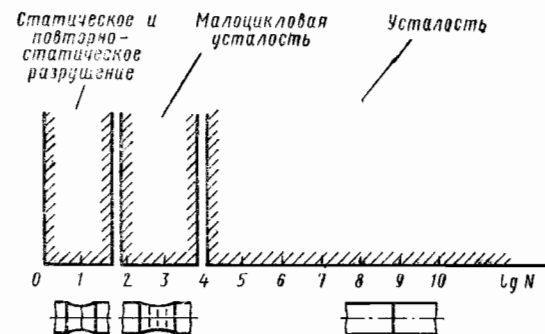


Рис. 1. Типы разрушений в зависимости от числа циклов

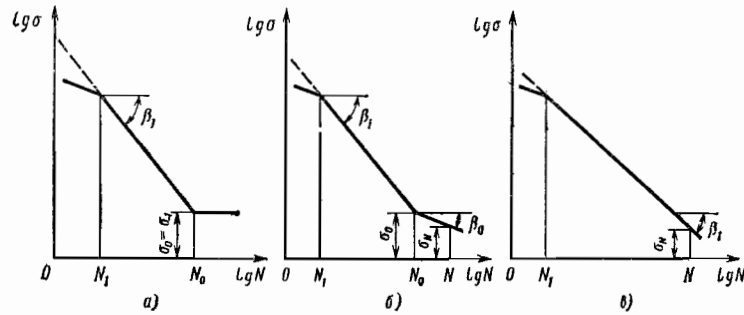


Рис. 2. Три вида зависимости $\sigma = \varphi(N)$

Разделение усталостных кривых на три типа является условным.

На практике способность материала сопротивляться переменным напряжениям характеризуют величиной переменного разрушающего напряжения σ_r при определенном числе циклов N_G (базе испытаний). Обычно принимают $N_G = 2 \cdot 10^6 \div 5 \cdot 10^7$ циклов.

Уравнение кривой выносливости. Простая и достаточно точная зависимость между σ и N может быть принята в виде

$$\sigma^m N = C \quad (N_1 \ll N < N_0), \quad (1)$$

где m и C — постоянные, зависящие от свойств материала, температуры испытания, окружающей среды.

В логарифмических координатах уравнение (1) соответствует прямой линии

$$\lg \sigma = -\frac{1}{m} \lg N + \frac{1}{m} \lg C. \quad (2)$$

Тангенс угла наклона прямой β_1 по абсолютной величине

$$|\operatorname{tg} \beta_1| = \frac{1}{m}. \quad (3)$$

При увеличении m наклон уменьшается, а при $m \rightarrow \infty$ прямая становится горизонтальной. Обычно значения m лежат в пределах $m = 4 \div 10$, а для деталей с концентрацией напряжений $m = 4 \div 6$.

Точка перелома A_0 (рис. 3) принадлежит прямой $A_1 A_0$ и потому

$$C = \sigma_0^m N_0. \quad (4)$$

Зависимость (1) иногда удобно представить в виде

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m = \frac{N_0}{N}. \quad (5)$$

Если продолжить прямую $A_1 A_0$ до пересечения с осью ординат, то получим предельное сопротивление σ_l , не совпадающее с пределом прочности σ_B .

Из соотношения (5) при $N = 1$ следует

$$\sigma_l = \sigma_0 \sqrt[m]{N_0}. \quad (6)$$

Если предел выносливости принять равным разрушающему напряжению в точке перелома $\sigma_{-1} = \sigma_0$ и $N_0 = 10^7$ циклов, то

$$\sigma_l = \sigma_{-1} \cdot 10^{\frac{7}{m}}, \quad (7)$$

обычно $\sigma_l \approx (3 \div 10) \sigma_{-1}$.

При числе циклов $N > N_0$ также справедлива линейная зависимость (в логарифмических координатах)

$$\sigma^{m_0} N = C_0, \quad (8)$$

причем m_0 значительно больше m (приблизительно $m_0 \approx 10 m$). Так как точка A_0 одновременно принадлежит прямой (1) и (8), то постоянные C и C_0 связаны соотношением

$$C_0 = C \sigma_0^{m_0 - m}. \quad (9)$$

В области малоциклового усталости удовлетворительное описание можно получить также с помощью прямолинейной зависимости,

$$\sigma^{m_1} N = C_1. \quad (10)$$

Если прямая проходит через точку A_2 , то

$$C_1 = \sigma_B^{m_1}. \quad (11)$$

Приблизительно для точки A_1 можно принять $\sigma_1 \approx \sigma_r$.

Число циклов N_1 , соответствующее переходу в малоцикловую область,

$$N_1 \approx \left(\frac{\sigma_B}{\sigma_r}\right)^{m_1}. \quad (12)$$

Обычно N_1 составляет $10^3 - 10^4$ циклов.

Влияние постоянных напряжений. Зависимость предельного значения амплитуды переменных напряжений (предела выносливости по амплитуде при асимметричном цикле) $\sigma_{ап}$ от среднего (статического) напряжения σ_m , действующего в той же точке сечения, показана на рис. 4.

Если постоянное напряжение отсутствует, то $\sigma_{ап} = \sigma_{-1}$. При действии постоянных напряжений, равных пределу прочности: $\sigma_m = \sigma_B$, наступает разрушение уже при $\sigma_{ап} = 0$.

Исследования показывают, что при сжимающих постоянных напряжениях предел выносливости повышается (затрудняется зарождение и развитие усталостной трещины). В этом состоит одна из главных причин возрастания усталостной прочности в результате создания сжимающих остаточных напряжений в поверхностных слоях от упрочняющей обработки.

Для расчетов используют аналитические зависимости $\sigma_{ап} = f(\sigma_m)$ (см. рис. 4). Наибольшее практическое применение получила линейная зависимость (рис. 5, а).

$$\sigma_{ап} = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m, \quad (13)$$

где коэффициент ψ_σ принимают по данным табл. 3 гл. 2.

В области сжимающих постоянных напряжений $\psi_\sigma \approx 0$.

В тех случаях, когда известен предел выносливости при пульсирующем (отнулевом) цикле σ_0 , напряжения возрастают от нуля до σ_0 , предельную прямую можно принять проходящей через точку пульсирующего цикла. Тогда в равенстве (13)

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \quad (14)$$

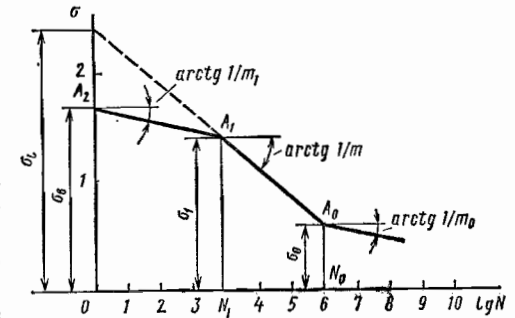


Рис. 3. Зависимость «напряжение — число циклов до разрушения» (в обозначениях опущен знак логарифма)

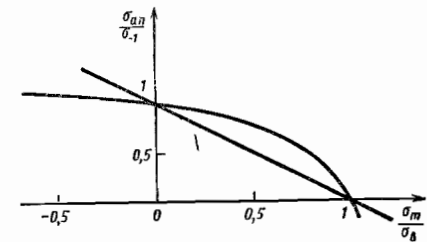


Рис. 4. Влияние постоянного (статического) напряжения на предел выносливости (кривая предельных амплитуд)

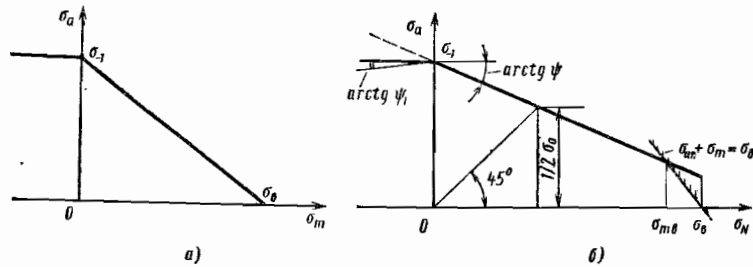


Рис. 5. Кусочно-линейные кривые предельных амплитуд

При использовании последнего равенства следует ввести ограничение по статической прочности, приняв (рис. 5, б)

$$\sigma_{ан} = \sigma_B - \sigma_m \tag{15}$$

при

$$\sigma_m > \sigma_{mv} = \frac{\sigma_B - \sigma_{-1}}{1 - \psi_\sigma} \tag{16}$$

Кроме линейных, можно использовать зависимости более сложного вида

$$\left(\frac{\sigma_{ан}}{\sigma_{-1}}\right)^\alpha = 1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right)^\beta \tag{17}$$

где α и β — постоянные материала.

Для углеродистых и легированных сталей удовлетворительные результаты дает зависимость (17) при $\alpha = 2$, $\beta = 1$:

$$\frac{\sigma_{ан}}{\sigma_{-1}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B}} \tag{18}$$

Для титановых, алюминиевых сплавов и жаропрочных сплавов можно принять $\alpha = \beta = 1$.

Влияние концентрации напряжений. При действии переменных нагрузок концентрация напряжений представляет большую опасность. Значительное число усталостных разрушений связано с недостаточными радиусами закруглений, наличием рисок, отверстий и других источников повышенных напряжений. Усталостная прочность, в противоположность статической, имеет резко выраженный локальный характер, что и объясняет существенное влияние местного увеличения напряжений, точечных дефектов материала и т. п.

Концентрация напряжений характеризуется *теоретическим коэффициентом концентрации напряжений*

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \tag{19}$$

где σ_{max} — максимальное напряжение в зоне повышенных напряжений; σ_n — номинальное напряжение в этой зоне. Номинальное напряжение определяется по простейшим расчетным формулам, однако всегда должен быть указан конкретный способ их определения. Значения теоретических коэффициентов концентрации напряжений для различных источников концентрации приведены в гл. 28.

Экспериментальные исследования усталостной прочности показали, что усталостные разрушения начинаются в местах концентрации напряжений при условии

$$\sigma_{max \text{эф}} = (\sigma_{-1})_d \tag{20}$$

где $(\sigma_{-1})_d$ — предел выносливости, определяемый при испытании гладких образцов. Величина $(\sigma_{-1})_d$ соответствует значению номинального напряжения при усталостном

разрушении. Испытания показали, что величина эффективного максимального напряжения всегда меньше максимального напряжения, определенного (расчетом или экспериментально) для идеально упругого материала:

$$\sigma_{max \text{эф}} \leq \sigma_{max} \tag{21}$$

Для расчета удобно ввести понятие *эффективного коэффициента концентрации напряжений*

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{max \text{эф}}}{\sigma_n} \tag{22}$$

Условие (21) означает

$$k_\sigma \leq \alpha_\sigma \tag{23}$$

причем равенство возможно для деталей больших размеров и для материалов с повышенной чувствительностью к концентрации напряжений.

Учитывая условие усталостного разрушения (20), можно записать

$$k_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_k} d \tag{24}$$

где $(\sigma_{-1})_d$ — предел выносливости детали (образца) с концентрацией напряжений $(\sigma_{-1})_k$ — предел выносливости гладкого образца (детали) того же размера.

Зависимость между α_σ и k_σ обычно выражается следующим соотношением:

$$k_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1) \tag{25}$$

где q — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений, значения которого для различных материалов приведены ниже:

Литые материалы и материалы с внутренними источниками концентрации и дефектами (серый чугун и др.)	0,1—0,2
Литые жаропрочные сплавы, стальное и алюминиевое литье, модифицированные чугуны	0,1—0,4
Низкоуглеродистые стали, жаропрочные деформируемые сплавы, аустенитные коррозионно-стойкие стали, алюминиевые деформируемые сплавы	0,3—0,5
Среднеуглеродистые стали, низколегированные стали	0,4—0,6
Конструкционные легированные стали	0,6—0,7
Высоколегированные стали (типа коррозионно-стойких сталей мартенситного класса), титановые сплавы	0,7—0,9

Величина q возрастает при увеличении абсолютных размеров; при очень сильных источниках концентрации ($\alpha_\sigma > 10$) наступает своеобразное «насыщение» и величина q уменьшается.

Для учета «насыщения» при увеличении концентрации напряжений величину q в равенстве (25) можно принять в виде

$$q = \frac{q_0}{1 + a(\alpha_\sigma - 1)} \tag{26}$$

где q_0 и a — постоянные материала. Приближенно

$$q_0 \approx (1,1 \div 1,2) q_{табл}; \quad a = 0,1 \div 0,3 \tag{27}$$

где $q_{табл}$ принимают равным значениям q , приведенным выше.

Из равенств (25) и (26) следует, что максимально возможное значение эффективного коэффициента концентрации напряжений при $\alpha_\sigma \rightarrow \infty$

$$k_{\sigma max} = 1 + \frac{q_0}{a} \tag{28}$$

Влияние абсолютных размеров детали (масштабного фактора). Экспериментально установлено, что с увеличением абсолютных размеров деталей их усталостная прочность снижается (масштабный эффект). Это объясняется статистической теорией разрушения, в соответствии с которой при увеличении абсолютных размеров возра-

стает вероятность попадания дефектных зерен материала в зону повышенных напряжений.

Существуют и другие причины, способствующие проявлению масштабного эффекта: меньшая однородность материала в деталях больших размеров (например, в валах диаметром > 200 мм), трудность обеспечения стабильности технологического процесса, условий контроля и т. п.

Масштабный эффект оценивают с помощью коэффициента

$$\epsilon_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}}, \quad (29)$$

где $(\sigma_{-1})_d$ — предел выносливости гладкого образца (детали) диаметром d ; σ_{-1} — предел выносливости материала, определяемый на стандартных гладких образцах, обычно диаметром $d_0 = 7 \div 10$ мм.

Масштабный эффект зависит главным образом от поперечных размеров («диаметра») изделия и в меньшей степени — от его длины. В литых материалах, в деталях и материалах, имеющих рассеянные микро- и макродефекты (неметаллические включения, поры и т. п.), крупнозернистое строение, масштабный эффект сказывается сильнее. Легированные стали более чувствительны к неметаллическим включениям и другим дефектам, и для них влияние абсолютных размеров проявляется в большей степени, чем для углеродистых сталей.

При увеличении абсолютных размеров (характерный диаметр детали d) масштабный коэффициент стремится к определенному пределу ϵ_{∞} . Для оценки масштабного коэффициента можно использовать зависимость

$$\epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\infty} + (1 - \epsilon_{\infty}) e^{-\lambda d}. \quad (30)$$

В приближенных расчетах можно принимать: $\epsilon_{\infty} = 0,5$ — для деформируемых материалов (сталей, титановых и алюминиевых сплавов и т. д.); $\epsilon_{\infty} = 0,4$ — для литых материалов. Величину λ в первом приближении можно принять равной $0,01-0,03, 1/\text{мм}$.

Влияние состояния поверхности и упрочнения. Состояние поверхности детали, как показали экспериментальные исследования, существенным образом влияет на сопротивление усталости.

Влияние состояния поверхности на выносливость характеризуется коэффициентом

$$\beta_{\sigma}^{(k)} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_d} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1k})_d}, \quad (31)$$

где $(\sigma_{-1})_d$ — предел выносливости детали диаметром d с определенным состоянием поверхности; $(\sigma_{-1k})_d$ — предел выносливости образца (или аналогичной детали) диаметром d , имеющей такую же концентрацию напряжений, что и деталь, но с состоянием поверхности, соответствующим стандартному образцу.

Таким образом, значения $(\sigma_{-1})_d$ и $(\sigma_{-1k})_d$ могут различаться только из-за состояния поверхности стандартного слоя.

Если влияние состояния поверхности устанавливается для детали, не имеющей концентрации напряжений, то коэффициент состояния поверхности

$$\beta_{\sigma}^{(0)} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_d}. \quad (32)$$

Коэффициенты состояния поверхности при наличии и отсутствии концентрации напряжений различаются между собой. Это объясняется тем, что взаимное влияние различных источников концентрации напряжений подчиняется статистическим закономерностям.

Коэффициент β_{σ} зависит от трех основных факторов: шероховатости поверхности и механических свойств поверхностного слоя;

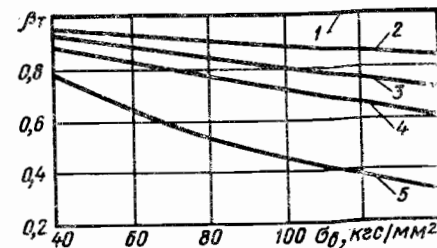


Рис. 6. Зависимость β_T от предела прочности материала (углеродистая и легированная стали):

1 — полирование; 2 — шлифование; 3 — тонкое точение; 4 — грубое точение; 5 — наличие скалывания

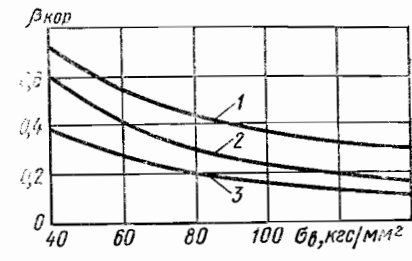


Рис. 7. Зависимость $\beta_{кор}$ от предела прочности материала детали:

1 — пресная вода (образец с концентрацией напряжений); 2 — то же, образец без концентрации напряжений, а также образец с концентрацией напряжений в морской воде; 3 — морская вода (образец без концентрации напряжений)

наличия коррозионных повреждений (фреттинг-коррозия, воздействие морской воды и т. д.);

упрочняющей поверхностной обработки (обдувка дробью и т. д.).

В связи с этим величину коэффициента состояния поверхности можно представить в виде произведения:

$$\beta_{\sigma}^{(k)} = \beta_T^{(k)} \beta_{кор}^{(k)} \beta_{уп}^{(k)}, \quad (33)$$

$$\beta_{\sigma}^{(0)} = \beta_T^{(0)} \beta_{кор}^{(0)} \beta_{уп}^{(0)}, \quad (34)$$

где индексы k и 0 означают соответственно наличие или отсутствие концентрации напряжений в деталях (образцах).

Коэффициент β_T (рис. 6) отражает влияние шероховатости. Предполагается, что остаточные напряжения и механические свойства в поверхностном слое при различных состояниях поверхности не отличаются существенно между собой.

Легированные стали целесообразно использовать для изготовления деталей, если технологические процессы обеспечивают хорошее качество поверхности (шероховатость поверхности, прочность, пластическая деформация поверхностных слоев и остаточные напряжения в них).

Можно считать, что влияние качества поверхности находится в прямой зависимости от коэффициента чувствительности к концентрации напряжений. Влияние наклепа и остаточных напряжений рассматривается в дальнейшем.

Значение коэффициентов $\beta_T^{(k)}$ и $\beta_T^{(0)}$ определяется как отношение пределов выносливости деталей, изготовленных по действующей технологии, к пределу выносливости аналогичного образца (или детали), выполненного по «стандартной технологии».

Практически установлено существенное влияние коррозии на усталостную прочность. С увеличением времени наработки в коррозионной среде и числа циклов сопротивление усталости непрерывно падает. Это объясняется возникновением и развитием коррозионных микротрещин, которые становятся дополнительными источниками концентрации напряжений. Обычно коррозия возникает при работе в пресной или морской воде, при работе в агрессивных средах.

Снижение пределов выносливости в результате коррозионного повреждения поверхностного слоя характеризуется коэффициентами $\beta_{кор}^{(k)}$ — для образцов с концентрацией напряжений и $\beta_{кор}^{(0)}$ — для гладких деталей или образцов (рис. 7). Особо велико влияние коррозии на стали с высокими пределами прочности,

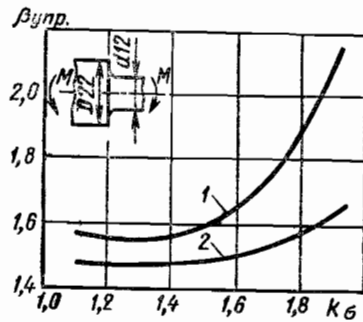


Рис. 8. Изменение коэффициента $\beta_{уп}$ от k_{σ} в галтелях образцов из стали 45ХН ($\sigma_B = 116$ кгс/мм²), подвергнутых дробеструйной обработке:

1 — раскод дробью $Q = 10$ кгс/мин при частоте вращения ротора машины $n_p = 3500$ об/мин; 2 — при $Q = 20$ кгс/мин, $n_p = 2100$ об/мин

тинг-коррозии $\beta_{кор} = 0,4 + 0,6$ — для прессовых соединений деталей из среднеуглеродистых легированных сталей.

Для уменьшения влияния фреттинг-коррозии увеличивают твердость контактирующих поверхностей, применяют поверхностный наклеп, а также мягкие покрытия (омеднение, серебряные, полимерные пленки).

Коэффициенты $\beta_{уп}^{(к)}$ и $\beta_{уп}^{(0)}$ равны отношениям пределов выносливости деталей при упрочняющей технологии и деталей, изготовленных без ее применения.

Основные методы упрочнения: пластическое деформирование (наклеп) с помощью обдувки дробью, обкатки роликами и т. п. (рис. 8, $\beta_{уп}^{(к)} = 1,3 \div 2,2$; $\beta_{уп}^{(0)} = 1,1 + 1,4$);

химико-термическая обработка (цементация, азотирование, цианирование и т. д.), обычно $\beta_{уп}^{(к)} = 1,3 \div 2,5$; $\beta_{уп}^{(0)} = 1,1 + 1,3$;

специальная термическая обработка (нагрев до умеренных температур и быстрое охлаждение поверхности для создания сжимающих остаточных напряжений); обычно $\beta_{уп}^{(к)} = 1,6 \div 2,5$, $\beta_{уп}^{(0)} = 1,2 \div 1,5$.

Эффект пластического деформирования сказывается в большей степени на деталях из материалов повышенной прочности (твердости) и при наличии концентрации напряжений. При химико-термической обработке создается высокая твердость поверхностного слоя, что повышает его износостойкость. В результате физико-химических процессов в поверхностных слоях создаются также остаточные напряжения сжатия.

Закалка токами высокой частоты увеличивает прочность поверхностных слоев благодаря остаточным напряжениям, возникающим в детали после быстрого ее охлаждения.

Значения коэффициентов $\beta_{уп}^{(к)}$ и $\beta_{уп}^{(0)}$ в значительной степени зависят от режимов обработки деталей.

Более подробно влияние технологии на прочность см. гл. 34.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ВЫНОСЛИВОСТИ ДЕТАЛЕЙ

Экспериментальное определение. Наиболее точным способом определения предела выносливости детали является экспериментальное исследование в условиях, наиболее полно имитирующих реальные условия работы. Испытания проводят с помощью универсальных или специальных машин для испытания на усталость.

Одним из эффективных способов увеличения пределов выносливости при коррозии является создание сжимающих напряжений в поверхностных слоях (обдувка дробью, обкатка и др.). С применением титана вместо стали часто резко повышается усталостная прочность благодаря антикоррозионным свойствам титана. Применяют различные покрытия (хромирование, полимерные покрытия) для ослабления коррозионного воздействия.

В соединениях, осуществляемых с помощью плотных посадок (прессовые, фланцевые, замковые и т. п.), при воздействии переменных напряжений возникают микросмещения (порядка 0,0025 мм), приводящие к разрушению поверхностного слоя. В зоне контакта протекают не только процессы механического износа, но и физико-химические процессы (окисления и др.). Усталостные разрушения образуются при низких переменных напряжениях (2—8 кгс/мм²), что свидетельствует о значительном влиянии фреттинг-коррозии (коррозии трения). При наличии фрет-

Среди универсальных машин большое распространение получили электродинамические возбудители вибраций, позволяющие создать переменные напряжения с частотой от 50 до 10 000 Гц. Для определения предела выносливости испытывают 6—20 образцов. При необходимости получения статистических оценок число испытываемых деталей увеличивают до нескольких десятков. Методика экспериментальных исследований усталостной прочности изложена в работах [2, 4].

Однако экспериментальное исследование натуральных элементов (крупногабаритные детали и другие изделия, изготавливаемые в небольшом количестве) не всегда возможно и целесообразно.

В таких случаях проводят испытания образцов, имитирующих напряженное состояние в опасных зонах детали с наибольшим приближением по источникам концентрации напряжений, абсолютным размерам, технологии, покрытиям, температуре, среде и т. п.

Расчетно-экспериментальное определение. Расчет пределов выносливости основывается на системе экспериментальных данных, полученных с помощью испытания образцов.

Предел выносливости материала определяют испытаниями стандартных гладких образцов диаметром d_0 (обычно $d_0 = 7 \div 10$ мм). Образец изготавливают по определенной технологии, включающей термообработку, и с определенным качеством поверхности, которое принимают в качестве базового в дальнейшей системе оценок. Образец подвергают испытаниям на выносливость при определенном напряженном состоянии (например, при переменном изгибе или кручении). Последующие эксперименты проводят при том же виде напряженного состояния.

Предел выносливости детали $(\sigma_{-1к})_d$ с характерным размером (диаметром) d и концентрацией напряжений можно определить с помощью оценки влияния каждого фактора в отдельности. Это можно сделать двумя способами:

$$(\sigma_{-1к})_d = \sigma_{-1} \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}} \frac{(\sigma_{-1к})_d}{(\sigma_{-1})_d} = \sigma_{-1} \epsilon_{\sigma}^{(0)} \frac{1}{k_{\sigma d}} \quad (35)$$

или

$$(\sigma_{-1к})_d = \sigma_{-1} \frac{(\sigma_{-1к})_{d_0}}{\sigma_{-1}} \frac{(\sigma_{-1к})_d}{(\sigma_{-1к})_{d_0}} = \sigma_{-1} \frac{\epsilon_{\sigma}^{(к)}}{k_{\sigma}^{(0)}}, \quad (36)$$

где

$$\epsilon_{\sigma}^{(0)} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}} \quad (37)$$

масштабный фактор гладких образцов;

$$k_{\sigma d} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1к})_d} \quad (38)$$

эффективный коэффициент концентраций напряжений для образцов диаметра d ;

$$\epsilon_{\sigma}^{(к)} = \frac{(\sigma_{-1к})_d}{(\sigma_{-1к})_{d_0}} \quad (39)$$

масштабный фактор для образцов с концентрацией напряжений;

$$k_{\sigma}^{(0)} = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1к})_{d_0}} \quad (40)$$

эффективный коэффициент концентрации напряжений для стандартных образцов диаметра d_0 .

В первом способе масштабный эффект учитывают по гладким образцам, а эффективный коэффициент концентрации напряжений определяют при основной размерности детали. Во втором случае величину $k_{\sigma}^{(0)}$ устанавливают на образцах малого (стандартного) диаметра, а масштабный фактор — на образцах с концентрацией напряжений.

Можно сразу учесть концентрацию напряжений и масштабный фактор:

$$(\sigma_{-1k})_d = \sigma_{-1} \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_{-1}} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma e}}, \quad (41)$$

где

$$k_{\sigma e} = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1k})_d} \quad (42)$$

эффективный коэффициент концентрации (относительно стандартного, гладкого образца).

Сопоставляя равенства (41), (35), (36), находим

$$k_{\sigma e} = \frac{k_{\sigma d}}{\epsilon_{\sigma}^{(0)}} = \frac{k_{\sigma}^{(0)}}{\epsilon_{\sigma}^{(k)}}. \quad (43)$$

Выбор расчетной формулы (35) или (36) зависит от имеющихся значений коэффициентов k_{σ} и ϵ_{σ} . При расчетном определении предела выносливости следует также учесть влияние поверхностного слоя.

Определение предела выносливости детали σ_{-1d} с помощью оценки влияния отдельных факторов можно сделать различными способами. Если влияние концентрации напряжений и масштабного фактора известно, то

$$\sigma_{-1d} = \sigma_{-1} \frac{\sigma_{-1k}}{\sigma_{-1}} \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_{-1k}} \frac{(\sigma_{-1k})_{dn}}{(\sigma_{-1k})_d} = \sigma_{-1} \frac{\epsilon_{\sigma}^{(k)} (\sigma_{-1k})_{dn}}{k_{\sigma}^{(0)} (\sigma_{-1k})_d} = \sigma_{-1} \frac{\beta_{\sigma}^{(k)}}{k_{\sigma e}}, \quad (44)$$

где

$$\beta_{\sigma}^{(k)} = \frac{(\sigma_{-1k})_{dn}}{(\sigma_{-1k})_d} \quad (45)$$

коэффициент состояния поверхности для образца с концентрацией напряжений размера d . Если ввести общий эффективный коэффициент концентрации напряжений, учитывающий сразу концентрацию напряжений, масштабный фактор и состояние поверхности

$$k_{\sigma d} = \frac{k_{\sigma e}}{\beta_{\sigma}^{(k)}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1d}}, \quad \text{то} \quad \sigma_{-1d} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma d}}. \quad (46)$$

Величина $k_{\sigma d}$ определяется при натурных испытаниях. При расчетно-экспериментальном определении предела выносливости основной зависимостью является следующая

$$\sigma_{-1d} = \sigma_{-1} \frac{\epsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}}{k_{\sigma}}. \quad (47)$$

Взаимосвязанное определение коэффициентов k_{σ} , ϵ_{σ} , β_{σ} указывалось ранее.

УСЛОВИЯ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ

Простое (однокомпонентное) напряженное состояние. Рассмотрим изгиб гладкого вала при действии переменных и постоянных нормальных напряжений. Пусть в опасной точке наиболее нагруженного поперечного сечения действует переменное σ_a и постоянное σ_m напряжения. Принимая линейную зависимость (13), представим условие усталостной прочности в виде

$$\sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m = \sigma_{-1}, \quad (48)$$

где ψ_{σ} — коэффициент влияния постоянных нормальных напряжений. Если ввести понятие эквивалентного переменного напряжения

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m, \quad (49)$$

то условие усталостной прочности будет

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{-1}. \quad (50)$$

При наличии концентрации напряжений и при учете масштабного и поверхностного факторов их действие, как показали экспериментальные исследования, следует отнести только к переменной составляющей цикла. Тогда условие усталостной прочности приобретает вид

$$\sigma_a \frac{k_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}} + \psi_{\sigma} \sigma_m = \sigma_{-1}. \quad (51)$$

Эквивалентное переменное напряжение при наличии концентрации напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_a \frac{k_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}} + \psi_{\sigma} \sigma_m. \quad (52)$$

Часто условие усталостной прочности детали удобно записать в другой форме:

$$\sigma_a + \psi_{\sigma d} \sigma_m = \sigma_{-1d}, \quad (53)$$

где $\psi_{\sigma d} = \psi_{\sigma} \frac{\epsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}}{k_{\sigma}}$ — коэффициент влияния постоянных напряжений для детали;

$\sigma_{-1d} = \sigma_{-1} \frac{\epsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}}{k_{\sigma}}$ — предел выносливости детали.

В равенстве (53) величины σ_a и σ_m представляют собой номинальные напряжения в опасной точке детали.

Для условия (50) эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m. \quad (54)$$

При действии касательных напряжений условие усталостной прочности имеет вид

$$\tau_a + \psi_{\tau} \tau_m = \tau_{-1}, \quad (55)$$

где τ_{-1} — предел выносливости при кручении; ψ_{τ} — коэффициент влияния постоянных касательных напряжений.

Для деталей с учетом концентрации напряжений, состояния поверхности и масштабного фактора

$$\tau_a \frac{k_{\tau}}{\epsilon_{\tau} \beta_{\tau}} + \psi_{\tau} \tau_m = \tau_{-1} \quad (56)$$

или

$$\tau_a + \psi_{\tau d} \tau_m = \tau_{-1d}. \quad (57)$$

Сложное (многокомпонентное) напряженное состояние. Рассмотрим сначала действие переменных напряжений, изменяющихся по симметричному циклу (постоянное напряжение отсутствует).

На основании экспериментальных исследований для обычных конструкционных материалов можно принять следующее условие усталостной прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{ia} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + \dots + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 + 6(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2)} = \sigma_{-1}, \quad (58)$$

где σ_{ia} — интенсивность переменных напряжений.

Для случая переменного изгиба и кручения вала

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xa} &= \sigma_a; \quad \sigma_{ya} = 0; \quad \sigma_{za} = 0; \\ \tau_{xya} &= \tau_a; \quad \tau_{yza} = 0; \quad \tau_{zxa} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

и условие (58) будет иметь вид

$$\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} = \sigma_{-1}. \quad (60)$$

Поэтому можно записать следующую зависимость пределов выносливости при кручении и растяжении-сжатии (изгибе)

$$\tau_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{-1} = 0,57\sigma_{-1}. \quad (61)$$

Это значение хорошо подтверждается экспериментально для многих пластичных материалов. Если величина τ_{-1} отличается от указанного значения, то можно ввести скорректированные двухпараметрические условия усталостной прочности в виде

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} = \sigma_{-1}. \quad (62)$$

В более общей форме условие усталостной прочности (62) будет

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 + \dots} + 2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 (\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2) = \sigma_{-1}. \quad (63)$$

Для малопластичных и хрупких материалов дополнительное влияние на прочность оказывают переменные нормальные напряжения. Условие усталостной прочности в этом случае можно представить в виде

$$\lambda_0 \sigma_{1a} + \lambda_1 \sigma_{1a} = \sigma_{-1}. \quad (64)$$

где λ_0 , λ_1 — подлежащие определению параметры материала; σ_{1a} — наибольшее главное переменное напряжение.

Применяя условие (50) для испытания на выносливость при действии нормальных напряжений, находим

$$\sigma_{1a} = \sigma_{-1}; \quad \sigma_{1a} = \sigma_{-1}; \quad \lambda_0 + \lambda_1 = 1. \quad (65)$$

Для случая переменного кручения

$$\sigma_{1a} = \sqrt{3}\tau_{-1}; \quad \sigma_{1a} = \tau_{-1}; \quad \lambda_0 \sqrt{3} + \lambda_1 = \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}. \quad (66)$$

Из уравнений (65) и (66) следует

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right); \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \left(\sqrt{3} - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right).$$

Внося значения λ_0 и λ_1 в условие (64), находим

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right) \sigma_{1a} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} \left(\sqrt{3} - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) \sigma_{1a} = \sigma_{-1}. \quad (67)$$

Последнее условие усталостной прочности является более общим, чем условие (63). При условии (61) соотношения (68) и (67) совпадают, для хрупких материалов при $\tau_{-1} = \sigma_{-1}$ согласно условию (67) получим

$$\sigma_{эка} = \sigma_{1a} = \sigma_{-1}. \quad (68)$$

Для деталей каждый из компонентов переменного напряженного состояния должен быть соответствующим образом увеличен с учетом концентрации напряжений, масштабного фактора и состояния поверхности. В результате условие усталостной прочности (58) для детали будет

$$\sigma_{1a} = \sigma_{-1д}. \quad (69)$$

где $\sigma_{-1д}$ — предел выносливости детали. Подобным образом преобразуются и другие условия прочности (величины σ_{-1} и τ_{-1} заменяются на $\sigma_{-1д}$ и $\tau_{-1д}$). В общем случае каждый компонент напряженного состояния имеет переменную и постоянную составляющие: σ_{xa} , σ_{xm} , σ_{ya} , σ_{ym} , ...

Условие усталостной прочности можно получить путем обобщения соотношения (48), вводя в него эквивалентные напряжения

$$\sigma_{эка} + \psi_\sigma \sigma_{экм} = \sigma_{-1}, \quad (70)$$

где $\sigma_{эка}$ и $\sigma_{экм}$ — эквивалентные переменные и постоянные напряжения.

Для переменных напряжений в качестве эквивалентного целесообразно выбрать интенсивность напряжений — условие (58) или скорректированную интенсивность напряжений — условие (63).

Для постоянных напряжений можно использовать наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{экм} = \sigma_{1m}. \quad (71)$$

Другой способ учета асимметрии цикла при сложном напряженном состоянии заключается в приведении его к симметричному циклу путем линейного преобразования, тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x(n)} &= \sigma_{xa} + \psi_\sigma \sigma_{xm}; \\ \sigma_{y(n)} &= \sigma_{ya} + \psi_\sigma \sigma_{ym}; \\ \sigma_{z(n)} &= \sigma_{za} + \psi_\sigma \sigma_{zm}; \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy(n)} &= \tau_{xya} + \psi_\tau \tau_{xym}; \\ \tau_{yz(n)} &= \tau_{yza} + \psi_\tau \tau_{yzm}; \\ \tau_{zx(n)} &= \tau_{zxa} + \psi_\tau \tau_{zxm}; \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Условие усталостной прочности для интенсивности приведенных напряжений:

$$\sigma_{1(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{x(n)} - \sigma_{y(n)})^2 + (\sigma_{y(n)} - \sigma_{z(n)})^2 + \dots} + 2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 (\tau_{xy(n)}^2 + \tau_{yz(n)}^2 + \tau_{zx(n)}^2) = \sigma_{-1}. \quad (74)$$

Переменные напряжения цикла увеличивают соответствующим образом при наличии концентрации напряжений с учетом масштабного фактора и состояния поверхности. Можно и более просто учесть указанные факторы с помощью замены значений σ_{-1} и τ_{-1} в равенстве (74) на пределы выносливости детали $\sigma_{-1д}$ и $\tau_{-1д}$, коэффициентов ψ_σ и ψ_τ в равенствах (72) — (73) на $\psi_{\sigma д}$ и $\psi_{\tau д}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПАСОВ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ

Запас прочности характеризует надежность детали при случайном возрастании переменных напряжений, при уменьшении прочности материала и т. п. Запасы прочности — это критерии сравнения вновь создаваемой конструкции и аналогичных эксплуатируемых. Их необходимые значения устанавливаются путем сравнительного и сопоставимого расчета подобных или сходных деталей машин. Обозначим σ_{xa} , σ_{xm} , σ_{ya} , σ_{ym} , ... — напряжения, действующие в детали в рабочих условиях, и σ_{xa}^* , σ_{xm}^* , ... — напряжения в момент усталостного разрушения. Очевидно, что для надежной работы детали действующие напряжения должны быть меньше предельных. Условие усталостного разрушения при действии переменного и постоянного напряжений будет

$$\sigma_a^* + \psi_\sigma \sigma_m^* = \sigma_{-1}, \quad (75)$$

где σ_a^* , σ_m^* — предельные значения напряжений, соответствующих началу усталостного разрушения.

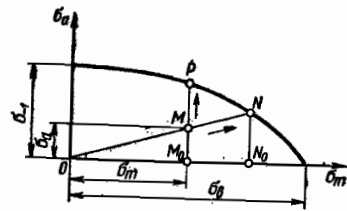


Рис. 9. К определению запасов прочности:

$$n_a = \frac{M_0 P}{M_0 M}; \quad n = \frac{N_0 N}{M_0 M}$$

Для детали с концентрацией напряжения условие разрушения имеет вид

$$\sigma_a^* \frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta_\sigma} + \psi_\sigma \sigma_m^* = \sigma_{-1} \quad (76)$$

При определении запасов усталостной прочности следует учесть возможный характер возрастания переменных и постоянных напряжений. Если переменное и постоянное напряжения возрастают пропорционально от точки M на рис. 9 до точки N , например, в зубьях колес, то предельные напряжения

$$\sigma_a^* = n \sigma_a; \quad \sigma_m^* = n \sigma_m, \quad (77)$$

где n — запас прочности по подобному циклу. Внося эти значения в условие прочности (76), получаем часто применяемую формулу для запаса прочности по подобному циклу:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta_\sigma} + \psi_\sigma \sigma_m} \quad (78)$$

Последнее равенство можно записать и в другой форме, если учесть, что

$$\sigma_{-1} \frac{\epsilon_\sigma \beta_\sigma}{k_\sigma} = \sigma_{-1d}, \quad (79)$$

где σ_{-1d} — предел выносливости детали, который может быть определен при натурных испытаниях.

Тогда

$$n = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_a + \psi_{\sigma d} \sigma_m} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{\text{эkv}}}, \quad (80)$$

где

$$\psi_{\sigma d} = \psi_\sigma \frac{\epsilon_\sigma \beta_\sigma}{k_\sigma} -$$

коэффициент влияния постоянных нормальных напряжений для детали; $\sigma_{\text{эkv}}$ — эквивалентное переменное напряжение.

Во многих случаях усталостное разрушение может происходить при возрастании переменной составляющей цикла от точки M на рис. 9 до точки P , тогда как его постоянная составляющая остается неизменной (крутильные колебания колеччатых валов, резонансные колебания лопаток и т. п.). Тогда в момент усталостного разрушения

$$\sigma_a^* = n_a \sigma_a; \quad \sigma_m^* = \sigma_m, \quad (81)$$

где n_a — запас прочности по переменным напряжениям.

Внося эти значения в равенство (76), находим запас прочности по переменным напряжениям:

$$n_a = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m}{\sigma_a \frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta_\sigma}}, \quad (82)$$

или в другой, эквивалентной форме,

$$n_a = \frac{\sigma_{-1d} - \psi_{\sigma d} \sigma_m}{\sigma_a}. \quad (83)$$

Аналогичным образом определяют запас прочности при действии касательных напряжений. Например, запас прочности по переменным касательным напряжениям

$$n_a = \frac{\tau_{-1d} - \psi_{\tau d} \tau_m}{\tau_a}.$$

Полученные значения запасов прочности следует сопоставлять с их допустимыми значениями:

$$n \leq [n]; \quad (84)$$

$$n_a \leq [n_a]. \quad (85)$$

Величины $[n]$ и $[n_a]$ определяют из расчета подобных изделий, норм прочности и т. п. Как следует из рис. 9 и расчетных зависимостей, запас по переменным напряжениям (83) всегда больше запаса по подобному циклу (80), $n_a > n$.

Однако их не следует сравнивать формально, так как они отражают различные процессы с разными характеристиками рассеяния. Обычно $[n_a] > [n]$.

Например, для удовлетворительно работающих резьбовых соединений $[n_a] = 2,5$; $[n] = 1,5$. Поэтому резьбовое соединение с $n_a = 2,2$; $n = 1,8$ следует признать надежным.

Запасы усталостной прочности при сложном напряженном состоянии. Рассмотрим сначала определение запаса прочности при совместном изгибе и кручении вала при действии переменных напряжений, изменяющихся по симметричному циклу. Запас прочности по подобному циклу найдем из условия (62), внося в него зависимости (77):

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2}}. \quad (86)$$

Последнее соотношение можно представить как

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}, \quad (87)$$

где $n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a}$; $n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a}$ — частные запасы прочности соответственно по нормальным и касательным напряжениям.

Равенство (87) часто применяют в виде

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (88)$$

При наличии концентрации напряжений

$$n = \frac{\sigma_{-1d}}{\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1d}}{\tau_{-1d}}\right)^2 \tau_a^2}}. \quad (89)$$

Рассмотрим определение запасов усталостной прочности при совместном действии переменных и постоянных напряжений.

Используя формулу (74), при наличии концентрации напряжений получаем условие усталостной прочности

$$\sqrt{(\sigma_a^* + \psi_{\sigma d} \sigma_m^*)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1d}}{\tau_{-1d}}\right)^2 (\tau_a^* + \psi_{\tau d} \tau_m^*)^2} = \sigma_{-1d}, \quad (90)$$

где σ_a^* , σ_m^* , τ_a^* , τ_m^* — значения номинальных напряжений в опасной точке детали.

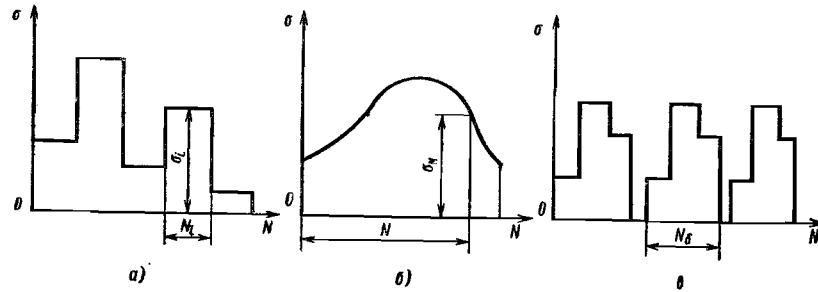


Рис. 10. Три типа нагружения деталей

Запас по подобному циклу, т. е. при условии $\sigma_a^* = n\sigma_a$, $\sigma_m^* = n\sigma_m$; $\tau_a^* = n\tau_a$; $\tau_m^* = n\tau_m$ будет

$$n = \frac{\sigma_{-1д}}{\sqrt{(\sigma_a + \psi_{\sigma_d} \sigma_m)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1д}}{\tau_{-1д}}\right)^2 (\tau_a + \psi_{\tau_d} \tau_m)^2}} \quad (91)$$

Последнее равенство можно представить в форме (88), считая частные запасы

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_a + \psi_{\sigma_d} \sigma_m}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1д}}{\tau_a + \psi_{\tau_d} \tau_m}. \quad (92)$$

Запас прочности по переменным напряжениям определяется условиями

$$\sigma_a^* = n_\sigma \sigma_a; \quad \sigma_m^* = \sigma_m; \quad \tau_a^* = n_\tau \tau_a; \quad \tau_m^* = \tau_m. \quad (93)$$

Внося эти значения в равенство (90), находим

$$\sqrt{(n_\sigma \sigma_a + \psi_{\sigma_d} \sigma_m)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1д}}{\tau_{-1д}}\right)^2 (n_\tau \tau_a + \psi_{\tau_d} \tau_m)^2} = \sigma_{-1д}. \quad (94)$$

Из последнего соотношения получаем квадратное уравнение для определения n_σ . Подобным образом можно определить запасы прочности при возрастании только нормальных или только касательных переменных напряжений. Каждый из рассмотренных запасов отражает особенности нагружения конструкции. Если, например, сравниваются два вала в связи с опасностью крутильных или изгибных колебаний, то реальное соотношение надежности валов лучше отразит запас по переменным напряжениям, учитывающий возможность возрастания «опасных» напряжений. Запасы прочности при наличии нескольких компонентов напряженного состояния определяют подобным образом.

Определение запасов усталостной прочности при нестационарном нагружении. Детали машин в условиях эксплуатации часто загружаются переменными напряжениями, амплитуда которых изменяется в процессе нагружения (нестационарное нагружение). При *ступенчатом* нагружении (рис. 10, а) деталь работает на нескольких уровнях нагружения. *Непрерывное* нагружение (рис. 10, б) характеризуется непрерывным изменением амплитуды действующих напряжений. При *блочном* нагружении (рис. 10, в) в каждом отдельном блоке осуществляется работа на разных режимах. Блочное нагружение типично для машин периодического действия.

Расчет усталостной прочности при нестационарном нагружении основан на принципе линейного суммирования повреждений. Допустим, что повреждение характеризуется положительной величиной Π (мерой повреждения). В начальный момент $\Pi = 0$, в момент разрушения $\Pi = 1$. По мере увеличения числа циклов в процессе

нагружения величина Π монотонно возрастает

$$\frac{d\Pi}{dN} \geq 0. \quad (95)$$

Скорость повреждения считают зависящей от действующих напряжений и температуры:

$$\frac{d\Pi}{dN} = F[\sigma_a(N), \sigma_m(N), T(N)], \quad (96)$$

где $\sigma_a(N)$, $\sigma_m(N)$ и $T(N)$ — переменное и постоянное напряжения и температура в момент нагружения N . Время t , соответствующее числу циклов нагружения N , зависит от частоты нагружения f :

$$t = \frac{N}{f}.$$

Пусть при стационарном нагружении, происходящем при постоянных значениях σ_a , σ_m и T , число циклов до разрушения равно N^* . Тогда из условия (96)

$$\Pi(N^*) = \int_0^{N^*} F(\sigma_a, \sigma_m, T) dN = F(\sigma_a, \sigma_m, T) N^* = 1. \quad (97)$$

Из последнего соотношения

$$F(\sigma_a, \sigma_m, T) = \frac{1}{N^*}.$$

Величина N^* также зависит от σ_a , σ_m и T . Внося значение F в равенство (97), находим в момент разрушения при нестационарном нагружении

$$\Pi(N_\Sigma^*) = \int_0^{N_\Sigma^*} \frac{dN}{N^* [\sigma_a(N), \sigma_m(N), T(N)]} = 1,$$

где N_Σ^* — общее число циклов до разрушения.

Равенство

$$\int_0^{N_\Sigma^*} \frac{dN}{N^* [\sigma_a(N), \sigma_m(N), T(N)]} = 1 \quad (98)$$

выражает принцип линейного суммирования повреждений.

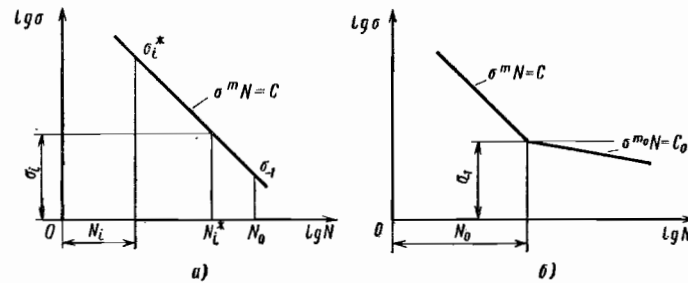
При сопоставлении теоретической зависимости (98) с экспериментальными результатами выяснилось, что лучшее соответствие получается с помощью введения параметра материала a :

$$\int_0^{N_\Sigma^*} \frac{dN}{N^* [\sigma_a(N), \sigma_m(N), T(N)]^a} = a. \quad (99)$$

В приближенных расчетах можно принимать $a = 1$.

Число циклов до разрушения N^* при постоянных напряжениях и температуре имеет существенное рассеяние (в два — пять раз), связанное со статистической природой усталостной прочности. В равенстве (99) под N^* следует понимать среднее число циклов до разрушения.

Ступенчатое нагружение, эквивалентный запас прочности. Пусть деталь работает при k различных режимах, причем число

Рис. 11. Зависимости $\sigma = \varphi(N)$

циклов на i -м режиме равно N_i . Суммарное число циклов

$$N_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k N_i. \quad (100)$$

Условие разрушения по принципу линейного суммирования повреждений следует из соотношения (98)

$$\sum_{i=1}^k \frac{N_i}{N_i^*} = a. \quad (101)$$

Кривая усталости для i -го режима нагружения показана на рис. 11, а. Частный запас прочности на i -м режиме

$$n_i = \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i}, \quad (102)$$

где σ_i^* и σ_i — переменные разрушающее и действующее напряжения на i -м режиме. Циклы нагружения предполагаются симметричными ($\sigma_{mi} = 0$).

Рассмотрим сначала уравнение кривой усталости, одинаковое для любого уровня напряжений,

$$\sigma_i^{*m} N_i = \sigma_i^m N_i^*. \quad (103)$$

Условие разрушения можно записать теперь в таком виде:

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i^*} \right)^m = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i^m} = a. \quad (104)$$

Ступенчатому нагружению поставим в соответствие стационарный эквивалентный режим нагружения. Для эквивалентного режима условие (104) разрушения (прочности) будет

$$\frac{1}{n_{\text{ЭКВ}}^m} = a. \quad (105)$$

Приравняв выражения (104) и (105), находим формулу для запаса усталостной прочности при ступенчатом нагружении

$$n_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i^m} \right]^{\frac{1}{m}}}. \quad (106)$$

Например, при двухступенчатом нагружении

$$n_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{\sqrt[m]{\frac{1}{n_1^m} + \frac{1}{n_2^m}}}. \quad (107)$$

Значение m велико и потому основным при определении эквивалентного запаса является режим минимального запаса прочности.

Другой способ определения эквивалентного запаса прочности основан на предположении, что в момент разрушения все амплитуды переменных напряжений σ_i увеличиваются в $n_{\text{ЭКВ}}$ раз. Тогда из условия разрушения (104) находим

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_{\text{ЭКВ}}^m}{n_i^m} = a \quad (108)$$

или

$$n_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i^m}}}. \quad (109)$$

Если $\sqrt[m]{a} \approx 1$, то равенства (107) и (109) дают близкие результаты.

В некоторых случаях требуется определить эквивалентный запас по долговечности (по числу циклов). Для i -го режима запас по долговечности

$$n_{iN} = \frac{N_i^*}{N_i}. \quad (110)$$

Из условия (102) вытекает

$$n_{iN} = n_i^m. \quad (111)$$

Запас по долговечности значительно больше запаса по напряжениям, так как $m \gg 1$.

Равенство (110) представим в виде

$$\sum_{i=1}^k \frac{N_i}{N_i^*} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_{iN}} = a. \quad (112)$$

При работе на одном эквивалентном режиме ($k = 1$)

$$\frac{N_{\text{ЭКВ}}}{N_{\text{ЭКВ}}^*} = \frac{1}{n_{\text{ЭКВ}N}} = a. \quad (113)$$

Из последних соотношений вытекает

$$n_{\text{ЭКВ}N} = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_{iN}}}. \quad (114)$$

Эквивалентный запас по долговечности можно рассматривать как отношение

$$n_{\text{ЭКВ}N} = \frac{N_{\Sigma}^*}{N_{\Sigma}}. \quad (115)$$

где N_{Σ} и N_{Σ}^* — соответственно суммарное число циклов и число циклов до разрушения при ступенчатом нагружении.

Предыдущие формулы распространяются и на случай, когда для различных режимов кривые усталости различны, например вследствие изменения температуры. Эквивалентное напряжение. Понятие эквивалентного напряжения позволяет привести нестационарный режим нагружения к эквивалентному стационарному.

Если нестационарный режим привести к стандартному режиму, имеющему базовое число циклов N_0 , то

$$\sigma_{\text{эkv}} = \frac{\sigma_{-1}}{n_{\text{эkv}}} \quad (116)$$

Учитывая равенство (106), находим

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_{-1} \sqrt[m]{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i^*}\right)^m} \quad (117)$$

Так как

$$\sigma_{-1}^m N_0 = \sigma_i^{*m} N_i,$$

то получим формулу для эквивалентного напряжения

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt[m]{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k \sigma_i^m N_i} \quad (118)$$

Если исходить из равенства (109), то получим выражение, близкое (118),

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt[m]{\frac{1}{aN_0} \sum_{i=1}^k \sigma_i^m N_i} \quad (119)$$

Равенство (117) можно записать в виде

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_{-1} \sqrt[m]{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i^m}} \quad (120)$$

Часто оказывается целесообразным привести ступенчатое нагружение к одному, наиболее тяжелому режиму (режиму с наименьшим запасом прочности). Обозначив этот режим индексом 1, получим

$$\sigma_{\text{эkv}} = \frac{\sigma_1^*}{n_{\text{эkv}}}.$$

Учитывая равенство (106), найдем

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 \sqrt[m]{1 + \sum_{i=2}^k \left(\frac{n_1}{n_i}\right)^m} \quad (121)$$

Так как $n_i > n_1$ и $m \geq 6$, то напряжение $\sigma_{\text{эkv}}$ обычно мало отличается от σ_1 .

Ступенчатое нагружение, кривая усталости содержит два участка. Рассмотренные ранее зависимости относились к единой кривой усталости. Такие кривые, свойственны некоторым материалам (титановым и бериллиевым сплавам), усталости при высокой температуре и коррозионной среде.

В большинстве случаев более точное описание кривой усталости можно получить с помощью кусочно-линейной кривой (в двойных логарифмических координатах, рис. 11, б). Принцип линейного суммирования повреждений остается справедливым и в рассматриваемом случае:

$$\sum_{i=1}^k \frac{N_i}{N_i^*} = a. \quad (122)$$

Однако связь между долговечностями и напряжениями будет зависеть от уровня напряжений i -го цикла (в момент разрушения).

$$\text{При } \tilde{\sigma}_i \geq \sigma_{-1} \quad \sigma_i^{*m} N_i = \sigma_i^m N_i^* \quad (123)$$

$$\text{При } \tilde{\sigma}_i < \sigma_{-1} \quad \sigma_i^{*m_0} N_i = \sigma_i^{m_0} N_i^* \quad (124)$$

Обычно величина $m_0 \geq m$.

Величина $\tilde{\sigma}_i$ — действующее переменное напряжение в i -м режиме в момент усталостного разрушения при нестационарном нагружении.

Следует считать

$$\tilde{\sigma}_i = n_{\text{эkv}} \sigma_i. \quad (125)$$

Условимся теперь присваивать номера (индексы) режимов нагружения в порядке убывания действующих переменных напряжений. Пусть для первых s режимов $n_{\text{эkv}} \sigma_i > \sigma_{-1}$. Тогда условие (104) можно представить так:

$$\sum_{i=1}^s \left(\frac{n_{\text{эkv}} \sigma_i}{\sigma_i^*}\right)^m + \sum_{s+1}^k \left(\frac{n_{\text{эkv}} \sigma_i}{\sigma_i^*}\right)^{m_0} = a. \quad (126)$$

Если $n_{\text{эkv}} \sigma_1 < \sigma_{-1}$, то все режимы относятся ко второму участку, и тогда

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{n_{\text{эkv}} \sigma_i}{\sigma_i^*}\right)^{m_0} = a. \quad (127)$$

Так как

$$\frac{\sigma_i^*}{\sigma_i} = n_i,$$

где n_i — частный запас прочности на i -м режиме, то для определения $n_{\text{эkv}}$ будем иметь:

1. Если $n_{\text{эkv}} \sigma_1 > \sigma_{-1}$, для первых s режимов

$$n_{\text{эkv}}^m \sum_{i=1}^s \frac{1}{n_i^m} + n_{\text{эkv}}^{m_0} \sum_{i=s+1}^k \frac{1}{n_i^{m_0}} = a. \quad (128)$$

2. При $n_{\text{эkv}} \sigma_1 < \sigma_{-1}$

$$n_{\text{эkv}}^{m_0} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i^{m_0}} = a. \quad (129)$$

Уравнение (128) решают относительно $n_{\text{эkv}}$ с помощью метода Ньютона или подбором. При $m_0 \rightarrow \infty$ (второй участок кривой усталости принимают горизонтальным) расчет на долговечность при

$$\sigma_i < \frac{\sigma_{-1}}{n_{\text{эkv}}}$$

не проводят.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ

Экспериментальные исследования показали, что усталостная прочность деталей машин имеет статистическую природу, т. е. зависит от целого ряда факторов, значение которых предварительно учесть практически невозможно (состояние поверхности, наличие внутренних дефектов структуры и т. п.). В связи с этим наблюдается значительное рассеяние результатов испытаний, особенно по усталостной долговечности. Детали, изготовленные по одинаковой технической документации, обнаруживают при испытаниях на одном уровне нагружения числа циклов до разрушения, отличающиеся в несколько раз.

Для описания долговечности детали при переменных нагрузках наиболее употребительным является логарифмически нормальный закон (нормальный закон для логарифма случайной величины). Плотность распределения логарифма числа циклов до усталостного разрушения при работе на постоянном уровне переменных напряжений σ

$$f(\lg N) = \frac{1}{S_{\lg N} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg N - \bar{\lg N})^2}{2S_{\lg N}^2}}$$

где $\bar{\lg N}$ и $S_{\lg N}$ — соответственно среднее значение и среднее квадратическое отклонение числа циклов до разрушения.

Параметры распределения зависят от величины действующих переменных напряжений:

$$\bar{\lg N} = F_1(\sigma), \quad S_{\lg N} = F_2(\sigma),$$

При малом уровне действующих напряжений наблюдается отклонение от логарифмически нормального закона в области малых долговечностей.

Удовлетворительное статистическое описание можно получить с помощью введения порогового значения для числа циклов N_n . Предполагается, что разрушение возможно при $N > N_n$. Тогда плотность распределения выражается равенством

$$f(\lg(N - N_n)) = \frac{1}{S_{\lg(N - N_n)} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\lg(N - N_n) - \bar{\lg(N - N_n)}]^2}{2S_{\lg(N - N_n)}^2}}$$

Такое распределение содержит три параметра:

$$\bar{\lg(N - N_n)}, \quad S_{\lg(N - N_n)} \text{ и } N_n.$$

Рассеяние пределов выносливости при фиксированном числе циклов значительно меньше, чем рассеяние долговечностей. Приближенно можно считать

$$S_{\lg \sigma} \approx \frac{1}{m} S_{\lg N}.$$

Более полные сведения о статистических моделях выносливости содержатся в работе [2].

Глава 32

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ И ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ

Оценка прочностной надежности проводится с помощью допускаемых напряжений, запасов прочности и вероятности разрушения. При использовании допускаемых напряжений условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где σ_{\max} — наибольшее напряжение в детали; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

Такая оценка весьма удобна, если на практике для однотипных конструктивных элементов, стабильных условий нагружения, устоявшейся технологии производства разработана система допускаемых напряжений.

Однако оценке прочностной надежности с помощью допускаемых напряжений присущи и существенные недостатки. Величина $[\sigma]$ не дает в явном виде представления о степени надежности, так как в формуле (1) не показано соотношение действующих и предельных напряжений. Величина допускаемого напряжения носит условный характер, так как не отражает характера предполагаемого разрушения (статического, усталостного и т. п.), режима нагружения и других факторов, влияющих на надежность. Допускаемое напряжение, особенно при действии переменных нагрузок, в значительной степени зависит от геометрии детали (концентрации напряжений), материала и технологии изготовления, что затрудняет ее применение в качестве нормативной характеристики.

В современных инженерных расчетах допускаемые напряжения используют главным образом для приближенных, предварительных расчетов. Наибольшее распространение получил расчет по запасам прочности.

Условие прочностной надежности в простых случаях записывают в виде

$$n = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma_{\max}} \geq [n], \quad (2)$$

где n — запас прочности; $\sigma_{\text{разр}}$ — разрушающее напряжение; $[n]$ — допустимая величина запаса прочности.

Под $\sigma_{\text{разр}}$ при действии переменных напряжений понимают предел выносливости, при действии постоянных напряжений — предел прочности или предел длительной прочности.

В более сложных случаях (нестационарные режимы нагружения) при определении запасов прочности используют условия суммирования повреждений.

Условия прочности по допускаемым напряжениям и запасам прочности связаны соотношением

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{n}. \quad (3)$$

Величина необходимого запаса прочности имеет довольно стабильное значение, тогда как $\sigma_{\text{разр}}$ отражает условия нагружения, геометрию и технологию детали.

При действии статических нагрузок используют также запас по несущей способности

$$n = \frac{P_{\text{разр}}}{P}, \quad (4)$$

где $P_{\text{разр}}$ и P — значения силового фактора (нагрузки) в момент разрушения и в рабочих условиях.

Запас по несущей способности отражает перераспределение напряжений, возникающее в пластических материалах при нагрузках, близких к разрушающим.

В ряде областей машиностроения созданы нормы прочности, регламентирующие допускаемые запасы прочности и условия их определения.

Недостатком системы допускаемых напряжений и запасов прочности является детерминированный характер условий прочности. Они не учитывают должным

образом неизбежное рассеяние разрушающих и максимальных напряжений. Этот недостаток частично устраняется статистическими запасами прочности, которые рассмотрены в дальнейшем.

Другой путь построения статистических моделей надежности — определение вероятности разрушения.

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ

Рассмотрим усталостную прочность на примере лопаток компрессора.

Переменные напряжения в лопатке компрессора, возникающие при резонансных колебаниях, обозначим σ_a . Их определяют с помощью тензометрирования в рабочих условиях в местах наибольших напряжений. Величинам σ_a свойственно значительное рассеяние, связанное с неравномерностью газового потока, условий демпфирования и т. п. Величину σ_a сопоставляют с пределом выносливости лопатки $\sigma_{-1л}$, который также имеет разброс вследствие отклонений в технологии изготовления и рассеяния механических свойств материала. Предел выносливости соответствует определенному числу нагружений (обычно 10^7 циклов). Если в данной лопатке переменное напряжение больше предела выносливости:

$$\sigma_a > \sigma_{-1л}, \quad (5)$$

то наступает разрушение.

Рассматриваем σ_a и $\sigma_{-1л}$ как случайные величины. На рис. 1 показаны кривые плотности распределения переменных напряжений и пределов выносливости. Их строят на основании экспериментальных данных по гистограмме распределения.

Допустим, что величины σ_a и $\sigma_{-1л}$, которые для краткости обозначим соответственно η и ξ , имеют нормальное распределение. Тогда и разность этих величин (функция неразрушения)

$$\zeta = \sigma_{-1л} - \sigma_a = \eta - \xi \quad (6)$$

распределена нормально, причем параметры распределения — среднее значение и среднее квадратическое отклонение соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\zeta} &= \bar{\sigma}_{-1л} - \bar{\sigma}_a = \bar{\eta} - \bar{\xi}; \\ S_\zeta &= \sqrt{S_\eta^2 + S_\xi^2 - 2K_{\xi\eta}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Входящий в последнее равенство корреляционный момент для независимых случайных величин обращается в нуль. Так как предел выносливости и действующее в ней переменное напряжение практически независимы, то

$$S_\zeta = \sqrt{S_\eta^2 + S_\xi^2}. \quad (8)$$

Вероятность разрушения равна вероятности условия $\zeta < 0$ (рис. 2)

$$P_{\text{разр}} = P(\zeta < 0) = F(0), \quad (9)$$

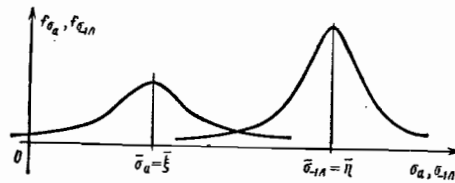


Рис. 1. Кривые плотности распределения переменных напряжений (σ_a) и пределов выносливости (σ_{-1})

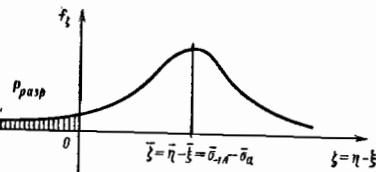


Рис. 2. Распределение функции неразрушения

где $F(\zeta)$ — функция распределения случайной величины ζ ,

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{S_\zeta}\right), \quad (10)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ — функция Лапласа.

Из равенства (9) вытекает формула для вероятности разрушения:

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} + \Phi\left(-\frac{\bar{\zeta}}{S_\zeta}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{\zeta}}{S_\zeta}\right), \quad (11)$$

или

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{v_\zeta}\right), \quad (12)$$

где v_ζ — коэффициент вариации функции неразрушения,

$$v_\zeta = \frac{S_\zeta}{\bar{\zeta}} = \frac{\sqrt{S_\eta^2 + S_\xi^2}}{\bar{\eta} - \bar{\xi}}. \quad (13)$$

Если воспользоваться приближенным представлением функции Лапласа

$$P_{\text{разр}} = \frac{v_\zeta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2v_\zeta^2}} (1 - v_\zeta^2 + 3v_\zeta^4 - \dots), \quad (14)$$

то погрешность оказывается не выше последнего использованного при вычислениях члена ряда.

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПРЕДЕЛОВ ПРОЧНОСТИ

В этом случае вероятность разрушения может быть определена из следующих соображений.

Пусть имеется переменное напряжение $\sigma_a = \xi$. Вероятность того, что предел выносливости $\sigma_{-1л} = \eta$ окажется меньше данной величины ξ (наступит разрушение), будет

$$P(\eta < \xi) = F_\eta(\xi), \quad (15)$$

где $F_\eta(\xi)$ — функция распределения случайной величины η ,

$$F_\eta(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_\eta(\eta) d\eta.$$

Для нахождения вероятности разрушения следует учесть все возможные значения ξ (все несовместимые пути реализации события) и, по формуле полной вероятности,

$$P_{\text{разр}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(\xi) F_\eta(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Подобным образом находим равнозначное условие

$$P_{\text{разр}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(\eta) (1 - F_\xi(\eta)) d\eta = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(\eta) F_\xi(\eta) d\eta. \quad (17)$$

Нахождение вероятности разрушения теперь сведено к вычислению интеграла (16) или (17).

В общем случае запас прочности (усталостной или статической) может быть представлен в виде

$$n = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma_{\text{экр}}}, \quad (18)$$

где $\sigma_{\text{экр}}$ — эквивалентное напряжение.

Например, при одновременном действии нормальных σ и касательных τ напряжений

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (19)$$

Для длительной прочности при нестационарном режиме нагружения функция неразрушения зависит от общего времени работы t

$$\zeta(t) = \sigma_{\text{дл}}(t) - \sigma_{\text{экр}}(t). \quad (20)$$

Для длительной статической или усталостной прочности справедлив степенной закон связи $\sigma_{\text{дл}}$ и времени (числа циклов) до разрушения

$$\sigma_{\text{дл}}^m(t) t = C, \quad (21)$$

где m и C — постоянные материала, зависящие от температуры.

Если действующее напряжение в момент времени t^*

$$\sigma(t^*) = \sigma_0 f(t^*), \quad (22)$$

где σ_0 — случайная величина, $f(t^*)$ — детерминированная функция времени, то при линейном законе суммирования повреждений

$$\sigma_{\text{экр}}(t) = \sigma_0 \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t f^m(t^*) dt^* \right\}^{\frac{1}{m}} = \sigma_0 \psi(t). \quad (23)$$

Для усталостной прочности при нестационарном нагружении функция неразрушения зависит от общего числа циклов нагружения

$$\zeta(N) = \sigma_{-1N} - \sigma_{\text{экр}}(N). \quad (24)$$

В каждый момент нагружения действующее напряжение

$$\sigma(N) = \sigma_0 f(N). \quad (25)$$

Учитывая зависимость типа (21)

$$\sigma_{-1N}^m N = C,$$

получим

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_0 \left\{ \frac{1}{N_{\Sigma}} \int_0^{N_{\Sigma}} f^m(N) dN \right\}^{\frac{1}{m}} = \sigma_0 \psi(N_{\Sigma}). \quad (26)$$

Равенства (23) и (26) справедливы при постоянной температуре.

Для расчета должны быть известны среднее значение и среднее квадратическое отклонение пределов прочности и эквивалентного напряжения, причем

$$\bar{\sigma}_{\text{экр}}(t) = \bar{\sigma}_0 \psi(t);$$

$$S_{\sigma_{\text{экр}}}(t) = S_{\sigma_0} \psi(t).$$

При нормальном распределении указанных величин используют соотношение (11). Вероятность разрушения зависит в рассматриваемом случае от времени работы.

Доверительные пределы для вероятности разрушения. При расчете вероятности разрушения по формуле (11) предполагают, что статистические характеристики пределов выносливости $\bar{\eta}$, S_{η} и действующих напряжений $\bar{\xi}$, S_{ξ} относятся к генеральной совокупности (выборке бесконечно больших размеров).

В действительности указанные величины определяют по выборке (объему испытаний), содержащей конечное число образцов.

Если при определении действующих напряжений использованы результаты n_1 испытаний, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_{n_1} &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i; \\ S_{\xi_{n_1}} &= \left\{ \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (\xi_i - \bar{\xi}_{n_1})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Соответственно для пределов прочности (n_2 — число испытаний)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta}_{n_2} &= \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \eta_j; \\ S_{\eta_{n_2}} &= \left\{ \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (\eta_j - \bar{\eta}_{n_2})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Оценим приближенно наибольшее значение вероятности разрушения.

Очевидно, что оно реализуется при минимальной разности средних значений и максимальной величине S_{ξ} .

Будем использовать с доверительной вероятностью P_d следующие односторонние оценки *:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta}_{\min} &= \bar{\eta}_{n_2} - t(n_2, P_d) \frac{S_{\eta_{n_2}}}{\sqrt{n_2}}; \quad S_{\xi_{\max}} \leq K_{S_{\max}}(n_1, P_d) S_{\xi_{n_1}}; \\ \bar{\xi}_{\max} &= \bar{\xi}_{n_1} + t(n_1, P_d) \frac{S_{\xi_{n_1}}}{\sqrt{n_1}}; \quad S_{\eta_{\max}} \leq K_{S_{\max}}(n_2, P_d) S_{\eta_{n_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Тогда из равенства (11) получим приближенную оценку

$$P_{\text{разр. max}} = \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\bar{\eta}_{\min} - \bar{\xi}_{\max}}{\sqrt{S_{\eta_{\max}}^2 + S_{\xi_{\max}}^2}} \right) = \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{1}{v_{\xi_{\max}}} \right). \quad (30)$$

Для расчета может быть использовано и равенство (14). Доверительную вероятность оценки (30) можно приближенно принять равной P_d .

Пример. Определить вероятность разрушения лопаток, если известно, что среднее значение переменных напряжений $\bar{\xi} = 10$ кгс/мм² и среднее квадратическое отклонение $S_{\xi} = 2$ кгс/мм² (по данным тензометрирования); среднее значение предела выносливости $\bar{\eta} = 20$ кгс/мм² и среднее квадратическое отклонение $S_{\eta} = 3$ кгс/мм² (по данным испытаний на выносливость).

* Значения коэффициентов Стьюдента t и коэффициентов $K_{S_{\max}}$ указаны во многих работах (см., например, [1]).

Решение. Находим по формулам (7) и (8)

$$\bar{\xi} = \bar{\eta} - \bar{\xi} = 20 - 10 = 10 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$S_{\xi} = \sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,6.$$

Вероятность разрушения по формуле (11)

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{10}{3,6}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(2,78).$$

По таблице значений функции Лапласа

$$\Phi(2,78) = 0,49728$$

и

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - 0,49728 = 0,272 \cdot 10^{-2}.$$

По приближенной формуле (14)

$$P_{\text{разр}} \approx \frac{1}{2,78 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2,78^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{2,78^3} + 3 \frac{1}{2,78^5}\right) = 0,277 \cdot 10^{-2}.$$

Значения вероятности разрушения, вычисленные по средним значениям и с учетом рассеяния экспериментальных данных, существенно расходятся между собой. В практических расчетах следует указывать, при каких условиях получено расчетное значение вероятности разрушения.

В заключение отметим, что вероятность разрушения как характеристика прочностной надежности правильно отражает качественные особенности задачи: она возрастает при уменьшении запаса прочности и увеличении рассеяния нагрузок и механических свойств материала. Однако ее использование как нормативной характеристики для определения отказов ответственных конструкций (разрушений с тяжелыми последствиями) ограничено:

а) значение вероятности разрушения зависит от «хвостов» распределений, которые даже по выборкам большого объема ($n > 100$) определяются весьма неточно (погрешность может составлять несколько порядков). В связи с этим расчетная вероятность разрушения носит условный характер. Реальный смысл имеет только сравнение элементов выполненных и вновь проектируемых конструкций, производимое в сопоставимых условиях;

б) при расчете допускается возможность аварии (катастрофы), это создает затруднения психологического характера.

Рассмотренная статистическая модель пригодна для отказов с ограниченными последствиями, для которых допустимо использование вероятностей разрушения $P_{\text{разр}} > 1 \cdot 10^{-3}$.

Более обоснованно использование в качестве нормативных характеристик, особенно для прочностных отказов с тяжелыми последствиями, статистические запасы прочности.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ

Предельное (разрушающее) и действующие напряжения в опасной точке детали можно рассматривать как случайные величины.

Тогда запас прочности конкретной детали представляет величину случайную:

$$n = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{\eta}{\xi}. \quad (31)$$

Если $F(n)$ — функция распределения запасов прочности, то величина запаса прочности, соответствующая уровню значимости q , удовлетворяет условию

$$F[n(q)] = \text{Вер}[n < n(q)] = q. \quad (32)$$

В большинстве практических задач параметры функции распределения «восстанавливаются» по выборкам ограниченного объема с определенной доверительной вероятностью. В связи с этим и величина запаса прочности зависит от принятого значения доверительной вероятности

$$n = n(q, P_d). \quad (33)$$

Например, запись

$$n(q, P_d) = (0,01; 0,95) = 2$$

означает, что только у 1% всех изделий запас прочности может оказаться меньше 2, причем это утверждение справедливо по крайней мере для 95% случаев испытаний. С математической точки зрения, равенство (33) имеет следующий смысл:

$$\text{Вер}[n < n(q, P_d)] = q = P_d. \quad (34)$$

Приближенный метод определения статистического запаса прочности. В практических расчетах запас прочности

$$n = \frac{(\sigma_{\text{разр}})_{\text{min}}}{(\sigma_{\text{max}})_{\text{max}}} = \frac{\eta_{\text{min}}}{\xi_{\text{max}}}. \quad (35)$$

Используют нижние значения для пределов прочности и пределов выносливости по справочным данным или механическим испытаниям.

При определении максимального напряжения в опасной точке детали σ_{max} учитывают наиболее неблагоприятные условия нагружения и другие факторы, приводящие к возрастанию напряжений. Однако достоверность оценки $\sigma_{\text{раз}}$ и σ_{max} не указывается, это затрудняет сопоставление надежности по величине запаса прочности.

Наиболее простой и практически пригодный метод определения статистических запасов прочности состоит в следующем. Минимальные характеристики прочности и максимальные значения напряжений устанавливают в соответствии с нормированным уровнем значимости и доверительной вероятности:

$$n(q, P_d) = \frac{\eta_{\text{min}}(q_{\eta}, P_{d\eta})}{\xi_{\text{max}}(q_{\xi}, P_{d\xi})}, \quad (36)$$

где q_{η} , q_{ξ} , $P_{d\eta}$ и $P_{d\xi}$ — уровни значимости и доверительные вероятности, с которыми определяют (экспериментально) разрушающее напряжение и максимальное действующее напряжение. В практических расчетах можно принять приближенные соотношения:

$$q = q_{\eta} = q_{\xi}; \quad (37)$$

$$P_d = P_{d\eta} = P_{d\xi}. \quad (38)$$

Статистические запасы прочности, как и обычные запасы прочности, имеют условное значение. Они служат критериями сравнения надежности вновь создаваемых изделий с изделиями, удовлетворительно работающими в эксплуатации.

Основное преимущество статистического запаса прочности по сравнению с обычными (детерминистскими) запасами состоит в том, что сопоставление приводится к одинаковым условиям (по объему используемой информации) по рассеянию механических свойств материала и действующих напряжений.

Если разрушающее и действующее напряжения распределены по нормальному закону, то можно принять

$$n(q, P_d) = \frac{\bar{\eta}_{n_1} - K_{\eta}(n_1, q, P_d) S_{\eta_{n_1}}}{\bar{\xi}_{n_2} + K_{\xi}(n_2, q, P_d) S_{\xi_{n_2}}}, \quad (39)$$

где $\bar{\eta}_{n_1}$ — среднее значение $\sigma_{\text{раз}}$; n_1 — число испытаний (объем выборки), на основании которой определено значение $\bar{\eta}_{n_1}$; $S_{\eta_{n_1}}$ — среднее квадратическое отклонение для выборки объема n_1 ; $\bar{\xi}_{n_2}$ и $S_{\xi_{n_2}}$ — среднее значение и среднее квадратическое отклоне-

Значения вероятности разрушения $P_{разр}$ в зависимости

$\bar{\eta}$	$v_{\eta} = 0,05$ при v_{ξ}/v_{η} , равном			$v_{\eta} = 0,10$
	1	2	3	1
1,25	0,5	0,5	0,5	0,5
1,5	$0,905 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-1}$	$0,6178 \cdot 10^{-1}$	$0,5938 \cdot 10^{-1}$
1,75	$0,143 \cdot 10^{-7}$	$0,3167 \cdot 10^{-4}$	$0,1441 \cdot 10^{-2}$	$0,2803 \cdot 10^{-2}$
2,0	$0,8121 \cdot 10^{-13}$	$0,85 \cdot 10^{-8}$	$0,7802 \cdot 10^{-5}$	$0,996 \cdot 10^{-4}$
2,5	$0,18987 \cdot 10^{-18}$	$0,7787 \cdot 10^{-13}$	$0,143 \cdot 10^{-7}$	$0,3911 \cdot 10^{-5}$
3,0	$0,4036 \cdot 10^{-23}$	$0,35986 \cdot 10^{-20}$	$0,7964 \cdot 10^{-14}$	$0,127 \cdot 10^{-7}$
4,0	$0,5629 \cdot 10^{-35}$	$0,707 \cdot 10^{-28}$	$0,21333 \cdot 10^{-20}$	$0,12961 \cdot 10^{-9}$
	$0,2934 \cdot 10^{-47}$	$0,33216 \cdot 10^{-40}$	$0,17886 \cdot 10^{-32}$	$0,17505 \cdot 10^{-12}$

ние, полученное для действующего напряжения в опасной точке при n_2 испытаниях [см. формулы (27) и (28)]; $K_{\eta}(n_1, q, P_d)$ и $K_{\xi}(n_2, q, P_d)$ — односторонние толерантные коэффициенты.

Экспериментальное исследование действующих напряжений путем тензометрирования часто применяют при определении переменных напряжений (валы, лопатки и т. п.). В других случаях изучают экспериментально условия нагружения (усилия, температуры и др.), оценивают вероятность появления максимальных нагрузок и т. п.

Пример. Требуется определить (при уровне значимости $q = 0,01$ и доверительной вероятности $P_d = 0,99$) запас прочности лопатки компрессора, для которой среднее значение предела выносливости, полученное в шести испытаниях ($n_1 = 6$), составило $\bar{\sigma}_{-1} = \bar{\eta}_{n_1} = 42$ кгс/мм², а среднее квадратическое отклонение $S_{\eta n_1} = 2$ кгс/мм². Среднее значение переменных напряжений при тензометрировании 10 лопаток ($n_2 = 10$) $\bar{\sigma}_a = \bar{\xi}_{n_2} = 6$ кгс/мм², а среднее квадратическое отклонение $S_{\xi n_2} = 1,5$ кгс/мм².

Решение. Минимальное значение предела выносливости

$$\eta_{min} = \bar{\eta}_{n_1} - K_{\eta}(n_1, q, P_d) S_{\eta n_1}.$$

При $n_1 = 6$, $q = 0,01$ и $P_d = 0,99$ по таблице значений толерантных коэффициентов [1], находим

$$K_{\eta}(6; 0,01; 0,99) = 5,00,$$

и тогда

$$\eta_{min} = 42 - 5 \cdot 2 = 32 \text{ кгс/мм}^2.$$

Максимальное значение переменных напряжений

$$\xi_{max} = \bar{\xi}_{n_2} + K_{\xi}(n_2, q, P_d) S_{\xi n_2}.$$

При $n_2 = 10$, $q = 0,01$, $P_d = 0,99$ по таблице значений толерантных коэффициентов находим

$$K_{\xi}(10; 0,01; 0,99) = 4,06$$

и

$$\xi_{max} = 6 + 4,06 \cdot 1,5 = 12,09 \text{ кгс/мм}^2.$$

Запас усталостной прочности

$$n(0,01; 0,99) = \frac{32}{12,09} = 2,65.$$

Нормальный закон распределения повышает опасность больших отклонений и часто более целесообразно использовать усеченные распределения.

Учитывая, что вероятностные расчеты носят сравнительный характер, рекомендуется для единообразия использовать приближенные толерантные коэффициенты,

от запаса прочности по средним напряжениям

при v_{ξ}/v_{η} , равном		$v_{\eta} = 0,15$ при v_{ξ}/v_{η} , равном		
2	3	1	2	3
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,1446	0,2206	0,1492	0,2389	0,305
$0,2275 \cdot 10^{-1}$	$0,6811 \cdot 10^{-1}$	$0,3216 \cdot 10^{-1}$	$0,9176 \cdot 10^{-1}$	0,1611
$0,2401 \cdot 10^{-2}$	$0,1539 \cdot 10^{-1}$	$0,6569 \cdot 10^{-2}$	$0,3005 \cdot 10^{-1}$	$0,7483 \cdot 10^{-1}$
$0,2001 \cdot 10^{-3}$	$0,2803 \cdot 10^{-2}$	$0,1441 \cdot 10^{-2}$	$0,914 \cdot 10^{-2}$	$0,3144 \cdot 10^{-1}$
$0,1366 \cdot 10^{-4}$	$0,6152 \cdot 10^{-4}$	$0,996 \cdot 10^{-4}$	$0,9043 \cdot 10^{-3}$	$0,5234 \cdot 10^{-2}$
$0,143 \cdot 10^{-7}$	$0,1239 \cdot 10^{-5}$	$0,1222 \cdot 10^{-4}$	$0,1078 \cdot 10^{-3}$	$0,8447 \cdot 10^{-3}$
$0,10071 \cdot 10^{-10}$	$0,1 \cdot 10^{-8}$	$0,6173 \cdot 10^{-6}$	$0,3911 \cdot 10^{-5}$	$0,3167 \cdot 10^{-4}$

Рассмотрим теперь случай, когда статистические характеристики $\sigma_{раз}$ и σ_{max} считают известными. Это означает, что величины $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ и S_{η} и S_{ξ} признают достоверными на основании предыдущего опыта или большого числа исследований. Тогда статистический запас будет зависеть только от уровня значимости,

При нормальном распределении будем иметь

$$n(q) = \frac{\bar{\eta} - u_{1-q} S_{\eta}}{\bar{\xi} + u_{1-q} S_{\xi}} = \bar{n} \frac{1 - u_{1-q} v_{\eta}}{1 + u_{1-q} v_{\xi}}, \quad (40)$$

где u_{1-q} — односторонний квантиль доверительной вероятности

$$P_d = 1 - q.$$

Величина

$$\bar{n} = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}} \quad (41)$$

представляет собой запас по средним значениям.

Коэффициенты вариации

$$v_{\eta} = \frac{S_{\eta}}{\bar{\eta}}; \quad v_{\xi} = \frac{S_{\xi}}{\bar{\xi}}. \quad (42)$$

Величины u_{1-q} для некоторых значений уровня значимости будут следующими:

q	0,10	0,05	0,01	0,0014
u_{1-q}	1,29	1,64	2,33	3,00

Связь запасов прочности и вероятности разрушения

Вероятность разрушения определяют по формуле

$$P_{разр} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{v_{\xi}}\right), \quad (43)$$

где v_{ξ} — коэффициент вариации функции неразрушения,

$$v_{\xi} = \frac{\sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2}}{\bar{\eta} - \bar{\xi}}. \quad (44)$$

Разделив числитель и знаменатель последнего соотношения на $\bar{\xi}$, получим

$$v_{\xi} = \frac{\sqrt{v_{\eta}^2 + \bar{n}^2 v_{\eta}^2}}{\bar{n} - 1}, \quad (45)$$

где $v_{\xi} = \frac{S_{\xi}}{\bar{\xi}}$ и $v_{\eta} = \frac{S_{\eta}}{\bar{\eta}}$ — коэффициенты вариации действующих и разрушающих напряжений; $\bar{\eta}$ — запас по средним значениям. Теперь равенство (43) можно записать так:

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\bar{\eta} - 1}{\sqrt{v_{\xi}^2 - \bar{\eta}^2 v_{\eta}^2}} \right). \quad (46)$$

Из этого соотношения следует, что вероятность разрушения определяется запасом прочности по средним значениям разрушающих и действующих напряжений и коэффициентами их вариаций.

Связь вероятности разрушения и запасов прочности дана в таблице.

Запасы по средним значениям больше практически применяемых запасов прочности, при определении которых используют наименьшие значения разрушающих напряжений и наибольшие значения действующих напряжений.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ¹

Надежностью называют свойство объекта выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени или требуемой наработки.

Подразумевается, что эксплуатация изделия происходит в заданных режимах и условиях использования.

Отказом называется нарушение работоспособности объекта.

Отказы следует отличать от неисправных состояний, при которых изделие не соответствует хотя бы одному из требований технических условий, но сохраняют свою работоспособность.

Катастрофические отказы — разрушение конструкции, взрывы и т. п., создающие опасность для жизни людей или влекущие большой материальный ущерб, должны быть исключены с помощью специальных испытаний. Они не входят в систему количественных оценок теории надежности.

Долговечностью называют свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов.

Техническим ресурсом называется наработка изделия от начала эксплуатации или ее возобновления после среднего или капитального ремонта до наступления предельного состояния. Назначенным ресурсом называется суммарная наработка изделия, при достижении которой эксплуатация должна быть прекращена независимо от состояния объекта.

Прекращение эксплуатации связано с требованиями безопасности или экономической целесообразности.

В пределах назначенного (общетехнического) ресурса обычно предусматривается один или несколько ремонтов.

Ремонтопригодностью называется свойство изделия допускать восстановление отдельных деталей и узлов с относительно небольшими затратами (например, возможность замены деталей в процессе эксплуатации и т. п.).

Контрольеспособностью называется свойство изделия допускать контроль его состояния в процессе эксплуатации. Контроль осуществляется при помощи датчиков оборотов, температур, вибраций и т. д., а также путем визуальных осмотров с применением оптических и других приборов.

ПРАВИЛА НАДЕЖНОСТИ

Инженерный опыт создания сложных технических систем позволяет сформулировать основные правила надежности, которых надо придерживаться на различных этапах создания изделия.

Проектирование. 1. Система должна содержать максимально возможное число элементов, проверенных на практике. Число «новых событий» в системе должно быть ограниченным².

2. Рекомендуется применение «модульного принципа» конструирования (система создается из отдельных автономных узлов), широкое использование стандартных и унифицированных деталей и узлов.

3. Система должна содержать защитные устройства, предусматривающие устранение возможности возникновения катастрофических отказов (ограничение возрастания оборотов, температуры, давления, крутящего момента и т. п.); сигнальные устройства, предупреждающие о нарушении нормальной работы (световые сигналы и т. п.).

¹ Термины и определения по надежности указаны в ГОСТ 13377—75.

² К числу «новых событий» относят принципиально новые конструктивные решения, материалы, условия работы и т. п.

4. Система должна обладать высокой контролеспособностью (оснащена контрольной аппаратурой для оценки вибраций, температур; должна быть обеспечена возможность визуальных осмотров, контроля фильтров, зазоров и т. п.).

5. Система должна быть удобной для ремонта, допускать простую замену быстро изнашивающихся деталей, отдельных элементов и узлов без разборки и переналадки всего изделия.

6. Нагруженные элементы системы должны подвергаться тщательному расчету на статическую и динамическую прочность. При таком расчете должны быть учтены максимальные нагрузки, наиболее неблагоприятные рабочие условия (температура, воздействие среды и т. п.), минимальная прочность материала и др.

7. Для данного типа систем (изделий) должны быть установлены нормы прочности, регламентирующие допустимые запасы прочности и необходимый объем экспериментальных исследований. Запасы прочности должны учитывать рассеяние механических свойств материала, вероятности рабочих нагрузок различной величины и продолжительности, число циклов нагружений и т. п.

Опытное производство и испытания. 1. Опытные экземпляры изделий должны быть предназначены для всесторонних исследований и испытаний в лабораторных, стендовых и эксплуатационных условиях. При исследовании измеряют параметры рабочего процесса (давление, температуру), тензометрированием определяют действующие переменные напряжения и т. д.

Целесообразно проводить опережающие исследования и испытания отдельных элементов (узлов) системы для скорейшего выявления и устранения дефектов.

2. Должны проводиться определения конструкционной прочности, износостойкости, коррозионной и эрозионной прочности отдельных элементов системы.

Исследования осуществляют на образцах — имитаторах и натурных деталях. Во многих случаях оказывается необходимым создание специальных испытательных стендов для исследования надежности элементов и узлов.

3. Опытные экземпляры испытывают на надежность в условиях, имитирующих эксплуатационные. Для более быстрого выявления «слабых мест» и потенциальных возможностей изделия проводят ускоренные эквивалентные и форсированные испытания.

4. Следует проводить специальные испытания, выясняющие работоспособность системы при особых условиях эксплуатации, транспортировки, хранения и т. п. (климатические испытания, испытания на перегрузки, на непробиваемость корпуса и т. п.).

При использовании материала нового типа, ранее не применявшегося в подобных изделиях, при использовании принципиально новых конструктивных решений, схем, условий работы необходимо увеличивать объем испытаний.

5. Для более полного выявления или подтверждения достаточной надежности систем проводят испытания опытной партии в условиях эксплуатации (для изделий, рассчитанных на серийное изготовление).

6. В процессе опытного производства в конструкцию и технологию должны вноситься изменения, направленные на устранение выявленных отказов и неисправностей. Стадия опытного производства завершается официальными испытаниями и утверждением эталона для серийного производства.

Серийное производство. 1. Технологические процессы серийного производства должны обеспечивать качество изделий (конструкционную прочность и др.) не ниже качества изделий опытного производства.

2. При изготовлении деталей, особенно ответственных, нельзя допускать концентрации напряжений (недостаточные радиусы закруглений, отсутствие фасок и т. д.).

3. Технологические процессы не должны создавать значительные остаточные напряжения, понижающие прочность изделий. Следует устранять причины, порождающие возможность технологических повреждений (прижогов, перегревов, трещин и др.).

4. Для ответственных деталей необходимо применять упрочняющую технологию (виброгалтовку, обдувку дробью, поверхностный наклеп), должны использоваться защитные покрытия, предохраняющие деталь от коррозии и других вредных воздействий.

5. Следует установить систему входного контроля (для материалов, поступающих в серийное производство, комплектующих деталей, узлов, агрегатов). Для контроля в процессе производства детали и узлы разбивают на различные группы контроля в зависимости от назначения и ответственности. Условия контроля указывают в чертеже детали. Для ответственных деталей следует применять контроль геометрии, механических свойств, твердости, структуры материала, химического состава и др. Для выявления дефектов (трещин, рыхлот, засорений и т. п.), особенно в литых деталях, сварных швах, поковках, необходимо применять дефектоскопию (цветную, люминесцентную и др.), рентгеноскопический анализ, ультразвуковой контроль. Рекомендуется применять разрезку одной детали из партии для проведения более полного исследования; использовать микрообразцы, вырезаемые из деталей для проверки механических свойств. В отдельных случаях целесообразно применять образцы-свидетели, проходящие вместе с основной деталью определенную технологическую операцию (например, термообработку, литье, сварку и т. п.).

Для новых материалов или при изменении поставщиков входной контроль должен быть усилен дополнительными исследованиями (для подтверждения уровня рассеивания свойств, для выявления чувствительности материала к трещинам, перегрузкам и т. п.).

6. Условия контроля должны быть более жесткими в начальной стадии производства. При достижении необходимого уровня качества производства и его стабильности обычно имеется возможность упростить контроль (после соответствующего согласования). Должны быть предусмотрены испытания, подтверждающие стабильность технологического процесса, допустимый уровень рассеивания количественных показателей, физических и других свойств, влияющих на надежность (периодическое определение остаточных напряжений, пределов выносливости и т. п.).

7. Изменения, вносимые в технологию изготовления и сборки ответственных деталей, в том числе в размеры заготовок, поковок, изменения припусков посадок и допусков и т. п., должны быть согласованы с конструктором и, в большинстве случаев, проверены при лабораторных, стендовых или других испытаниях.

Особо тщательная экспериментальная проверка должна быть при внесении изменений в конструкцию деталей и узлов. Часто подобные изменения, «усовершенствования», «очевидные улучшения», введенные без надлежащей проверки, являются причиной появления отказов и разрушений.

Эксплуатация и ремонт. 1. Эксплуатация сложных технических систем должна соответствовать техническим условиям и специальным руководствам. При необходимости должны быть указаны допустимые условия по температуре, влажности, загрязненности окружающей среды, продолжительности тяжелых режимов, регламентации переходных процессов и др.

2. Для сложных ответственных изделий должна быть разработана система технической диагностики, осуществляющая сбор, хранение и анализ информации, о состоянии изделия. Информация должна непрерывно поступать от датчиков, регистрирующих обороты, температуру, давление, вибрации и т. п. Система технической диагностики должна включать сигнализаторы состояния узлов, наличия стружки в масле, опасного уровня температур и вибраций и т. п. Система должна включать тесты для поиска и локализации неисправностей.

3. Система обслуживания должна содержать регламентные работы, профилактические осмотры и ремонты.

Техническое обслуживание может включать принудительную замену отдельных деталей и узлов после определенной наработки или календарного времени.

4. В пределах общего срока службы изделия могут быть предусмотрены промежуточные ремонты, сроки которых определяются соображениями надежности и экономической целесообразности.

Надежность отремонтированных изделий должна подтверждаться специальными испытаниями.

5. Должны проводиться исследования конструкционной прочности деталей и узлов с эксплуатационными повреждениями (коррозии, эрозии, забоины, износ и др.).

На основании таких исследований и опыта эксплуатации устанавливаются нормы и эталоны на допустимые повреждения.

ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ, ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТКАЗОВ

Время появления отказа t^* рассматривают как случайную величину. Вероятность безотказной работы за время t

$$P(t) = \text{Вер}(t^* > t). \quad (1)$$

Символ Вер означает вероятность.

Пусть в начальный момент времени начали работу N_0 изделий. Если к моменту времени наработки t_i исправными оказались $N_n(t_i)$, а неисправными $N^*(t_i)$ изделий, то статистическая оценка вероятности безотказной работы

$$P(t_i) = \frac{N_n(t_i)}{N_0} = 1 - \frac{N^*(t_i)}{N_0}. \quad (2)$$

Для простоты допустим, что число изделий настолько велико, что статистическая оценка близка к истинной вероятности. Пусть за время работы

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (3)$$

число отказавших изделий увеличилось на

$$\Delta N_i^* = N^*(t_{i+1}) - N^*(t_i). \quad (4)$$

Вероятность отказа изделия за время Δt_i может быть определена:

$$\text{Вер}(t_i < t^* < t_{i+1}) = \frac{N^*(t_{i+1}) - N^*(t_i)}{N_0} = \frac{\Delta N_i^*}{N_0}.$$

Если отнести вероятность отказа в промежутке Δt_i к величине самого промежутка, то получим плотность распределения отказов

$$f(t_i) \approx \frac{\Delta N_i^*}{N_0 \Delta t_i}. \quad (5)$$

Более точно плотность распределения в момент t

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N^*(t)}{N_0 \Delta t} = \frac{1}{N_0} \frac{dN^*}{dt}. \quad (6)$$

Плотность (частота) отказов (плотность вероятности отказов) представляет собой число отказов в единицу времени (скорость выживания), отнесенное к первоначальному числу изделий. Если $F(t)$ — функция распределения случайной величины t^* , то

$$F(t) = \text{Вер}(t^* < t) = 1 - P(t). \quad (7)$$

Функция распределения связана с плотностью вероятности отказов

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = \int_0^t f(t) dt, \quad (8)$$

так как время до появления отказа величина положительная. Из последнего соотношения следует

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = -\frac{dP}{dt}. \quad (9)$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ представляет собой число отказов в единицу времени, отнесенное не к первоначальному числу изделий, а к числу изделий, находящихся в эксплуатации в данный момент,

$$\lambda(t_i) \approx \frac{1}{N_n(t_i)} \frac{\Delta N^*(t_i)}{\Delta t_i}. \quad (10)$$

Если учесть, что

$$N_n(t_i) \Delta t_i = \Delta t_{i\Sigma}$$

— суммарная наработка всех изделий за время Δt_i , то интенсивность отказов равна числу отказов в данном интервале времени, отнесенному к общей наработке изделий в этом же промежутке времени:

$$\lambda(t_i) \approx \frac{\Delta N^*(t_i)}{\Delta t_{i\Sigma}}. \quad (11)$$

Более точно интенсивность отказов в момент времени t

$$\lambda(t) = \frac{1}{N_n(t)} \frac{dN^*}{dt}. \quad (12)$$

Интенсивность отказов характеризует плотность вероятности отказов в ближайший промежуток времени, если до его начала отказ еще не произошел.

Интенсивность отказов и плотность вероятности отказов связаны соотношением

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \quad (13)$$

Равенство (13) следует из (12), если записать его в виде

$$\lambda(t) = \frac{N_0}{N_n(t)} \frac{dN^*}{N_0 dt}$$

и учесть формулу (6).

Пример. В эксплуатацию с ресурсом 300 ч выпущена партия из 500 двигателей.

Число снятых двигателей после различной наработки характеризуется следующими данными

Время наработки, ч	50	100	150	200	250	300
Общее число снятых двигателей	20	24	30	34	40	50

Определить плотность вероятности и интенсивность отказов в период времени от 0 до 50 ч и от 200 до 250 ч и вероятность безотказной работы за ресурс.

Решение. За первый период снято 20 двигателей и плотность вероятности отказов (для середины интервала — 25 ч).

$$f(25) = \frac{20}{500 \cdot 50} \approx 0,80 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч};$$

интенсивность отказов (среднее число работающих двигателей — 490)

$$\lambda(25) = \frac{20}{490 \cdot 50} = 0,82 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

За период от 200 до 250 ч снято 6 двигателей.

Плотность вероятности отказов

$$f(225) = \frac{6}{500 \cdot 50} = 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

Среднее число работавших двигателей $500 - \frac{1}{2}(34 + 40) = 463$.

Интенсивность отказов

$$\lambda(225) = \frac{6}{463 \cdot 50} = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

Вероятность безотказной работы за ресурс

$$P(300) = 1 - \frac{50}{500} = 0,9.$$

Среднее время безотказной работы. Если $f(t)$ — плотность вероятности отказов, то среднее время безотказной работы

$$T_{cp} = \bar{t} = \int_0^{\infty} t f(t) dt. \quad (14)$$

Интегрированием по частям находим и другую эквивалентную формулу

$$T_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (15)$$

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Это уравнение связывает вероятность безотказной работы с интенсивностью отказов.

Из уравнений (9) и (13) получаем

$$\lambda(t) = - \frac{dP}{P(t) dt}$$

или

$$\frac{dP}{P(t)} = -\lambda(t) dt.$$

Интегрируя обе части равенства от 0 до t , находим

$$\ln P(t) \Big|_0^t = \ln P(t) - \ln P(0) = - \int_0^t \lambda(t) dt. \quad (16)$$

Предполагая, что в начальный момент времени $t = 0$ изделие находится в исправном состоянии,

$$P(0) = 1,$$

получаем из равенства (16)

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(t) dt \right\}. \quad (17)$$

Уравнение (17) является основным уравнением теории надежности, так как позволяет по протеканию интенсивности отказов определить вероятность безотказной работы.

ОБЩАЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ ПО ВРЕМЕНИ НАРАБОТКИ

Практически установлено, что изменение интенсивности отказов по времени для большинства сложных систем (машин, узлов) носит характер кривой, показанной на рис. 1. Период приработки (I) характеризуется повышенным значением интенсивности отказов; при нормальной эксплуатации (II) интенсивность отказов уменьшается и изменяется сравнительно мало, отказы носят внезапный, случайный характер. В периоде усиленного износа (III) интенсивность отказов снова резко возрастает. Поэтому перед эксплуатацией сложной системы целесообразно проводить кратковременные сдаточные испытания, отсеивающие дефекты приработки. Система, удовлетворительно прошедшая начальный период, более надежна, чем

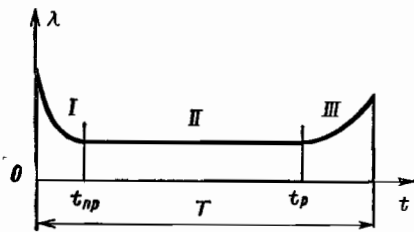


Рис. 1. Зависимость интенсивности отказов от времени наработки

система, находящаяся в начальном периоде. Замена старых узлов (деталей) новыми целесообразна только в периоде III . При профилактической замене деталей на новые в периоде II надежность конструкции не возрастает, а уменьшается. Ресурс изделия следует назначать в начале третьего периода (периода износа и старения).

ПРОГНОЗИРУЕМАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Пусть известно, что система проработала без отказа время t . Какова вероятность безотказной работы в следующий период продолжительности τ ? Если случайная величина — время работы до отказа t^* , то

$$P(\tau; t) = \text{Вер}(t^* - t > \tau) = \frac{P(t + \tau)}{P(t)}. \quad (18)$$

$P(t)$ можно рассматривать как начальную (априорную) прогнозируемую вероятность непрерывной работы системы, которая была исправна в начальный момент времени $t = 0$.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ЗАКОН НАДЕЖНОСТИ

Основной период эксплуатации обычно характеризуется почти постоянной интенсивностью отказов. В этом периоде отказы происходят от случайных факторов (попадание посторонних предметов, неблагоприятное сочетание внешних факторов, усталостные разрушения и др.) и носят внезапный характер. Время появления отказа не связано с предыдущей наработкой изделия.

При экспоненциальном законе надежности предполагается, что интенсивность отказов является величиной постоянной (рис. 2):

$$\lambda(t) = \lambda. \quad (19)$$

Вероятность безотказной работы по уравнению (17)

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (20)$$

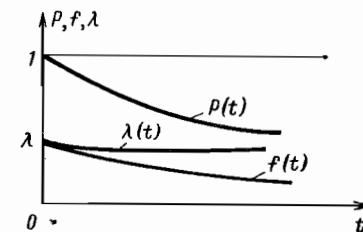


Рис. 2. Экспоненциальное распределение времени безотказной работы

Плотность распределения отказов

$$f(t) = - \frac{dP}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (21)$$

Среднее время безотказной работы

$$T_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (22)$$

Вероятность безотказной работы можно теперь записать в такой форме:

$$P(t) = e^{-\frac{t}{T_{\text{ср}}}}. \quad (23)$$

Экспоненциальный закон распределения справедлив для описания потока отказов с постоянной интенсивностью.

Понятие потока отказов вводится для восстанавливаемых в процессе эксплуатации изделий.

Для потока отказов величина $T_{\text{ср}}$ представляет собой среднюю наработку на один отказ.

Важным свойством экспоненциального закона надежности является то, что он относится к «нестареющим» системам. Для такого закона (и только для него!) прогнозируемая вероятность безотказной работы не зависит от предыдущей наработки:

$$P(\tau, t) = \frac{P(t+\tau)}{P(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\tau}. \quad (24)$$

Пример. Изделие имеет ресурс 1000 ч и интенсивность отказов $\lambda = 0,1 \cdot 10^{-3}$ 1/ч (среднее время наработки на отказ $T_{ср} = 10\,000$ ч).

Определить вероятность безотказной работы первые 10 ч и за весь ресурс, считая справедливым экспоненциальный закон надежности.

Решение. Значение безотказной работы за первые 10 ч работы;

$$P(10) = e^{-0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10} \approx 0,999.$$

Вероятность безотказной работы за весь ресурс $P(1000) = e^{-0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3} = 0,90$,

во если известно, что изделие отработало исправно 990 ч, то вероятность отсутствия отказов за последние 10 ч снова будет 0,999.

Рассмотрим определение интенсивности отказов (или средней наработки на отказ) при экспоненциальном распределении. Если известно, что для n испытываемых изделий время работы от отказа составило t_1^* , t_2^* , ..., t_n^* , то следует принять

$$T = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^*. \quad (25)$$

Однако на практике информация о работоспособности изделий относится к определенному времени эксплуатации, в течение которого часть изделий получила отказы, а остальные отработали его исправно. Тогда следует принять для данного времени испытаний

$$T = \frac{t_{\Sigma}}{K} = \frac{\text{Суммарная наработка всех изделий}}{\text{Общее число отказов}}. \quad (26)$$

Пример. Определить среднюю наработку до отказа для экспоненциального закона надежности, если за время эксплуатации имеются следующие данные: 30 изделий отработали исправно 3000 ч, 10 изделий по 1000 ч, 7 изделий по 1500 ч; сняты три изделия после наработки соответственно 500, 2000 и 2500 ч.

Решение. Суммарное время наработки

$$t_{\Sigma} = 30 \cdot 3000 + 10 \cdot 1000 + 7 \cdot 1500 + 500 + 2000 + 2500 = 115,5 \cdot 10^3 \text{ ч.}$$

Средняя наработка до отказа $T = \frac{t_{\Sigma}}{K} = \frac{115,5 \cdot 10^3}{3} = 38,5 \cdot 10^3 \text{ ч.}$

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Нормальное распределение применяют в теории надежности для описания отказов, вызванных износом [детали]. Плотность распределения времени безотказной работы при нормальном законе распределения (рис. 3)

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}}. \quad (27)$$

где параметры распределения \bar{t} и σ_t — среднее значение времени и среднее квадратическое отклонение.

При нормальном распределении время t может быть отрицательным, что противоречит физическому смыслу. Однако, если среднее время \bar{t} значительно превышает σ_t ($\bar{t} > 3\sigma_t$), отрицательная часть распределения не имеет практического значения,

Функция распределения

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_t}\right), \quad (28)$$

где Φ — функция Лапласа.

Вероятность безотказной работы при нормальном законе распределения

$$P(t) = 1 - F(t) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_t}\right). \quad (29)$$

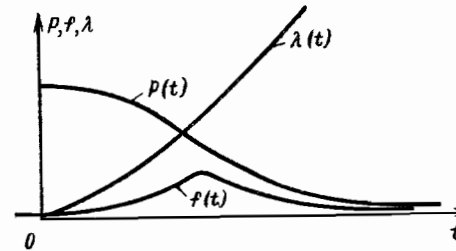


Рис. 3. Нормальное распределение времени безотказной работы

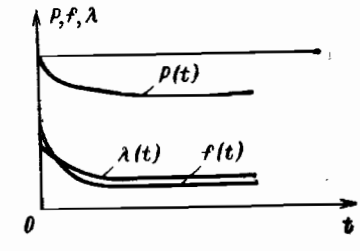


Рис. 4. Распределение Вейбулла времени безотказной работы ($m < 1$)

Приведем еще значение интенсивности отказов

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}}}{\sigma_t \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_t}\right) \right]}. \quad (30)$$

При больших t ($t > \bar{t} + 2\sigma_t$) величина

$$\lambda(t) \approx \frac{t-\bar{t}}{\sigma_t^2}. \quad (31)$$

При $t \rightarrow \infty$

$$f(t) \rightarrow 0, \quad \lambda(t) \rightarrow \infty.$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙБУЛЛА ДЛЯ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Это распределение используют для статистических моделей надежности в первый период эксплуатации («приработочные» отказы). Функцию распределения принимают в виде ($t > 0$)

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t^m}. \quad (32)$$

Закон Вейбулла имеет два положительных параметра: λ и m . Экспоненциальное распределение является частным случаем распределения Вейбулла при $m = 1$.

Особенно просто по закону Вейбулла выражается вероятность безотказной работы (рис. 4)

$$P(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t^m}. \quad (33)$$

Плотность распределения

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = \lambda m t^{m-1} e^{-\lambda t^m}, \quad (34)$$

Интенсивность распределения

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \lambda m t^{m-1}, \quad (35)$$

Если $0 < m < 1$, то интенсивность отказов со временем убывает.

НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Если система включает несколько элементов, причем отказ одного из них приводит к отказу всей системы в целом, то такое соединение элементов называют последовательным (рис. 5).

Например, узлы двигателя — компрессор и турбина, можно считать соединенными последовательно, так как отказ одного из этих узлов приводит к отказу всего двигателя.



Рис. 5. Система с последовательными элементами

Предполагая отказы отдельных элементов независимыми, получим вероятность безотказной работы системы из n последовательных элементов:

$$P(t) = P_1(t) P_2(t) \dots P_n(t). \quad (36)$$

При последовательном включении элементов вероятность безотказной работы уменьшается. Например, если для одного элемента $P_1 = 0,99$, то для 10 последовательно соединенных подобных элементов

$$P = P_1^{10} = 0,99^{10} = 0,90.$$

Важное свойство системы с последовательными элементами состоит в следующем. Если $\lambda_i(t)$ — интенсивность отказов i -го элемента, то для всей системы

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda_{\Sigma}(t) dt}, \quad (37)$$

где

$$\lambda_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (38)$$

При последовательном соединении элементов интенсивности отказов суммируются.

НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В этом случае (рис. 6) отказ системы наступает только тогда, когда отказали все, без исключения, элементы.

Вероятность отказа

$$F(t) = 1 - P(t). \quad (39)$$

Если $F_i(t)$ — вероятность отказа i -го элемента, то

$$F(t) = F_1(t) F_2(t) \dots F_n(t). \quad (40)$$

Вероятность безотказной работы системы

$$P(t) = 1 - (1 - P_1(t))(1 - P_2(t)) \dots (1 - P_n(t)). \quad (41)$$

Если вероятность безотказной работы элементов одинакова и равна $P_1(t)$, то

$$P(t) = 1 - (1 - P_1(t))^n. \quad (42)$$

Из этого равенства можно получить величину $P_1(t)$, если задана $P(t)$

$$P_1(t) = 1 - \sqrt[n]{1 - P(t)}. \quad (43)$$

Пример. Определить необходимую вероятность безотказной работы элемента, если система из трех параллельных элементов должна иметь вероятность безотказной работы (за время t) $P(t) = 0,999$.

Решение. Из уравнения (43) находим

$$P_1(t) = 1 - \sqrt[3]{1 - 0,999} = 0,90.$$

Из равенства (42) и (43) можно сделать вывод, что надежность системы с параллельными элементами значительно выше надежности отдельного элемента.

Параллельное соединение — метод создания надежной системы из «ненадежных» элементов.

Систему, содержащую параллельно работающие элементы, называют системой с резервированием.

Применяют три метода резервирования:

- 1) система с нагруженным («горячим») резервом;
- 2) система с облегченным резервом;
- 3) система с ненагруженным («холодным») резервом.

В первом случае резервный элемент работает в одинаковых условиях с основным (например, многодвигательный самолет).

Во втором случае резервный элемент работает в облегченных условиях, в третьем случае он включается в работу только после отказа основного элемента.

Целесообразность применения различных схем резервирования зависит от особенностей системы, назначения элементов и других факторов.

Например, если для включения элемента на заданную мощность требуется значительное время, то возможности использования холодного резерва становятся ограниченными.

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКО ПАРАЛЛЕЛЬНО РАБОТАЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Пусть система содержит несколько одновременно работающих объектов (турбины, электростанции, двигатели самолета и т. п.). При этом возможен отказ одного объекта при работе остальных и т. д. Какова вероятность, что будут одновременно работать все объекты, или только определенная их часть.

Рассмотрим вопрос на примере системы с одинаковыми элементами. Силовая установка самолета содержит 4 двигателя, причем вероятность безотказной работы двигателя

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}.$$

Вероятность отказа

$$F_1(t) = 1 - P_1(t).$$

Для анализа следует рассмотреть вероятности всех возможных ситуаций (первый двигатель работает, остальные отказали, второй работает и т. д.). Оказывается,

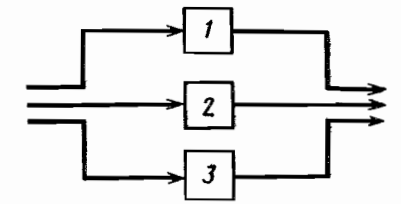


Рис. 6. Система с параллельными элементами

что такой анализ выполнить весьма просто, если использовать характеристический полином

$$[P_1(t) + F_1(t)]^4 = P_1^4(t) + 4P_1^3(t)F_1(t) + 6P_1^2(t)F_1^2(t) + 4P_1(t)F_1^3(t) + F_1^4(t) = 1.$$

Первый член ($P_1^4(t)$) выражает вероятность работы всех двигателей, второй — вероятность работы трех двигателей и отказа одного и т. д. Сумма

$$P_1^4(t) + 4P_1^3(t)F_1(t)$$

означает вероятность отказа не более одного двигателя (отсутствие отказа или отказ одного двигателя).

Пример. Определить вероятность отказов двигателей за полет длительностью 10 ч на четырехдвигательном самолете при интенсивности отказов $\lambda = \frac{1}{10^4}$ 1/ч.

Решение. Вероятность безотказной работы двигателя

$$P_1 = e^{-\frac{10}{10^4}} = 0,999.$$

Вероятность отказа

$$F(t) = 0,001.$$

Вычислим члены полинома:

$$P_1^4 = 0,996; \quad 4P_1^3F_1 = 3,988 \cdot 10^{-3}; \quad 6P_1^2F_1^2 = 5,988 \cdot 10^{-6}$$

$$4P_1F_1^3 = 3,966 \cdot 10^{-9}; \quad F_1^4 = 1 \cdot 10^{-12}.$$

Вероятность безотказной работы всех четырех двигателей

$$P_0 = P_1^4 = 0,996.$$

Вероятность отсутствия отказов или отказа одного из двигателей

$$P \leq 1 = P_1^4 + 4P_1^3F_1 = 0,999988.$$

Вероятность безотказной работы не менее двух двигателей (отсутствие отказов, отказ одного или двух двигателей)

$$P \leq 2 = P_1^4 + 4P_1^3F_1 + 6P_1^2F_1^2 = 0,999999996$$

Так как самолет может продолжать полет с двумя двигателями, то из примера видна высокая надежность системы в связи с отказом двигателей.

РАСЧЕТ ЧИСЛА ИЗДЕЛИЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В ЭКСПЛУАТАЦИИ

Для расчета используют экспоненциальный закон надежности. Если $T_{дс}$ — средняя наработка до выывания изделия из эксплуатации (в ремонт или на списание), то в момент времени t число изделий в эксплуатации

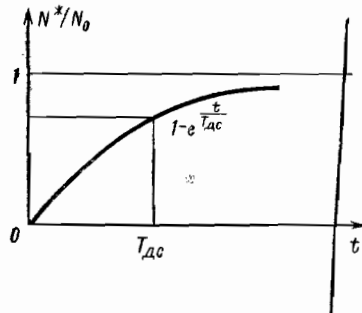


Рис. 7. «Кривая убыли» изделий из эксплуатации

$$N_n(t) = N_0 e^{-\frac{t}{T_{дс}}}. \quad (44)$$

Число «убывших» двигателей

$$N^*(t) = N_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{дс}}}\right). \quad (45)$$

В последних формулах N_0 — число изделий, поступивших в эксплуатацию в начальный момент времени $t = 0$.

На рис. 7 дана «кривая убыли» — зависимость относительного числа вышедших из

делий от времени наработки. При $t = T_{дс}$

$$\frac{N^*}{N_0} = 1 - e^{-1} = 0,63.$$

Это означает, что 63% изделий будут сняты с эксплуатации и направлены в ремонт.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Существуют различные показатели надежности, многие из которых включаются в стандарты и технические условия.

Выбор нормируемых показателей надежности и их регламентация связаны с назначением изделия, режимом его использования, последствиями отказов и другими факторами.

В качестве основных показателей надежности обычно используют следующие: вероятность безотказной работы $P(t)$ и наработка на отказ T .

Для ремонтируемых (восстанавливаемых) изделий величина T представляет среднее значение наработки между отказами. Она определяется в рассматриваемом интервале времени

$$T = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad (46)$$

где N — число изделий в статистической совокупности (выборке), t_i и m_i — наработка и число отказов i -го изделия в рассматриваемом интервале времени.

Для отказов, неустранимых в эксплуатации, в качестве показателя надежности используют среднюю наработку до первого отказа $T_{ср}$. Среднюю наработку до отказа определяют отдельно для отказов различных типов. Например, для пассажирских авиационных двигателей средняя наработка до отказа в полете составляет обычно

$$T_{о.п} \approx (2 \div 8) \cdot 10^4 \text{ ч},$$

тогда как средняя наработка на один досрочно снятый двигатель

$$T_{д.с.д} = (1 \div 6) \cdot 10^3 \text{ ч}.$$

Указанные характеристики отражают различные характеристики эксплуатации; величина $T_{д.с.д}$ является, в сущности, экономическим показателем.

Практика эксплуатации технических систем показывает, что их надежность по мере увеличения общей наработки парка изделий в эксплуатации возрастает. Это происходит в результате внесения конструктивных и технологических изменений в производство изделий, направленных на устранение отказов. При очень большой наработке (или времени эксплуатации) наступает «старение» парка изделий и наблюдается стабилизация, а затем и понижение уровня надежности.

**ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ПОВЫШЕНИЯ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН**

Прочность деталей машин (особенно при переменной внешней нагрузке) зависит от концентрации напряжений, а также от физико-механического состояния поверхностного слоя (остаточных напряжений и других факторов).

ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Остаточными называют напряжения, возникающие в деталях в результате обработки (литья, обработки давлением, резанием, термической обработки и т. п.) при отсутствии внешних воздействий (силовых и температурных).

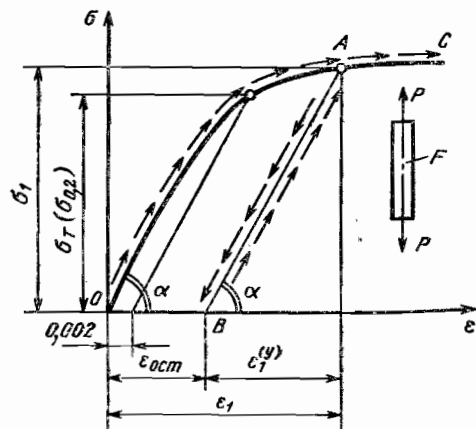


Рис. 1. Кривая деформирования образца из конструкционного материала при наличии разгрузки

после разгрузки он получит остаточную деформацию $\epsilon_{ост}$ (остаточное относительное удлинение, см. рис. 1)

$$\epsilon_{ост} = \epsilon_1 - \epsilon_1^{(y)},$$

где $\epsilon_1^{(y)}$ — упругая деформация стержня (тела) при разгрузке*,

$$\epsilon_1^{(y)} = - \frac{\sigma_1}{E},$$

здесь E — модуль упругости материала, $E = \text{tg } \alpha$.

При повторном нагружении, процесс пойдет по кривой ВАС, и новые пластические деформации возникнут при $\sigma > \sigma_1$. Если внешние растягивающие напряжения при повторном нагружении $\sigma \leq \sigma_1$, то образец работает в упругой области с новым значением предела текучести $\sigma_{T(1)} = \sigma_1$ (в результате первого нагружения увеличивается упругая область работы образца). Если в процессе упруго-пластического нагружения тела в нем создается неоднородное или деформированное состояние (например, при растяжении стержня с выточкой, изгибе или кручении гладкого стержня), то при разгрузке в нем возникают остаточные напряжения.

Остаточные напряжения равны разности между истинными напряжениями в упруго-пластическом теле и напряжениями, которые создавались бы в нем если бы

* Процесс разгрузки можно представить как приложение напряжения σ_1 с обратным знаком.

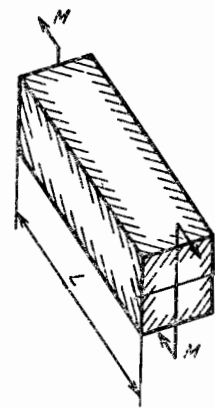
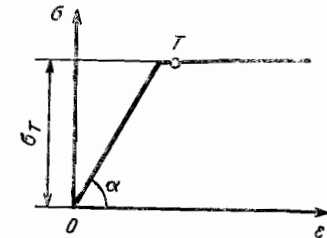


Рис. 2. Схема изгиба стержня

Рис. 3. Схематизированная кривая деформирования без упрочнения



его материал был идеально упругим. Поясним это на примере чистого изгиба стержня (рис. 2). Для расчета примем схематизированную кривую деформирования без упрочнения (рис. 3), одинаковую для растяжения и сжатия. Если в результате изгиба стержня наибольшие напряжения в крайних (верхних и нижних рис. 4, а, б) волокнах $\sigma \leq \sigma_T$, то стержень работает в области упругой деформации

$$\sigma_{max} = \frac{6M}{bh^3} \leq \sigma_T.$$

При $M > \frac{1}{6} \sigma_T bh^3$ в крайних волокнах возникают пластические деформации.

Предположим, что при данном значении M область пластических деформаций распространяется от $\frac{h}{2}$ до $\frac{h_1}{2}$ (рис. 4) и напряжения в ней $\sigma = \sigma_T$. При $y < \frac{h_1}{2}$ напряжения изменяются по линейному закону

$$\sigma = \sigma_T \frac{2y}{h_1}.$$

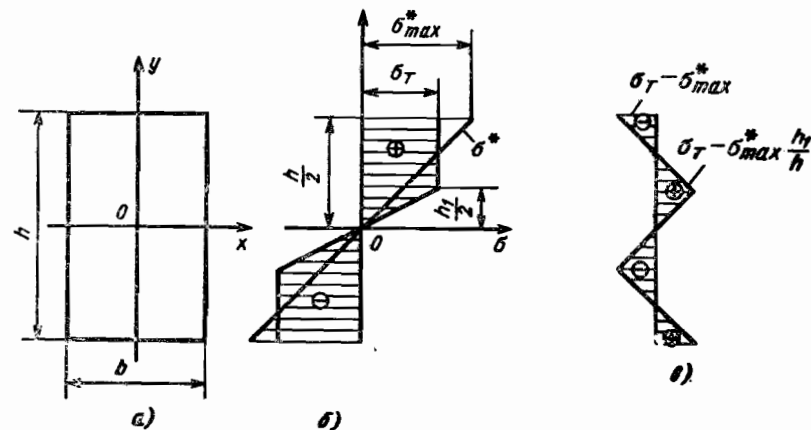


Рис. 4. Эпюры остаточных напряжений после пластического изгиба

Из условия равновесия

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_b y dy = \frac{1}{4} \sigma_1 b (h^2 - h_1^2) + \frac{1}{6} \sigma_1 b h_1^2$$

находим, что

$$h_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\sigma_1 b}} \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_1 b h^2 - M}$$

Напряжения в продольных сечениях стержня определяются следующими равенствами (рис. 4, б):

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 \frac{2y}{h_1}; & |y| < \frac{1}{2} h_1; \\ \sigma_1; & \frac{1}{2} h_1 < |y| < \frac{1}{2} h. \end{cases}$$

Если бы материал стержня был идеально упругим, то распределение напряжений соответствовало бы линейному закону

$$\sigma^* = \frac{12M}{bh^3} y,$$

а наибольшее напряжение при $y = \pm \frac{h}{2}$,

$$\sigma_{\max}^* = \frac{6M}{bh^2}.$$

После разгрузки (после снятия момента M) остаточные напряжения в стержне $\sigma_{\text{ост}} = \sigma - \sigma^*$.

Например, при $y = \frac{1}{2} h$ $\sigma_{\text{ост}} = \sigma_1 - \frac{6M}{bh^2}$; при $y = \frac{1}{2} h_1$ $\sigma_{\text{ост}} = \sigma_1 - \frac{6M}{bh^2} \frac{h_1}{h}$.

Эпюра остаточных напряжений (рис. 4, в) здесь, как и во всех других случаях, оказывается самоуравновешенной (равнодействующие усилия и моменты равны нулю).

В зоне наибольшей напряженности знак остаточных напряжений обычно противоположен знаку деформации, их вызывающей.

После снятия момента ось стержня будет иметь остаточный прогиб, который также можно определить следующим образом. При действии момента M деформация слоя на расстоянии $\frac{h_1}{2}$ от оси стержня $\epsilon = \frac{h_1}{2R} = \frac{\sigma_1}{E}$, где R — радиус кривизны слоя.

Наибольший прогиб оси стержня

$$f = \frac{L^2}{8R} = \frac{1}{4} \frac{\sigma_1 L^2}{E h_1}.$$

При идеально упругом материале

$$R^* = \frac{Eh}{2\sigma_{\max}^*},$$

а наибольший прогиб

$$f^* = \frac{1}{4} \frac{\sigma_{\max}^* L^2}{Eh} = \frac{3}{2} \frac{ML^2}{Ebh^3}.$$

Остаточный прогиб

$$f_{\text{ост}} = f - f^* = \frac{1}{4} \frac{L^2}{E} \left(\frac{\sigma_1}{h_1} - \frac{\sigma_{\max}^*}{h} \right)$$

направлен в сторону прогиба стержня при действии момента M , так как $f > f^*$.

На процесс образования остаточных напряжений существенно влияет поведение материала при последовательном изменении направления нагружения (рис. 5).

Кривая OAC представляет собой обычную кривую деформирования. В точке A начинается разгрузка (участок AB), а затем производится нагружение в противоположном направлении (сжатие, участок BC_1). Кривая BC_1 расположена несколько выше кривой $BA_1C_1^*$, повторяющей ветвь BAC , что объясняется эффектом Баушингера. Условия появления остаточных напряжений, связанные с неоднородностью предварительной пластической деформации, лежат в основе метода упрочнения деталей машин путем их преднамеренного поверхностного пластического деформирования, а также термической обработки.

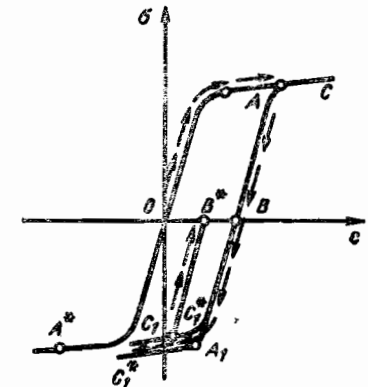


Рис. 5. Кривая деформирования при изменении направления нагрузки

УПРОЧНЕНИЕ ДЕТАЛЕЙ МАШИН ПОВЕРХНОСТНЫМ ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ

Для повышения конструкционной прочности деталей машин широко применяют поверхностное пластическое деформирование (статическое и динамическое), реализуемое различными способами. Такое упрочнение оказывается наиболее эффективным для деталей сложной формы или изготовленных из твердых материалов, а также при наличии концентраторов напряжений.

Эти способы упрочнения основаны на получении поверхностных сжимающих напряжений за счет неоднородной упруго-пластической деформации (растяжения поверхностных слоев детали в зоне контакта детали и цилиндрического или сферического инструмента (ролика, шарика, дорна и т. п.) или рабочего тела (например, дробы). Деформирование поверхностных слоев облегчается при скольжении или качении прижатого инструмента по поверхности детали, так как за счет сил трения увеличивается интенсивность напряжений в зоне контакта. Для повышения стойкости инструмента его изготавливают из более прочного материала, чем обрабатываемая деталь. Эффективным оказывается использование материалов с высоким модулем упругости. Дробь изготавливают из менее прочного материала (чугун, стекло, неметаллы и др.), так как в момент соударения она работает в условиях сжатия.

Упрочнение деталей машин дробью распространено во многих отраслях машиностроения. Этому в значительной мере способствовали высокая производительность, небольшие затраты на специальное оборудование и возможность эффективного упрочнения разнообразных деталей из различных материалов особенно деталей сложной конструкции, когда применение других видов обработки затруднено.

Остаточные напряжения в поверхностных слоях деталей возникают в результате неоднородной упруго-пластической деформации поверхностных слоев от ударов дробы.

В зависимости от способа передачи кинетической энергии дробы различают несколько методов упрочнения дробью.

Пневмодробеструйное упрочнение деталей осуществляется на универсальных установках, в которых кинетическая энергия струи сжатого воздуха передается дробы. Интенсивность наклепа и размеры ядра распыла дробы зависят от диаметра форсунки и насадки сопла.

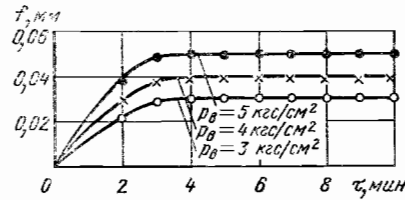


Рис. 6. Зависимость прогибов в контрольных образцах после пневмодробеструйной обработки от длительности наклепа при различных давлениях воздуха p_v

Для обработки применяют литую стальную дробь ДСЛ диаметром 0,5—1,4 мм. Если обрабатываемая деталь имеет галтели, то диаметр дроби $d \leq (1,2 \div 1,6)R_{\min}$, где R_{\min} — минимальный радиус упрочняемой галтели.

Упрочнение деталей из сталей и сплавов осуществляют при давлении воздуха $p_v = 3 \div 4$ кгс/см² в течение 1—3 мин. Время обработки устанавливают экспериментально на контрольных образцах из того же материала. Продолжительность обработки, после которой прогиб контрольного образца не изменяется, определяет время наклепа [2]. На рис. 6 показана зависимость прогибов контрольных образцов из стали 12Х2НВФА от длительности наклепа τ при односторонней обработке. В данном примере при $\tau = 3$ мин достигается оптимальная степень наклепа и сплошность обработки.

Пневмодробеструйной обработке подвергают сварные соединения (швы и околошовные зоны), зубчатые колеса из закаленных цементированных сталей, корпусные и другие детали машин.

При упрочнении плоских сварных образцов из сплава ХН68ВМТЮК дробью ДСЛ диаметром 0,5—1 мм при $p_v = 3,8$ кгс/см² и $\tau = 3$ мин создаются сжимающие напряжения (рис. 7) и ликвидируются растягивающие остаточные напряжения от сварки. Эпюры осевых сжимающих напряжений, построенные для трех образцов,

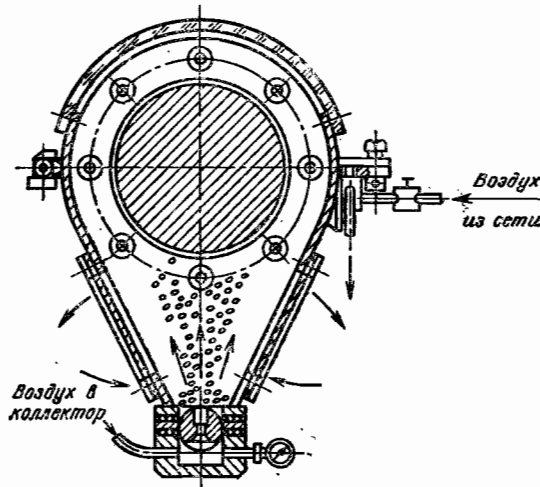


Рис. 8. Схема камеры для пневмодинамической обработки деталей

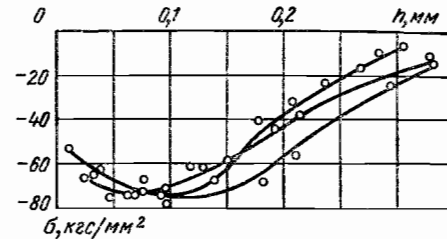


Рис. 7. Зависимость осевых остаточных напряжений в образцах от глубины стравленного слоя

имеют подповерхностный максимум, характерный для деталей, прошедших упрочняющую обработку поверхностным пластическим деформированием. Усталостная прочность в результате такой обработки повысилась в 2 раза [3].

Пневмодинамическое упрочнение является разновидностью пневмодробеструйного упрочнения. В отличие от последнего пневмодинамический способ обработки позволяет производить местное упрочнение больших деталей или полное поверхностное упрочнение небольших деталей, помещенных в замкнутую камеру (рис. 8). В нижней части камеры размещается небольшое количество шариков (0,2—0,6 кг) диаметром 1,3—1,6 мм из стали ХШ15.

При подаче сжатого воздуха ($p_v = 3 \div 7$ кгс/см²) к соплам (или целевидному соплу) образуются многочисленные струи, которые подхватывают стальные шарики и направляют их на упрочняемую поверхность. Отраженные от детали шарики попадают либо сразу в днище, либо устремляются к экрану и от него к днищу.

Зона эффективного упрочнения в камере расположена на расстоянии 60—80 мм вверх от сопла.

Масса шариков для камеры и продолжительность обработки устанавливают экспериментально по контрольным образцам. Обычно $\tau = 15 \div 20$ мин.

Такой способ обработки часто применяют для упрочнения сварных соединений, шлицевых хвостовиков валов и т. д.

Гидродробеструйное упрочнение. Особенность этого вида упрочнения состоит в снижении параметров шероховатости поверхности, что важно для зубчатых колес, лопаток компрессора, трубопроводов и др. Обработка деталей осуществляется струей трансформаторного масла при давлении $p_m = 3 \div 5$ кгс/см² и стальными шариками. Благодаря применению масла (и других смазывающе-охлаждающих жидкостей) понижается температура в зоне контакта шариков с поверхностью и исключается трение без смазки. Образующаяся пленка защищает впадины на поверхности детали, выступы (гребешки) деформируются.

На рис. 9 приведены графики изменения тангенциальных остаточных напряжений по глубине цементованного слоя при различной обработке выкружки зубьев (табл. 1) колес из стали 20Х3МВФ (число зубьев $z = 50$, модуль $m = 3$ мм, коэффициент смещения $x = 0$, угол профиля исходного контура $\alpha = 25^\circ$, ширина зуба $b = 8$ мм).

Зубья нарезают червячной фрезой с протуберанцем, создающим искусственное поднутрение зубьев, которое позволяет производить шлифование эвольвентного участка зубьев со свободным выходом колес в зоне переходной поверхности.

Анализ результатов наглядно иллюстрирует эффективность дробеструйной обработки. При шлифовании уменьшаются остаточные напряжения в поверхностных слоях. Наибольшие сжимающие напряжения действуют в нешлифованных переходных поверхностях; усталостная прочность зубьев оказывается наибольшей. Увеличение давления масла ($> 5,5$ кгс/см²) не влияет на усталостную прочность зубьев. Следует отметить стабильное снижение параметров шероховатости от $Ra = 0,63 \div 1,25$ мкм до $Ra = 0,16 \div 0,32$ мкм.

Виброгалтовка (вибрационная обработка) является разновидностью гидродробеструйной обработки. Она производится в контейнере, жестко закрепленном на столе трехкоординатной виброустановки, стальными шариками диаметром 2,5—5 мм и растворителем. Частота колебаний стола 20—40 Гц, амплитуда 3—6 мм.

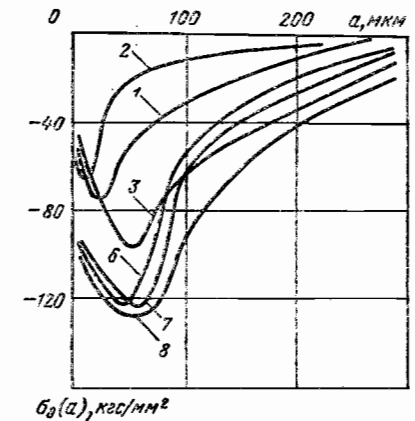


Рис. 9. Графики изменения тангенциальных остаточных напряжений во впадинах зубьев по глубине цементованного слоя

1. Результаты влияния технологии обработки переходной поверхности зубьев колес на остаточные напряжения и выносливость зубчатых передач

Номер кривой на рис. 9	Характер обработки	$\sigma_{\theta \max}$, кгс/мм ²	Предельная нагрузка P_{03} , кгс/см
1	Цементация на глубину 0,7—1,2 мм, закалка, обработка холодом и низкий отпуск при 250° С; твердость поверхности зубьев $HRC \geq 58$, твердость сердцевины $HRC 32-42$	—75	760
2	То же, шлифование	—63	705
3	То же, шлифование, обработка дробью диаметром 1,6 мм из стали ШХ15 при $p_m = 5,3$ кгс/см ²	—95	1000
4	То же, обработка дробью при $p_m = 3$ кгс/см ²	—	835
5	То же, $p_m = 4$ кгс/см ²	—	980
6	То же, $p_m = 5,5$ кгс/см ²	—126	1260
7	То же, $p_m = 6,5$ кгс/см ²	—126	1215
8	То же, $p_m = 8$ кгс/см ²	—130	1250

Примечания: 1. Переходные поверхности (зубьев колес (см. кривые 4—8) не шлифовали.

2. Во всех случаях $t = 3$ мин на один зуб.

3. Усталостную прочность оценивали по предельной нагрузке в вершине зуба, отнесенной к ширине венца; нагрузка изменялась от 0 до P_{03} .

Таким способом производят упрочнение сепараторов подшипников, лопаток турбин и др. После виброобработки уменьшается шероховатость поверхности и повышается выносливость деталей за счет абразивного и упрочняющего действия рабочих тел смеси [3].

Виброгалтовку рекомендуется проводить после гидродробеструйной обработки для доупрочнения и зачистки кромок деталей. Такая технология упрочнения позволяет на 50% повысить предел выносливости компрессорных лопаток из сплава BT9 [3].

Часто на виброустановках проводят *виброшлифование* деталей рабочей смесью из стальных шариков диаметром 1,6—2,5 мм, абразивных гранул, паст и растворителя.

Иногда применяют стеклянные и кварцевые шарики диаметром 0,05—0,2 мм. Время шлифования деталей составляет 90—150 мин.

В результате виброшлифования уменьшается шероховатость, в поверхностных слоях возникают сжимающие остаточные напряжения, снижается трудоемкость слесарной обработки и т. д.

По данным работ [2, 3] виброшлифование повышает усталостную прочность компрессорных лопаток на 25—32%.

Упрочнение микрошариками. Для обработки тонкостенных деталей, а также деталей с малыми радиусами переходов и галтелей используют микрошарики (стеклянные, фарфоровые и др.) диаметром 0,02—0,2 мм. В результате обработки достигают параметров шероховатости поверхности деталей, равных 0,16—0,63 мкм.

Благодаря высокой проникающей способности микрошариков такая обработка оказывается исключительно эффективной для упрочнения резьбовых деталей, елочных хвостовиков лопаток и пазов дисков, а также других деталей сложной конфигурации.

Кинетическая энергия микрошарикам сообщается с помощью центробежных дробемеров, позволяющих легко регулировать скорость полета и размеры ядра пыли дробы.

Уменьшение диаметра дробы и увеличение скорости ее полета приводит к возрастанию остаточных напряжений в поверхностных слоях и уменьшению глубины наклепа.

Возрастанию остаточных напряжений в поверхностных слоях и смещению максимума остаточных напряжений к наружной поверхности способствует смещение максимума интенсивности напряжений σ_1 при контакте с деталью дробы малого диаметра вследствие уменьшения размеров площадки контакта (см. гл. 29), а также уве-

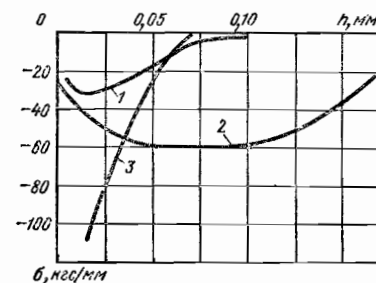


Рис. 10. Графики остаточных напряжений в образцах после различных видов обработки поверхности

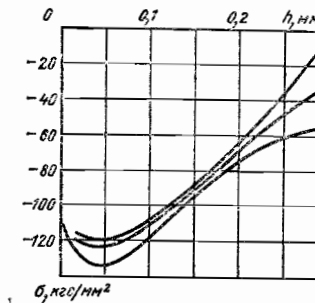


Рис. 11. Графики остаточных напряжений после алмазного выглаживания поверхности образца

личение сопротивления пластическому деформированию при увеличении скорости полета дробы и уменьшение деформированного объема.

На рис. 10 приведены типичные графики остаточных напряжений после обработки микрошариками (кривая 3), гидродробеструйного упрочнения (кривая 2) и точения (кривая 1) образцов из титанового сплава BT9, которые подтверждают одну из главных преимуществ такого способа обработки.

Другое важное преимущество упрочнения микрошариками состоит в существенном сокращении длительности обработки до $t = 15 \div 45$ с при скорости полета микрошариков $v = 60 \div 70$ м/с. Меньшие значения t соответствуют меньшим диаметрам шариков.

Микрошариками целесообразно упрочнять сепараторы и кольца подшипников, диски, зубчатые колеса, резьбовые детали и др. В результате такой обработки шпильки с накатанной резьбой можно на 40—50% повысить выносливость резьбовых соединений из титановых сплавов.

Обработка микрошариками обеспечивает повышение усталостной прочности замковых соединений турбин на 20% [3].

Алмазное выглаживание в качестве отделочно-упрочняющей обработки получило широкое распространение. Упрочнение достигается пластическим деформированием обрабатываемой поверхности скользящим индентором из монокристалла синтетического алмаза (корунда, карбида кремния, карбида бора и т. п.), закрепленного в упругой (подпружиненной) державке. Алмазный наконечник (индентор) выполняется в виде сферы, цилиндра и режы тора.

Благодаря высокой твердости алмаза и других синтетических корундов и карборундов, низкому коэффициенту трения по металлу (особенно при наличии смазывающе-охлаждающих жидкостей), низким параметрам шероховатости и хорошей теплопроводности удается обрабатывать почти все пластически деформируемые металлы (даже при $HRC 60-65$), получая при этом высокие эксплуатационные свойства (износостойкость, коррозионную стойкость, усталостную прочность и др.).

Алмазное выглаживание деталей производят, как правило, на токарных станках при закреплении державки в резцедержателе. Радиус сферы индентора 1,5—3,0 мм. Продольная подача назначается такой, чтобы обеспечивалось перекрытие поверхностью индентора линий контакта (0,03—0,08 мм/об). Скорость выглаживания в пределах 35—45 м/мин обеспечивает минимальный износ алмаза и плавное снятие микрошероховатостей. Радиальные усилия (15—30 кгс) меньше, чем при других подобных методах обработки (обкатка роликом, шариком и т. п.) из-за малой площади контакта.

Алмазное выглаживание формирует в поверхностных слоях высокие сжимающие напряжения (рис. 11), имеющие подповерхностный максимум [4].

Обычно алмазному выглаживанию подвергают плунжеры насосов, валы и оси. Усталостная прочность упрочненных деталей на 30—35% выше, чем неупрочненных.

Наряду с алмазным выглаживанием получает распространение виброалмазное выглаживание, позволяющее формировать сложный (узорчатый) рельеф поверхности

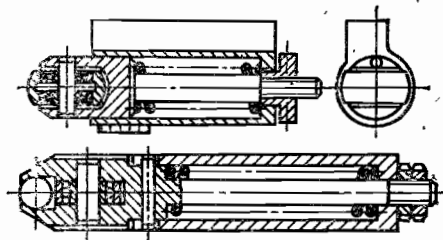


Рис. 12. Инструмент для обкатки деталей

В первом случае наряду с небольшим упрочнением при относительно небольших радиальных усилиях достигают снижения параметров шероховатости, что в ряде случаев позволяет исключить шлифование.

При упрочняющей обкатке за счет высоких давлений в поверхностных слоях деталей возникают высокие сжимающие напряжения, параметры шероховатости при этом повышаются.

Упрочняющей обкатке обычно подвергают поверхности валов и осей, впадины зубчатых колес и резьбовых деталей.

Диаметр ролика для обкатки валов и осей диаметром $d \leq 20$ мм принимают в пределах $0,5 < \frac{D_p}{d} < 5$. С уменьшением диаметра ролика и радиуса его профиля R

при прочих равных условиях увеличиваются остаточные напряжения в поверхностных слоях и повышаются параметры шероховатости.

При упрочнении (обычно фасонными роликами) галтелей валов зона обкатки должна выходить за галтель на длину не менее $0,05d$. Посадочные места валов упрочняются с выходом за зону посадки на длину $(0,4-0,5)d$.

Режимы обкатки (усилие на ролик, скорость обкатки, подача) устанавливают экспериментально. В результате упрочняющей обкатки усталостная прочность валов повышается на 25—40%.

В ряде отраслей машиностроения применяют виброударную обкатку (чеканку) галтелей валов.

Отверстия в деталях упрочняют раскатыванием роликовыми или шариковыми раскатниками, а также протягиванием и продавливанием шарика (для отверстий диаметром < 30 мм). В результате такого упрочнения усталостную прочность детали с отверстием удается повысить на 30—50%.

ТЕРМИЧЕСКАЯ И ХИМИКО-ТЕРМИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА

При термической обработке в поверхностных слоях детали возникают остаточные напряжения. Сжимающие остаточные напряжения могут быть созданы путем быстрого охлаждения после нагрева до температуры ниже критической (например, при нагреве деталей из конструкционных сталей до 600°C и охлаждения в воде).

Экспериментальные исследования показали, что сжимающие остаточные напряжения после термической обработки повышают усталостную прочность деталей без концентраторов напряжений на 10—30% и на 50—80% деталей с концентраторами напряжений.

При поверхностной закалке токами высокой частоты в поверхностных слоях обычно создаются сжимающие остаточные напряжения, повышающие усталостную прочность деталей с концентрацией напряжений (на 70—200% при наличии прессовой посадки).

В зонах обрыва закаленного слоя, например в галтелях валов, возникают остаточные напряжения растяжения, и усталостная прочность валов в этих местах снижается на 20—30%. Эти зоны после поверхностной закалки необходимо упрочнять (роликом или дробью).

деталей, что важно для плунжерных пар, маслоуплотнительных колец и др.

Обкатка роликом и шариком. Процесс обкатки осуществляется перемещением прижатого к обрабатываемой детали ролика или шарика, закрепленного в специальной державке (рис. 12). Приспособления могут быть двух-, трех- и многороликовыми (многошариковыми) с механическим, пневматическим и гидравлическим приводом.

В зависимости от усилия на ролик (шарик) различают *сглаживающе-упрочняющую* и *упрочняющую* обкатку.

Сжимающие остаточные напряжения в поверхностных слоях деталей образуются при цементации, азотировании и цианировании. Если при шлифовании поверхностей после химико-термической обработки не возникают остаточные напряжения (обычно растягивающие), то усталостная прочность деталей возрастает.

Обработка дробью поверхностей, подвергнутых химико-термической обработке и последующему шлифованию, оказывает благоприятное влияние на несущую способность деталей при переменных нагрузках, так как стабилизирует свойства поверхностных слоев деталей (устраняет некоторые дефекты и растягивающие напряжения от шлифования).

Остаточные напряжения в поверхностных слоях образуются и при нанесении гальванических покрытий. При никелировании возникают растягивающие остаточные напряжения, снижающие пределы выносливости деталей на 10—30% (большие значения относятся к сталям повышенной прочности). Несколько меньшее снижение прочности наблюдается в случае хромирования и меднения. При нанесении цинкового, кадмиевого и серебряного покрытий усталостная прочность деталей не изменяется.

При назначении покрытий необходимо учитывать условия работы деталей (особенно рабочую температуру, см. главу 3).

Эффективность упрочняющей обработки может быть оценена экспериментально путем измерения остаточных напряжений или натуральных механических испытаний деталей в эксплуатационных условиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Большинство деталей машин после упрочнения оказывается в условиях сложного напряженного состояния. Наибольший практический интерес представляют напряжения в поверхностных слоях. Эти напряжения имеют, как правило, наибольшие значения и оказывают существенное влияние на работоспособность деталей. Обычно определяют остаточные напряжения в направлении главных осей. Если деталь является осесимметричной, то в поверхностных слоях в общем случае имеется двухосное напряженное состояние (рис. 13), σ_θ — тангенциальное напряжение; σ_z — осевое напряжение. Радиальное напряжение σ_r на поверхности детали равно нулю. В слоях, близких к поверхности, значение σ_r невелико, и этой составляющей обычно пренебрегают.

Осевые и тангенциальные напряжения в поверхностных слоях деталей определяют механическими методами, в основном путем последовательного стравливания поверхностных слоев с призматических стержней и колец толщиной 5—6 мм, вырезаемых из детали электроискровым или другим методом.

Для оценки эффективности режимов упрочнения деталей часто ограничиваются срав-

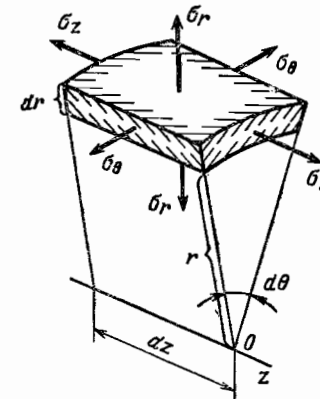


Рис. 13. Схема напряженного состояния цилиндрического элемента

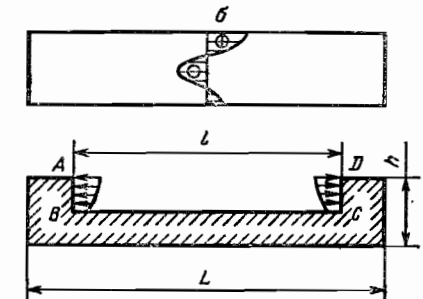


Рис. 14. Сечение для выявления остаточных напряжений

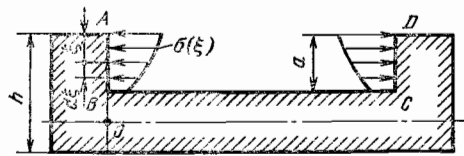


Рис. 15. К расчету остаточных напряжений

Для определения остаточных напряжений будем последовательно удалять слой материала $ABCD$ (рис. 14), находящиеся в зоне постоянных (по длине) напряжений. Концевые сечения при этом не удаляются, они размещаются в захватах прибора.

Неизвестные напряжения считаем положительными (растягивающими). Они действуют по граням AB и CD , поэтому удаление области эквивалентно приложенную к этим граням равных по величине, но противоположно направленных напряжений. Предполагаем, что остаточные напряжения действуют в площадках, перпендикулярных к оси стержня. Поэтому поверхность BC не должна быть нагружена остаточными напряжениями.

Определим остаточные напряжения $\sigma(a)$, действующие в стержне на расстоянии a от верхней грани стержня (рис. 15). В результате удаления слоя материала толщиной a оставшаяся часть стержня деформируется под действием напряжений по плоскостям AB и DC .

На расстоянии ξ от верхней грани действуют напряжения $\sigma(\xi)$. Изгибающий момент от напряжений на грань AB относительно середины высоты стержня (точки O) равен

$$M = \int_0^a \sigma(\xi) \left[\frac{1}{2}(h+a) - \xi \right] b d\xi,$$

где b — ширина стержня.

Если стержень изгибается сосредоточенными моментами M на конце, то прогиб

$$f = \frac{Ml^3}{8EJ}, \quad (1)$$

где l — длина стержня; J — момент инерции поперечного сечения,

$$J = \frac{b(h-a)^3}{12}. \quad (2)$$

Влиянием осевых сил на изгиб пренебрегаем, что не вносит существенной погрешности. Учитывая равенства (1) и (2), найдем

$$f(a) = \frac{3l^2}{2E} \frac{\int_0^a \sigma(\xi) \left[\frac{1}{2}(h+a) - \xi \right] b d\xi}{(h-a)^3}. \quad (3)$$

Переносим величину $(h-a)^3$ в левую часть равенства и продифференцировав интеграл по верхнему пределу a , получим

$$(h-a)^3 \frac{df}{da}(a) - 3(h-a)^2 f(a) = \frac{3}{2} \frac{l^2}{E} \left[\frac{1}{2} \int_0^a \sigma(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \sigma(a)(h-a) \right]. \quad (4)$$

нительным исследованием осевых остаточных напряжений, оказывающихся в большинстве случаев наиболее существенное влияние на работоспособность деталей.

Рассмотрим определение осевых остаточных напряжений в призматическом стержне. Предположим, что за исключением небольших областей у концов стержня, остаточные напряжения постоянны по его длине.

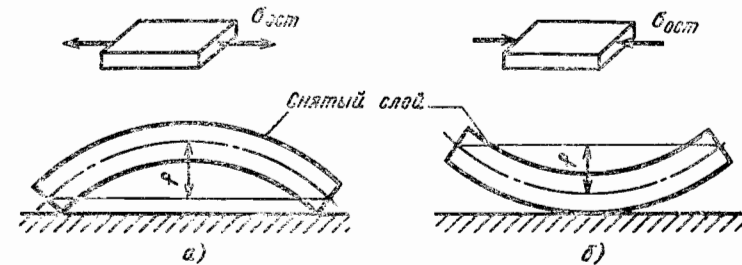


Рис. 16. Схема прогиба стержня при снятии верхнего слоя: а — растягивающие напряжения; б — сжимающие напряжения.

Из уравнения (4) при $a = 0$ получим формулу для определения остаточных напряжений в наружном слое

$$\sigma(0) = -\frac{4Eh^2}{3l^2} \frac{df}{da}(0). \quad (5)$$

После дифференцирования по a равенства (4) имеем

$$(h-a)^2 \frac{d^2f}{da^2}(a) - 6(h-a) \frac{df}{da}(a) + 6f(a) = \frac{3l^2}{4E} \frac{d\sigma}{da}(a).$$

Проинтегрировав обе части этого равенства, получим

$$(h-a)^2 \frac{df}{da}(a) - 4(h-a)f(a) + 2 \int_0^a f(\xi) d\xi - h^2 \frac{df}{da}(0) = \frac{3l^2}{4E} [\sigma(a) - \sigma(0)].$$

С учетом соотношения (5) найдем, что остаточные напряжения на расстоянии a от верхней грани равны

$$\sigma(a) = \frac{4E}{3l^2} \left[(h-a)^2 \frac{df}{da}(a) - 4(h-a)f(a) + 2 \int_0^a f(\xi) d\xi \right]. \quad (6)$$

Из соотношения (6) видно, что для определения остаточных напряжений необходимо знать не только прогиб в данный момент, но и проследить за изменением прогиба по мере увеличения толщины снятого слоя. Если толщина снимаемого слоя мала в сравнении с толщиной образца $\left(\frac{h}{a} < 15\right)$, то в соотношении (6) можно пренебречь последним членом и определять остаточные напряжения по равенству

$$\sigma(a) = \frac{4E}{3l^2} \left[(h-a)^2 \frac{df}{da}(a) - 4(h-a)f(a) \right]. \quad (7)$$

При $\frac{h}{a} > 50$ можно сохранить только первый член

$$\sigma(a) = \frac{4E}{3l^2} (h-a)^2 \frac{df}{da}(a). \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) часто используют при расчетах остаточных напряжений (обычно $h = 4 \div 6$ мм, $a = 0,1 \div 0,3$ мм).

При вычислениях по формулам (6)–(8) необходимо учитывать правило знаков. Если значение $\sigma(a)$ оказывается положительным, то в слое действуют растягивающие остаточные напряжения. Прогиб f считают положительным, если он направлен в сторону снятого слоя (рис. 16).

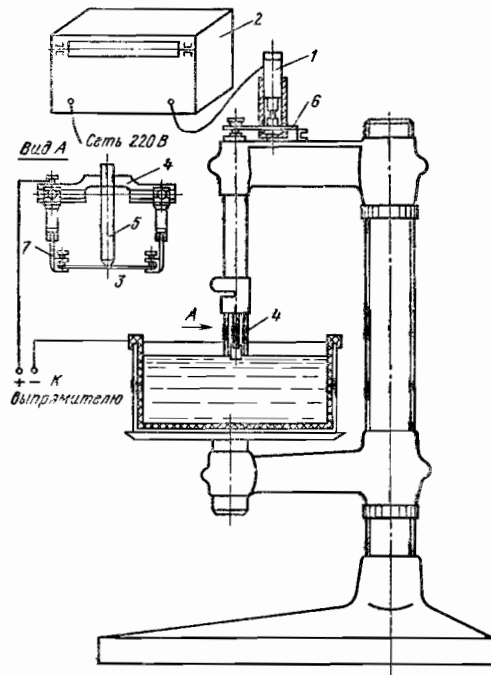


Рис. 17. Схема установки для определения остаточных напряжений

Для жаропрочных сплавов на никелевой основе используют электролит, содержащий 45% H_3PO_4 , 45% H_2SO_4 и 10% воды. Для титановых сплавов используют электролит, включающий 50% азотной кислоты (HNO_3), 10% плавиковой кислоты (HF) и 40% воды.

Особое внимание необходимо уделять вырезанию образца, чтобы избежать наведения дополнительных остаточных напряжений. Для этого часто применяют электроскопический метод, а также резку узким шлифовальным кругом с малой подачей и обильным охлаждением эмульсией.

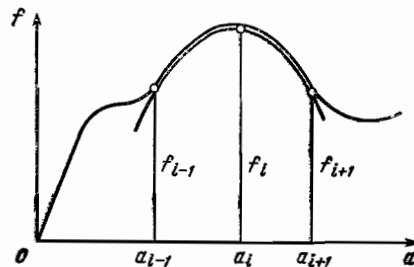


Рис. 18. График приближенного вычисления производной

На практике остаточные напряжения определяют с помощью специальных приборов. На рис. 17 показана схема прибора, который позволяет индукционным преобразователем и самописцем типа БВ-662 непрерывно записывать прогиб f от времени при стравливании поверхностных слоев образца 3.

Поверхности, не подвергающиеся травлению, покрывают воском. Образец закрепляют в держателе 4 с помощью тонких (упругих) пластинок 7, которые не препятствуют повороту его концевых сечений. Прогиб образца через наконечник 5 и рычаг 6 передается на преобразователь 1.

Для обеспечения равномерного травления электролит перемешивают. Скорость травления образца определяют с помощью взвешивания образца до и после окончания травления. Обычно скорости травления составляют 1–5 мкм/мин.

В зависимости от состава электролита напряжение на электродах колеблется в пределах 20–30 В, плотность тока 10–30 А/дм². Температура электролита 20–60° С.

Электролит для травления образцов из углеродистых сталей включает 80% фосфорной кислоты (H_3PO_4), 15% серной кислоты (H_2SO_4) и 5% хромового ангидрида.

Отметим некоторые особенности обработки результатов. Во многих практических задачах остаточные напряжения значительно изменяются в пределах поверхностных слоев (при толщине до 0,3 мм). В этом случае для получения надлежащей точности требуется последовательное удаление очень тонких слоев (травление с малой скоростью). Важным является достаточно точное вычисление величин, входящих в формулы (6)–(8).

Непосредственно из эксперимента получают графическую зависимость $f(a)$, которая в условиях равномерного травления эквивалентна зависимости $f(a)$. Требуется определить значения производной этой функции и интеграла в расчетных сечениях. С математической точки зрения это известная задача теории приближенных вычислений.

Для более точного вычисления производной кривую заменяют параболой, проходящей через три заданные точки (рис. 18) с координатами a_{i-1} , f_{i-1} ; a_i , f_i ; a_{i+1} , f_{i+1} . Уравнение параболы в этом случае имеет вид

$$f(a) = f_{i-1} \frac{(a-a_i)(a-a_{i+1})}{(a_{i-1}-a_i)(a_{i-1}-a_{i+1})} + f_i \frac{(a-a_{i-1})(a-a_{i+1})}{(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})} + f_{i+1} \frac{(a-a_{i-1})(a-a_i)}{(a_{i+1}-a_{i-1})(a_{i+1}-a_i)}$$

Значение производной равно

$$\frac{df(a)}{da} = f_{i-1} \frac{2a-a_i-a_{i+1}}{(a_{i-1}-a_i)(a_{i-1}-a_{i+1})} + f_i \frac{2a-a_{i-1}-a_{i+1}}{(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})} + f_{i+1} \frac{2a-a_{i-1}-a_i}{(a_{i+1}-a_{i-1})(a_{i+1}-a_i)} \quad (9)$$

Если в соотношении (9) положим $i=1$, $a_{i-1}=a_0=0$, $f_{i-1}=f_0=0$, то получим формулу для вычисления производной в начале координат (рис. 19)

$$\frac{df}{da}(a) = \frac{f_1}{a_1(a_1-a_2)}(2a-a_2) + \frac{f_2}{a_2(a_2-a_1)}(2a-a_1)$$

Соотношение для определения напряжения в поверхностном слое можно получить из равенства (6) при $a=0$:

$$\sigma(0) = \frac{4Eh^2}{3l^2} \frac{df}{da}(0)$$

Для повышения точности измерения остаточных напряжений рекомендуется применять большие значения $\frac{l}{h}$ (обычно $\frac{l}{h} > 10$).

Более подробно вопрос об определении остаточных напряжений в элементах конструкций рассмотрен в монографии И. А. Биргера [3].

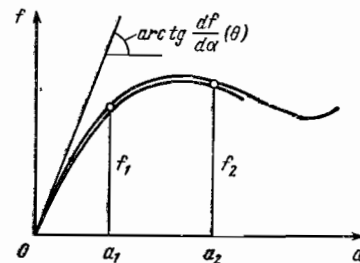


Рис. 19. График приближенного вычисления производной в начале координат

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Основная задача технической диагностики — распознавание состояния системы в условиях ограниченной информации. Информация поступает в виде показаний датчиков вибраций, температур, давлений, путем визуальных осмотров и т. д.

Для сложных технических систем запись параметров ведется дискретно или непрерывно.

Кроме того, в технической диагностике рассматриваются поиск и автоматический контроль неисправностей. Это связано с разработкой методов и средств контроля, разработкой диагностических тестов, оценкой контролеспособности технических систем.

Техническая диагностика стала одним из важнейших методов повышения надежности систем в эксплуатационных условиях.

Она допускает эксплуатацию ответственных изделий и их техническое обслуживание «по состоянию», что дает значительный экономический эффект.

Одной из важных особенностей технической диагностики является распознавание состояния в условиях ограниченной информации, когда требуется руководствоваться определенными приемами и правилами для принятия решения.

Ниже излагаются основы теории технической диагностики.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Состояние системы описывается совокупностью (множеством) определяющих ее параметров (признаков). «Множество определяющих параметров (признаков)» может быть различным для разных задач распознавания.

Состояние системы часто описывается с помощью комплекса признаков

$$K = (K_1, K_2, \dots, K_j, \dots, K_N), \quad (1)$$

где признак K_j имеет m_j разрядов.

Простой признак имеет два разряда ($m_j = 2$), которые можно обозначать K_j и \bar{K}_j (наличие или отсутствие признака) или любым двоичным символом: да, нет; двойным числом и т. д. Например, признак: «повышение температуры больше 20°C » является двухразрядным признаком.

Если признак имеет несколько диагностических интервалов, то его называют многоуровневым. Так, признак K_j может иметь три разряда (в зависимости от уровня повышения температуры):

$$\Delta T < 10^\circ \quad 10^\circ - 20^\circ \quad > 20^\circ$$

$$K \quad K_{j_1} \quad K_{j_2} \quad K_{j_3}$$

Во многих случаях систему удобно характеризовать совокупностью параметров — многомерным вектором

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N). \quad (2)$$

В большинстве случаев параметры x_j имеют непрерывное распределение. Например, параметром x_j можно считать «повышение температуры»

$$x_j = \Delta T.$$

Во многих методах диагностики должно быть известно распределение контрольного параметра для данного состояния системы. Описание системы с помощью дискретных величин (признаков) и непрерывных (параметров) зависит в первую очередь от объема располагаемой информации.

Распознавание состояния системы. Распознавание — процесс установления диагноза, состоит в отнесении предъявленной совокупности признаков к одному из типичных состояний. Число таких состояний зависит от особенностей задачи и целей рас-

познавания. Часто требуется провести выбор одного из двух возможных состояний, например «исправное состояние» и «неисправное состояние». В других случаях необходимо конкретизировать неисправные состояния: «разрушение подшипника», «разрушение шлицевого соединения» и т. п.

Теория распознавания тесно связана с проблемой распознавания образов, изучаемой в кибернетике.

Постановка задачи технической диагностики состоит в следующем.

Имеется техническая система, которая может находиться в одном из таких состояний (диагнозов). Известна совокупность признаков (параметров), характеризующих каждое состояние системы. Требуется построить решающее правило, с помощью которого предъявленный для распознавания объект (набор признаков) был бы отнесен к одному из диагнозов.

Имеются несколько основных методов решения задач распознавания:

- вероятностные;
- метрические;
- логические;
- методы разделения в пространстве признаков.

Ниже кратко изложены основы указанных методов. Более подробные сведения см. в работе [1].

ВЕРоятностные методы распознавания

Метод Байеса. Метод, основанный на обобщенной формуле Байеса, является весьма эффективным, так как позволяет достаточно просто одновременно учесть признаки различной физической природы — дискретные и непрерывные. Это достигается благодаря использованию единообразных и безразмерных характеристик признаков — частот встречаемости (вероятностей) признаков при различных состояниях.

Если имеется диагноз D_i и простой признак K_j , то вероятность совместного появления событий (наличие у объекта состояния D_i и признака K_j)

$$P(D_i K_j) = P(D_i) P(K_j/D_i) = P(K_j) P(D_i/K_j). \quad (3)$$

Из последнего соотношения получаем

$$P(D_i/K_j) = P(D_i) \frac{P(K_j/D_i)}{P(K_j)}, \quad (4)$$

где в последнем равенстве $P(D_i/K_j)$ — вероятность диагноза D_i после того, как стало известно наличие у рассматриваемого объекта признака K_j (апостериорная вероятность диагноза); $P(D_i)$ — вероятность диагноза D_i , определяемая по статистическим данным (априорная вероятность диагноза). Если обследовано N объектов и состояние D_i наблюдается в N_i изделиях, то

$$P(D_i) \approx \frac{N_i}{N}; \quad (5)$$

$P(K_j/D_i)$ — вероятность появления K_j у объектов с состоянием D_i . Если среди N_i объектов с диагнозом D_i у N_{ij} появился признак K_j , то

$$P(K_j/D_i) = \frac{N_{ij}}{N_i}, \quad (6)$$

$P(K_j)$ — вероятность появления признака K_j во всех объектах независимо от состояния (диагноза) объекта. Пусть из общего числа N признак K_j обнаружен у N_j объектов (с различным диагнозом!). Тогда

$$P(K_j) = \frac{N_j}{N}. \quad (7)$$

Как будет ясно из дальнейшего, специальное вычисление $P(K_j)$ не требуется.

Пусть проводится обследование ряда признаков $K(K_1, \dots, K_n)$ по v многозарядным признакам и K^* означает определенную реализацию комплекса признаков. При этом в каждом из признаков K_j проявляется один из разрядов, например в признаке K_j разряд p :

$$K_j = K_{jp}.$$

Обобщенная формула Байеса (для комплекса многозарядных признаков)

$$P(D_i/K^*) = P(D_i) \frac{P(K^*/D_i)}{P(K^*)} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

В последнем равенстве $P(D_j/K^*)$ — вероятность диагноза D_i , если комплекс признаков K получил реализацию K^* .

Формула (8) относится к любому из n состояний. Предполагается, что система находится в одном (и только в одном) из указанных состояний и потому

$$\sum_{S=1}^n P(D_S) = 1. \quad (9)$$

Вероятность появления комплекса признаков по формуле полной вероятности (комплекс признаков проявляется обязательно с одним из диагнозов)

$$P(K^*) = P(D_1)P(K^*/D_1) + \dots + P(D_n)P(K^*/D_n) = \sum_{S=1}^n P(D_S)P(K^*/D_S). \quad (10)$$

Теперь формула Байеса может быть представлена в окончательном виде

$$P(D_i/K^*) = \frac{P(D_i)P(K^*/D_i)}{\sum_{S=1}^n P(D_S)P(K^*/D_S)}. \quad (11)$$

Если комплекс признаков содержит v признаков, то

$$P(K^*/D_i) = P(K_1^*/D_i)P(K_2^*/K_1^*D_i) \dots P(K_v^*/K_1^* \dots K_{v-1}^*D_i), \quad (12)$$

где $K_j^* = K_{jp}$ — разряд признака K_j , выявившийся после обследования.

Для независимых признаков

$$P(K^*/D_i) = P(K_1^*/D_i)P(K_2^*/D_i) \dots P(K_v^*/D_i). \quad (13)$$

Если при данном диагнозе D_i некоторые признаки, например K_1 и K_2 , оказываются зависимыми, то

$$P(K_1^*K_2^*/D_i) \neq P(K_1^*/D_i)P(K_2^*/D_i). \quad (14)$$

Тогда в равенстве (13) вместо произведения двух первых членов следует внести

$$P(K_1^*/D_i)P(K_2^*/D_iK_1^*) = P(K_1^*K_2^*/D_i). \quad (15)$$

В большинстве практических задач, особенно при большом числе признаков, можно принимать условие независимости признаков даже при наличии существенных корреляционных связей.

Диагностическая матрица. Для определения вероятности диагноза (состояния) следует составить диагностическую матрицу (таблицу).

В ней помещаются условные вероятности признаков и априорные вероятности диагнозов.

Рассмотрим применение метода Байеса при наличии диагностических параметров x_j , распределенных непрерывно. Тогда для каждого из диагнозов D_i должна быть известна плотность распределения $f(x_j/D_i)$. Если для данного объекта получилось

Диагностическая матрица для многозарядных признаков

D_i	K_1			K_2				$K_j = x_j$	
	$P(K_{11}/D_i)$	$P(K_{12}/D_i)$	$P(K_{13}/D_i)$	$P(K_{21}/D_i)$	$P(K_{22}/D_i)$	$P(K_{23}/D_i)$	$P(K_{24}/D_i)$	$f(x_j/D_i)$	$P(D_i)$
D_1	0,8	0,2	0	0,1	0,1	0,6	0,2		0,15
D_2	0,1	0,7	0,2	0	0	0,3	0,7		0,12
D_n									

значение x_j^* , то вероятность появления x_j в интервале Δ , содержащем точку x_j^* , будет равна $f(x_j^*/D_i)\Delta$.

Величина Δ будет в числителе и знаменателе выражения (11) и не повлияет на результат. Для учета непрерывного признака в диагностической матрице должны содержаться плотности вероятности. В практических задачах часто используют нормальное распределение, для которого плотность вероятности задается двумя параметрами — средним значением и средним квадратическим отклонением.

В диагностической матрице для признака K_j указаны параметры соответствующего нормального распределения. Тогда при использовании формулы Байеса следует принять

$$P(K_j^*/D_i) = f(x_j^*/D_i) = \frac{1}{S_{x_j(i)}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_j^* - \bar{x}_j(i))^2}{2S_{x_j(i)}^2}}. \quad (16)$$

Таким образом, метод Байеса можно применять и в том случае, когда часть из параметров задана с помощью непрерывного распределения.

В некоторых случаях оказывается удобным провести замену непрерывного распределения многозарядным признаком, что не изменяет общего метода расчета.

Решающее правило. Предъявленный для распознавания объект, обладающий комплексом признаков K^* , считают принадлежащим диагнозу D_i , если

$$P(D_i/K^*) = \max, \quad (17)$$

т. е. вероятность диагноза D_i оказалась наибольшей.

Сумма вероятностей всех диагнозов

$$\sum_{S=1}^n P(D_S/K^*) = 1,$$

что вытекает из соответствий (8) и (10).

Однако, если вероятность $P(D_i/K^*)$ не слишком велика (например, меньше 0,4—0,5), то следует отказаться от постановки диагноза. Поэтому решающее правило можно сформулировать следующим образом:

$$K^* \in D_i \text{ если } P(D_i/K^*) = \max,$$

$$P(D_i/K^*) > P_i,$$

где P_i — пороговое значение для диагноза D_i (обычно принимают $P_i \geq 0,9$).

D_i	$P(K_1/D_i)$	$P(K_2/D_i)$	$P(D_i)$
D_1	0,2	0,3	0,05
D_2	0,4	0,5	0,15
D_3	0	0,05	0,80

Пример. Пусть при обследовании за газотурбинным двигателем проверяют два признака: K_1 — повышение температуры газа за турбиной более чем на 50°C , и K_2 — увеличение времени выхода на максимальные обороты более чем на 5 с.

Предположим, что для данного типа двигателей появление этих признаков связано либо с неисправностью топливного регулятора (состояние D_1), либо с увеличением радиального зазора в турбине (состояние D_2). При нормальном состоянии двигателя (состояние D_3) признак K_1 не наблюдается, а признак K_2 наблюдается в 5% случаев. Далее, на основании статистических данных известно, что 80% двигателей вырабатывают ресурс в нормальном состоянии, 5% двигателей имеют состояние D_1 и 15% — состояние D_2 . Известно также, что признак K_1 встречается при состоянии D_1 в 20%, а при состоянии D_2 — в 40% случаев; признак K_2 при состоянии D_1 встречается в 30%, а при состоянии D_2 — в 50% случаев. Сведем все эти данные в таблицу.

Найдем сначала вероятность состояний двигателя, когда обнаружены оба признака: K_1 и K_2 . Для этого, считая признаки K_1 и K_2 независимыми, примем формулы (11), (13):

$$P(D_1/K_1K_2) = \frac{0,05 \cdot 0,2 \cdot 0,3}{0,05 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0 \cdot 0,05} = 0,09,$$

аналогично получим

$$P(D_2/K_1K_2) = 0,91; \quad P(D_3/K_1K_2) = 0.$$

Определим вероятность состояний двигателя, если обследование показало, что при отсутствии признака K_1 признак K_2 наблюдается. Отсутствие признака K_1 есть признак наличия \bar{K}_1 (противоположное событие), причем $P(\bar{K}_1/D_i) = 1 - P(K_1/D_i)$.

Для расчета применяют также формулу (11), но значения $P(K_1^*/D_i)$ заменяют на $P(\bar{K}_1/D_i)$. Получим

$$P(D_2/\bar{K}_1K_2) = \frac{0,05 \cdot 0,8 \cdot 0,3}{0,05 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 1 \cdot 0,05} = 0,12$$

и аналогично

$$P(D_1/\bar{K}_1K_2) = 0,46; \quad P(D_3/\bar{K}_1K_2) = 0,41.$$

Вычислим вероятности состояний в том случае, когда оба признака отсутствуют:

$$P(D_1/\bar{K}_1\bar{K}_2) = \frac{0,05 \cdot 0,8 \cdot 0,7}{0,05 \cdot 0,8 \cdot 0,7 + 0,15 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 1 \cdot 0,95} = 0,03$$

$$P(D_2/\bar{K}_1\bar{K}_2) = 0,05; \quad P(D_3/\bar{K}_1\bar{K}_2) = 0,92.$$

Вероятности состояний D_1 и D_2 отличны от нуля, так как рассматриваемые признаки не являются детерминирующими.

Из приведенных расчетов можно установить, что при наличии K_1 и K_2 в двигателе с вероятностью 0,91 имеется состояние D_2 , т. е. увеличение радиального зазора. При отсутствии обоих признаков наиболее вероятно нормальное состояние (вероятность 0,92). При отсутствии признака K_1 и наличии признака K_2 вероятности состояний D_2 и D_3 примерно одинаковы (0,46 и 0,41) и для уточнения состояния двигателя требуется проведение дополнительных обследований.

Преимущества и недостатки метода Байеса. Некоторые преимущества метода Байеса указывались ранее. Главное из них — возможность оценки вероятности всех состояний системы на основании использования широкого набора признаков различной природы.

Основной недостаток метода Байеса — необходимость получения большой предварительной информации (составление диагностической матрицы).

Применению метода Байеса должна предшествовать статистическая обработка данных эксплуатации и, в некоторых случаях, специальные исследования, имитирующие неисправности (например, изменение вибраций двигателя, собранного с дефектной лопаткой и т. п.).

Другой недостаток метода Байеса — «угнетение» редких диагнозов.

Так как решение зависит от $P(D_i)$ — априорной вероятности диагноза, то при малых значениях $P(D_i)$ должна быть очень большая вероятность данной реализации комплекса признаков.

Это объясняется тем, что в основной расчетной формуле (9) в качестве множителя стоит $P(D_i)$, и потому данная реализация комплекса признаков для редкого диагноза

должна иметь очень высокую вероятность $P(K^*/D_i)$ и малую — при других диагнозах, чтобы величина $P(D_i/K^*)$ оказалась наибольшей.

Для компенсации этого недостатка проводят расчет, предполагая все априорные вероятности диагнозов одинаковыми:

$$P(D_1) = \dots = P(D_n) = \frac{1}{n}.$$

Это позволяет выяснить, для какого состояния наиболее характерна рассматриваемая реализация комплекса признаков.

МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Метод минимального риска. Эти методы были развиты в связи с задачами радиолокации, но могут вполне успешно использоваться в задачах технической диагностики.

Пусть проводится измерение параметра x (например, уровня вибраций изделия) и на основании данных измерений требуется сделать вывод о возможности продолжения эксплуатации (диагноз D_1 — исправное состояние) или о направлении изделия в ремонт (диагноз D_2 — неисправное состояние).

На рис. 1 даны значения плотности вероятности диагностического параметра x для двух состояний.

Пусть установлена контрольная норма для уровня вибраций x_0 .

В соответствии с этой нормой принимают:

$$\left. \begin{aligned} x < x_0 \quad x \in D_1 & \text{— исправное состояние;} \\ x > x_0 \quad x \in D_2 & \text{— неисправное состояние.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Знак \in означает, что объект с уровнем вибраций x относят к данному состоянию.

Из рис. 1 следует, что любой выбор величины x_0 связан с определенным риском, так как кривые f_1 и f_2 пересекаются.

Существуют два вида риска: риск «ложной тревоги», когда исправное изделие признают неисправным, и риск «пропуска цели», когда неисправное изделие считают годным.

В теории статистического контроля их называют риском поставщика и риском приемщика или ошибками первого и второго рода.

При данном x_0 вероятность ложной тревоги

$$\alpha = \int_{x_0}^{\infty} f_1(x) dx \quad (19)$$

и вероятность пропуска цели

$$\beta = \int_{-\infty}^{x_0} f_2(x) dx. \quad (20)$$

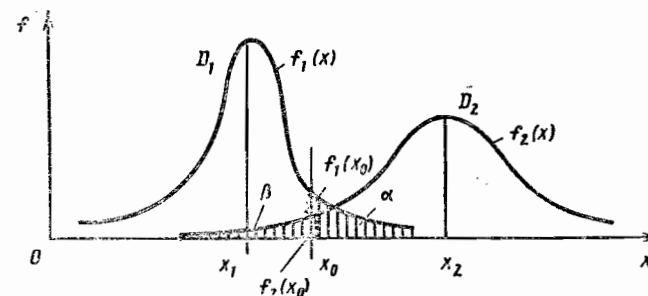


Рис. 1. Плотность вероятности диагностического признака

Задача теории статистических решений состоит в выборе оптимального значения x_0 .

По способу минимального риска рассматривается общая стоимость риска

$$R = C_{21}P(D_1) \int_{x_0}^{\infty} f_1(x) dx + C_{12}P(D_2) \int_{-\infty}^{x_0} f_2(x) dx, \quad (21)$$

где C_{21} — «цена» ложной тревоги; C_{12} — «цена» пропуска цели; $P(D_1)$ и $P(D_2)$ — априорные вероятности диагнозов (состояний), определяемые по предварительным статистическим данным. Величина R представляет собой «среднее значение» потери при ошибочном решении.

Из необходимого условия минимума

$$\frac{\partial R}{\partial x_0} = -C_{21}P(D_1)f_1(x_0) + C_{12}P(D_2)f_2(x_0) = 0 \quad (22)$$

получаем

$$\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} = \frac{C_{12}P(D_2)}{C_{21}P(D_1)}. \quad (23)$$

Можно показать, что для одномодальных распределенный условие (20) всегда обеспечивает минимум величины R . Если стоимость ошибочных решений одинакова, то

$$\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} = \frac{P(D_2)}{P(D_1)}. \quad (24)$$

Последнее соотношение минимизирует общее число ошибочных решений. Оно вытекает также из метода Байеса.

Метод Неймана — Пирсона. В этом методе исходят из условия минимума вероятности пропуска дефекта при допустимом уровне вероятности ложной тревоги.

Таким образом, вероятность ложной тревоги

$$\int_{x_a}^{\infty} f_1(x) dx \leq a, \quad (25)$$

где a — допустимый уровень ложной тревоги.

В рассматриваемых однопараметрических задачах минимум вероятности пропуска цели достигается при

$$\int_{x_0}^{\infty} f_1(x) dx = a. \quad (26)$$

Последнее условие и определяет величину граничного значения параметра (значение x_0).

При назначении величины a учитывают следующее:

1) число снимаемых с эксплуатации изделий должно превышать ожидаемое количество дефектных изделий в силу неизбежных погрешностей метода оценки состояния;

2) принимаемое значение ложной тревоги не должно, без крайней необходимости, нарушать нормальную эксплуатацию или приводить к большим экономическим потерям.

В практических задачах можно принимать

$$a = kP(D_2), \quad (27)$$

где k — коэффициент избыточности.

При дефектах с ограниченными последствиями принимают

$$k = 1 \div 3.$$

При опасных дефектах

$$k = 3 \div 10.$$

Можно использовать другой подход — определять x_0 исходя из выбранного уровня пропуска дефекта. Тогда

$$\int_{-\infty}^{x_0} f_2(x) dx = b, \quad (28)$$

причем можно принимать

$$b \leq \frac{1}{kN},$$

где k — коэффициент избыточности ($k = 1 \div 10$); N — общее число изделий, находящихся в эксплуатации. Во всех случаях $b < 0,05$, чтобы вероятность пропуска дефекта была пренебрежимо малой.

МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ЗОНЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Правило решения. В тех случаях, когда стоимость ошибок пропуска цели и ложной тревоги очень высока, можно уменьшить риск с помощью введения зоны неопределенности.

Правило решения будет теперь таким (рис. 2)

$$\begin{aligned} x < x_a & \quad x \in D_1; \\ x > x_b & \quad x \in D_2, \end{aligned} \quad (29)$$

$x_a < x < x_b$ — отказ от распознавания (зона неопределенности).

Разумеется, отказ от распознавания может иметь нежелательные последствия. Он означает, что для принятия решения необходима дополнительная информация (осмотры, измерения и т. п.).

Метод минимального риска. Общая стоимость риска выражается равенством

$$\begin{aligned} R = C_{21}P(D_1) \int_{x_b}^{\infty} f_1(x) dx + C_{12}P(D_2) \int_{-\infty}^{x_a} f_2(x) dx + \\ + C_0 \left[P(D_1) \int_{x_a}^{x_b} f_1(x) dx + P(D_2) \int_{x_a}^{x_b} f_2(x) dx \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где C_0 — цена отказа от распознавания.

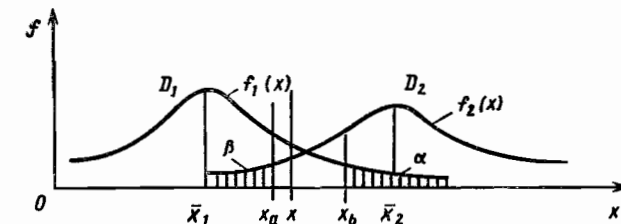


Рис. 2. Принятие решений при наличии зоны неопределенности

Необходимые условия минимума

$$\frac{\partial R}{\partial x_a} = C_{12}P(D_2)f_2(x_a) - C_0[P(D_1)f_1(x_a) + P(D_2)f_2(x_a)] = 0;$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_b} = -C_{21}P(D_1)f_1(x_b) + C_0[P(D_1)f_1(x_b) + P(D_2)f_2(x_b)] = 0.$$

Из последних уравнений следует

$$\frac{f_1(x_a)}{f_2(x_a)} = \frac{(C_{12} - C_0)P(D_2)}{C_0P(D_1)};$$

$$\frac{f_1(x_b)}{f_2(x_b)} = \frac{C_0P(D_2)}{(C_{21} - C_0)P(D_1)}. \quad (31)$$

Если стоимость отказа от распознавания $C_0 = 0$, то

$$x_a \rightarrow \infty, \quad x_b \rightarrow \infty,$$

и зона отказа занимает всю область.

Система распознавания в этом случае выключается из работы, что минимизирует риск (потери за отказ от распознавания отсутствуют). Стоимость C_0 не должна превышать стоимости ложной тревоги и пропуска цели, так как в противном случае зона отказа стягивается в точку.

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ

Пространство признаков. Метрические методы связаны с измерением расстояний в пространстве признаков.

Будем характеризовать состояние системы (изделия) вектором параметров

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (32)$$

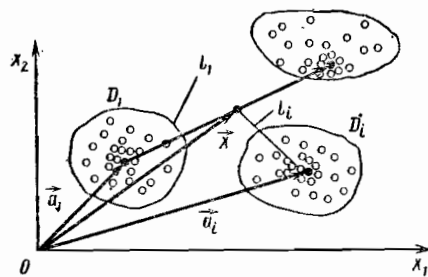


Рис. 3. Область диагнозов (состояний) в пространстве признаков

(рис. 3). Они образуют обучающую последовательность. Точки, входящие в области диагнозов, обычно располагаются более плотно в центральной части области.

Примем в качестве «типичного» изделия с данным диагнозом «среднюю точку», которую назовем эталоном.

Координаты эталона i -го диагноза

$$a_{ij} = \frac{1}{n_i} \sum_{S=1}^{n_i} a_{ijS} \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad (33)$$

где a_{ijS} — значение параметра x_j для образца S , принадлежащего диагнозу D_i .

Пусть предъявлено для распознавания изделие, характеризующееся вектором \vec{x} в пространстве признаков.

Решение вопроса об отнесении изделия к диагнозу D_i связано с измерением расстояния до эталонов.

Решающее правило. Принимается по минимальному расстоянию до эталона:

$$l_i = l_2 \quad x \in D_i, \quad (34)$$

т. е. если точка x ближе всего к эталону диагноза D_i , то вывод делается в пользу диагноза D_i .

Расстояния до i -го эталона

$$l_i = \left\{ \sum_{j=1}^m (x_j - a_{ij})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Предыдущие равенства определяют обычное евклидово расстояние.

В задачах диагностики часто оказывается целесообразным использовать обобщенные расстояния порядка ν

$$l_i = \left\{ \sum_{j=1}^m |x_j - a_{ij}|^\nu \right\}^{\frac{1}{\nu}}. \quad (36)$$

При $\nu = 1$ получается расстояние по Хемингу, при $\nu = 2$ — обычное расстояние.

При возрастании ν увеличивается роль наибольшего отклонения по какой-либо координате.

Расстояние (35) и (36) можно использовать для однородного, изотропного пространства признаков. Таким пространством будет пространство простых (двухрядных) признаков, кодируемых двоичными числами (0,1).

Однако в задачах технической диагностики часто приходится использовать признаки различной физической природы (например, уровень вибрационных перегрузок и повышение температуры), имеющих различную размерность.

Для учета указанного обстоятельства целесообразно ввести безразмерные расстояния. Например, по координате (направлению) x_j для точек \vec{x} и \vec{a}_i безразмерное расстояние можно принять в виде

$$\frac{x_j - a_{ij}}{\sigma_{ij}}, \quad (37)$$

где σ_{ij} — среднее квадратическое отклонение признака x_j для диагноза D_i .

Условие (37) содержит предположение, что для диагностики отклонение следует относить к «характерному масштабу» — среднему квадратическому отклонению.

Далее следует учесть различную диагностическую ценность признаков.

Для этого введем безразмерные диагностические коэффициенты C_{ij} и тогда, с помощью равенства (36), получим

$$l_i = \left\{ \sum_{j=1}^m \left| C_{ij} \frac{x_j - a_{ij}}{\sigma_{ij}} \right|^\nu \right\}^{\frac{1}{\nu}}. \quad (38)$$

Последние соотношения дают формулы для расстояний в неоднородном, неизоотропном пространстве.

Определение коэффициентов C_{ij} вызывает известные трудности.

В первом приближении для признака x_j , имеющего m_j диагностических интервалов, можно принять, что величина C_{ij} совпадает с диагностической ценностью признака:

$$C_{ij} = \sum_{S=1}^m P(x_{jS}/D_i) \log_2 \frac{P(x_{jS}/D_i)}{P(x_{jS})}, \quad (39)$$

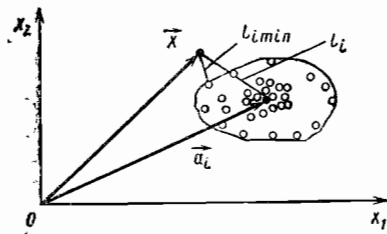


Рис. 4. Метод минимального расстояния до множества

где $P(x_{jS}/D_i)$ — вероятность интервала S признака x_i для диагноза (состояния) D_i , $P(x_{jS})$ — вероятность этого интервала для всех состояний.

В тех случаях, когда отсутствуют статистические сведения, величины C_{ij} можно назначать с помощью экспертных оценок или подбирать по опыту диагностики.

Метод минимального расстояния до множества. В этом методе учитывается минимальное расстояние до образцов, входящих в обучающую последовательность.

На рис. 4 показаны расстояния $l_{i \min}$ и l_i .

Решающее правило имеет вид

$$l_{i \min} = \min_{\vec{x} \in D_i} \quad (40)$$

т. е. если точка \vec{x} ближе всего к одной из точек обучающей последовательности диагноза D_i , то точка относится к этому диагнозу.

Метод минимального расстояния до множества представляет собой диагностику «по прецеденту», т. е. по образцу (изделию), наиболее близко напоминающему объект, предъявленный для распознавания.

Дополнение к решающему правилу в метрических методах

Метрические методы распознавания в отличие от вероятностных основаны на детерминистском подходе. Решающее правило устанавливает диагноз, считая его достоверным.

Обучающая последовательность, как уже указывалось ранее, составляется из образцов (изделий), для которых достоверно известен диагноз.

По смыслу задачи распознавания, если минимальное расстояние до эталона диагноза D_i мало отличается от других расстояний, то достоверность диагноза D_i вызывает сомнения.

Введем условные «вероятности» диагнозов

$$P_i = \frac{l_i}{\sum_{k=1}^n l_k} \quad (41)$$

где l_k — расстояние до эталона диагноза D_k .

Решение в пользу диагноза D_i принимается в случае, если

$$P_i = P_{i0}$$

где P_{i0} — уровень принятия решения для i -го диагноза (обычно $P_{i0} > 0,8$).

Такой способ сближает вероятностные и детерминистские методы распознавания. Применение метрических методов возможно и в том случае, когда области диагнозов пересекаются.

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИЗНАКОВ

Разделяющая функция и решающее правило. Как и в метрических методах распознавания, состояние изделия характеризуется точкой в пространстве признаков.

Предполагается, что области диагнозов не пересекаются, и поэтому возможно построить разделяющую поверхность.

Рассмотрим распознавание двух состояний D_1 и D_2 (дифференциальная диагностика или дихотомия).

При наличии нескольких диагнозов распознавание может быть сведено к последовательному применению рассматриваемой процедуры.

В основе методов разделения лежит построение скалярной функции параметров (признаков)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(\vec{x}), \quad (42)$$

принимаяющей различные знаки в двух областях диагноза.

Такую функцию называют разделяющей, и тогда

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{x}) > 0 & \text{ при } \vec{x} \in D_1; \\ f(\vec{x}) < 0 & \text{ при } \vec{x} \in D_2. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Таким образом, разделяющая функция имеет положительное значение для всех изделий, имеющих состояние D_1 и отрицательное значение в противоположном случае.

Условие (43) образует решающее правило для разделения в пространстве признаков.

Если для предъявленного для распознавания объекта, характеризующегося вектором \vec{x} , значение $f(\vec{x})$ положительно, объект считают принадлежащим состоянию D_1 , при отрицательном значении $f(\vec{x})$ — состоянию D_2 .

Уравнение

$$f(\vec{x}) = 0 \quad (44)$$

будет составлять уравнение разделяющей поверхности (поверхности, разделяющей области диагнозов).

Наиболее простой вид имеет линейная разделяющая функция

$$f(\vec{x}) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m + \lambda_{m+1}, \quad (45)$$

где m — число признаков (размерность пространства); $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — «весовые» коэффициенты.

Разделяющая поверхность будет гиперплоскостью («плоскостью» в многомерном пространстве)

$$f(\vec{x}) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m + \lambda_{m+1} = 0. \quad (46)$$

Для случая двух признаков (параметров) разделяющая плоскость будет разделяющей прямой (рис. 5).

Для удобства геометрической интерпретации введем формально еще один параметр

$$x_{m+1} = 1. \quad (47)$$

Разделяющая функция может быть теперь представлена в виде скалярного произведения

$$f(\vec{x}) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_v x_v + \lambda_{v+1} x_{v+1} = \vec{\lambda} \cdot \vec{x}, \quad (48)$$

где $\vec{\lambda}$ — «весовой» вектор

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}). \quad (49)$$

Решающее правило будет таким:

$$\left. \begin{aligned} \text{если } \vec{\lambda} \cdot \vec{x} > 0, & \text{ то } \vec{x} \in D_1; \\ \text{если } \vec{\lambda} \cdot \vec{x} < 0, & \text{ то } \vec{x} \in D_2. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Уравнение разделяющей гиперплоскости

$$f(\vec{x}) = \vec{\lambda} \cdot \vec{x} = 0. \quad (51)$$

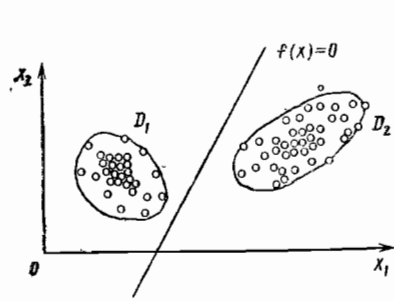


Рис. 5. Линия, разделяющая функции для двух диагнозов

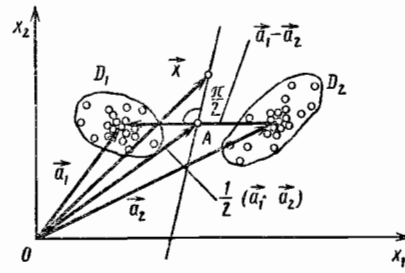


Рис. 6. Приближенный способ построения разделяющей гиперплоскости

Из последнего равенства следует, что разделяющая гиперповерхность перпендикулярна «всесовому» вектору и проходит через начало координат (в дополненном пространстве признаков размерности $m+1$).

Чтобы осуществить диагностику с помощью линейной разделяющей функции, достаточно знать компоненты весового вектора.

Приближенный способ определения весового вектора. Для построения весового вектора (нахождения коэффициентов λ_j) используют объекты (изделия) с установленными состояниями D_1 и D_2 (обучающие последовательности).

Средние (эталонные) образцы, характеризуются векторами \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , причем компоненты векторов

$$\left. \begin{aligned} a_{1j} &= \frac{1}{n_1} \sum_{s=1}^{n_1} a_{1js}; \\ a_{2j} &= \frac{1}{n_2} \sum_{s=1}^{n_2} a_{2js}; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где a_{1j} , a_{2j} — значения признака (параметра) x_j для образцов, имеющих состояния D_1 и D_2 ; n_1 и n_2 — число образцов, входящих в обучающие последовательности для диагнозов D_1 и D_2 ; s — индекс образцов.

Пример, что разделяющая плоскость проходит через точку, находящуюся на середине прямой, соединяющей точки эталонов (точку A , рис. 6) перпендикулярно этой прямой.

Так как точка A характеризуется вектором $\frac{1}{2}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$, то уравнение разделяющей плоскости будет

$$f(x) = \left[\vec{x} - \frac{1}{2}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \right] \times (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) = 0. \quad (53)$$

Скалярное произведение вектора, лежащего в разделяющей плоскости, и вектора, нормального к ней, обращается в нуль.

Развертывая уравнение (53), находим

$$f(x) = (a_{11} - a_{21})x_1 + \dots + (a_{1m} - a_{2m})x_m + \frac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2) = 0, \quad (54)$$

где a_1^2 и a_2^2 — квадраты длины векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 .

Сопоставляя равенства (54) и (46), находим составляющие весового вектора:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= a_{11} - a_{21}; \quad \lambda_2 = a_{12} - a_{22}; \\ \lambda_m &= a_{1m} - a_{2m}; \quad \lambda_{m+1} = \frac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Последние соотношения устанавливают приближенные значения компонентов весового вектора.

Определение весового вектора методом последовательных приближений. Предполагают, что имеется обучающая последовательность, в которой содержатся сведения об образцах с диагнозами состояний D_1 и D_2 .

Принимают первое приближение для весового вектора $\vec{\lambda}^{(1)}$, например, с помощью равенств (52) или каким-либо другим (произвольным) образом.

Выбирают произвольный образец из обучающей последовательности, которому приписывают условно первый номер $x^{(1)}$; он может иметь состояние D_1 или D_2 . Величину $\vec{\lambda}^{(1)}$ «испытывают» по отношению к $x^{(1)}$, т. е. определяют $\vec{\lambda}^{(1)} \vec{x}^{(1)}$.

Если распознавание $\vec{x}^{(1)}$ произошло с ошибкой, то значение $\vec{\lambda}^{(1)}$ корректируют. Принимают следующее приближение:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\lambda}^{(2)} &= \vec{\lambda}^{(1)} + \vec{x}^{(1)} \quad \text{если } \vec{x}^{(1)} \in D_1, \text{ но } \vec{\lambda}^{(1)} \vec{x}^{(1)} < 0; \\ \vec{\lambda}^{(2)} &= \vec{\lambda}^{(1)} - \vec{x}^{(1)} \quad \text{если } \vec{x}^{(1)} \in D_2, \text{ но } \vec{\lambda}^{(1)} \vec{x}^{(1)} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

При неправильных ответах к $\vec{\lambda}^{(1)}$ прибавляется или вычитается вектор точки, относительно которой совершена ошибка. Если с помощью $\vec{\lambda}^{(1)}$ распознавание вектора $\vec{x}^{(1)}$ было правильным:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \vec{x}^{(1)} \in D_1 \quad \vec{\lambda}^{(1)} \vec{x}^{(1)} > 0; \\ \text{при } \vec{x}^{(1)} \in D_2 \quad \vec{\lambda}^{(1)} \vec{x}^{(1)} < 0, \end{aligned} \right\}$$

то сохраняется прежнее значение

$$\vec{\lambda}^{(2)} = \vec{\lambda}^{(1)}$$

и предъявляется следующий образец $\vec{x}^{(2)}$.

Подобным образом процесс продолжается дальше и заканчивается после того, как показ серии образцов не приводит к необходимости внесения поправок для вектора $\vec{\lambda}$.

Если линейное разделение возможно, то указанный процесс приводит к нахождению вектора $\vec{\lambda}$ за конечное число шагов.

Однако разделение областей диагноза гиперплоскостью не всегда возможно. На рис. 7 приведен такой случай. Если области диагнозов являются выпуклыми (т. е. отрезок, соединяющий любые две точки области, лежит внутри нее) и непересекающимися, то линейное разделение осуществимо.

Приведенное условие образует достаточный признак линейной разделимости. Область диагноза D_2 на рис. 7 не принадлежит к выпуклым, и достаточное условие не удовлетворяется. Однако признак не является необходимым, так как если «раздвинуть» области диагнозов на рис. 7, то окажется возможным разделение гиперплоскостью. Укажем теперь необходимый и достаточный признак линейной разделимости. Оно возможно, если существует хотя бы одно направление, на котором проекции областей диагнозов не пересекаются.

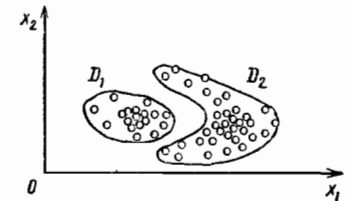


Рис. 7. Случай, когда невозможно разделение областей диагнозов с помощью гиперплоскости

Линейные методы разделения не могут быть использованы, если области диагнозов имеют сложные и близко расположенные границы (рис. 7).

Более эффективными, но и более сложными являются методы потенциальных функций и методы стохастической аппроксимации, в которых разделяющую функцию принимают в более общем виде

$$f(x) = \lambda_1 \varphi_1(\vec{x}) + \lambda_2 \varphi_2(\vec{x}) + \dots$$

где $\varphi_1(\vec{x})$, $\varphi_2(\vec{x})$ — функции параметров (признаков).

В более сложных случаях приходится использовать преобразования признаков, указанные в связи с рассмотрением метрических методов распознавания.

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ

Эти методы основаны на установлении логических связей между признаками и состоянием объектов.

В связи с этим рассматривают только простые (двоичные) признаки, для которых возможно только два значения (0 или 1, «да» — «нет» и т. п.).

Точно также и сами состояния изделия (диагнозы) могут либо быть, либо отсутствовать, т. е. иметь только два значения. Это типично для детерминистского подхода, когда вероятности состояния не рассматриваются.

Вместе с тем использование двоичных переменных для описания признаков и состояний изделия позволяет применить логические переменные и булевы функции, методы математической логики.

Естественно, что детерминистское описание с помощью двоичных переменных является приближенной моделью диагностики. Однако они могут быть использованы для начальных этапов распознавания и особенно перспективны для второго направления технической диагностики — поиска и локализации неисправностей.

ОСНОВЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Широкое внедрение электронных вычислительных машин (ЭВМ), быстрое совершенствование их параметров оказывает все возрастающее влияние на современную науку и технику. Существенно расширились возможности решения задач вычислительного характера (сложных задач математической физики, построения математических моделей процессов и т. д.). Коренные изменения произошли в прикладной математике и других областях знаний, возникли новые эффективные методы численных решений (метод конечных элементов и др.). Современные ЭВМ позволяют решать логические задачи (оптимального управления, распознавания образов, постановки диагноза и т. п.). Широкое распространение получили станки с программным управлением, существенно увеличивающие производительность труда, автоматические устройства, роботы и др. Будущее развитие техники связано с автоматизированным производством, основанным на широком использовании ЭВМ.

СТРУКТУРА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОИЗВОДСТВА

Автоматизированным (машинным) производством будем называть производство с помощью электронных вычислительных машин.

Следует отметить, что в настоящее время и в ближайшем будущем главные решения остаются за коллективом специалистов, руководителем автоматизированной системы.

Производство современных машин разбивается на четыре последовательных, взаимосвязанных этапа: проектирование, конструирование, изготовление и испытание. Если на каждом из этапов предусматривается широкое внедрение ЭВМ, то следует говорить об автоматизированном проектировании, автоматизированной технологии и т. д. Общая схема автоматизированного производства показана на рис. 1.

Автоматизированное проектирование представляет собой оптимальное проектирование путем синтеза математических моделей. Оптимальное проектирование подразумевает отыскание наилучшего, в определенном смысле, варианта проекта. В результате автоматизированного проектирования создается эскизный проект изделия, содержащий его основные параметры, характеристики, скелетную схему конструкции, и математическая модель изделия.

Автоматизированное конструирование осуществляет оптимальный синтез конструктивных элементов с помощью ЭВМ. При конструировании за основу принимают скелетную схему конструкции, полученную на этапе автоматизированного проектирования. Схему дополняют конструктивной и технологической разработкой отдельных элементов (соединительных и переходных элементов, уплотнений, определяют размеры, допуски, посадки и т. п.).

В результате автоматизированного конструирования выпускается техническая документация, необходимая для технологической подготовки производства. Техническая документация содержит чертежи, получаемые на чертежных автоматах по разработанным программам и техническим условиям (условия сборки, контроля и т. п.). В производство передается «машинный образ» конструкции в виде пакета программ, содержащий необходимую информацию для изготовления изделия.

Автоматизированная технология представляет собой оптимальную технологию, осуществляемую с помощью ЭВМ. На этом этапе разрабатывают оптимальный технологический процесс (выбирают оборудование, инструмент, оснастку, режимы обработки и т. п.). Создают программы для станков, информационных и управляющих систем производства и т. д.

Автоматизированные испытания состоят в экспериментальном подтверждении параметров математической модели. На этом этапе разрабатывают оптимальный план доводочных испытаний, способы идентификации (определения) параметров моделей по данным опыта.

Особенностью автоматизированных испытаний является не только проведение эксперимента с реальным изделием, но и с его математической моделью. Во втором

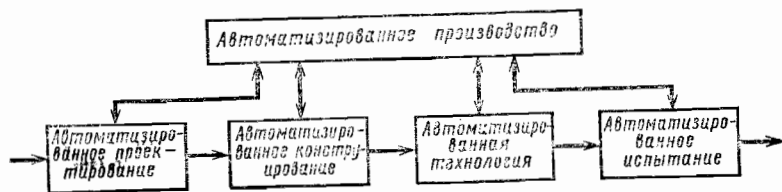


Рис. 1. Общая схема автоматизированного производства

случае оказывается возможным оценить поведение элемента, узла и всей машины в целом при различных внешних условиях, нагрузках и т. п. Это позволяет более полно определить надежность системы, выбрать систему диагностики и т. д. Ограничимся рассмотрением проблем автоматизированного (машинного) проектирования.

СТРУКТУРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математической моделью условимся называть совокупность уравнений, условий и ограничений, описывающих функционирование элемента, узла или всей машины в целом.

Общая модель должна отражать следующие основные факторы:

- 1) работоспособность (взаимодействие с внешней средой и другими элементами);
- 2) энергетический баланс, коэффициенты полезного действия;
- 3) надежность (запасы прочности, долговечность и др.);
- 4) экономическую эффективность (стоимость производства и эксплуатации, технологичность и др.).

Общая модель обычно содержит частные подмодели, отражающие отдельные факторы функционирования системы. Структурная схема математической модели (в системе автоматизированного проектирования) показана на рис. 2.

Модель осуществляет преобразование входных параметров, отражающих условия нагружения, среды и т. д., в параметры выхода, характеризующие процессы и состояние самой системы.

Например, при расчете лопатки газовой турбины в качестве входных параметров используют частоту вращения ротора, давление, скорость, температуру и расход газа на входе в турбину, радиусы корневого и концевого сечения и др. Параметры выхода включают показатели, характеризующие состояние газа на выходе из турбины, напряжения и температуру в лопатке, геометрию профилей сечения лопатки на различных радиусах и т. д.

Блоки преобразования содержат блоки и модули, каждый из которых осуществляет физически определенную часть преобразования (например, расчет напряжений в лопатке и т. п.).

Входные параметры подразделяют на заданные (приходящие из модели более общей системы) и управляющие. Именно управляющие или внутренние параметры позволяют осуществлять процесс оптимизации. Последний реализуется с помощью блока внутренней оптимизации. В этом блоке содержатся наиболее простые и универсальные условия оптимизации (минимум массы, максимум коэффициента полезного действия), позволяющие достигнуть локальный оптимум. Важную роль играет блок ограничений, устанавливающий область возможных значений управляющих и выходных параметров.

Модель содержит банк данных, хранящий необходимую для работы информацию, и блок управления. Последний позволяет воздействовать на управляющие параметры, осуществлять переключение вариантов и др. В модели предусмотрен блок визуализации, с помощью которого формируются изображения и графическая информация. Все блоки модели связаны между собой, сама модель может являться частью более сложной модели.

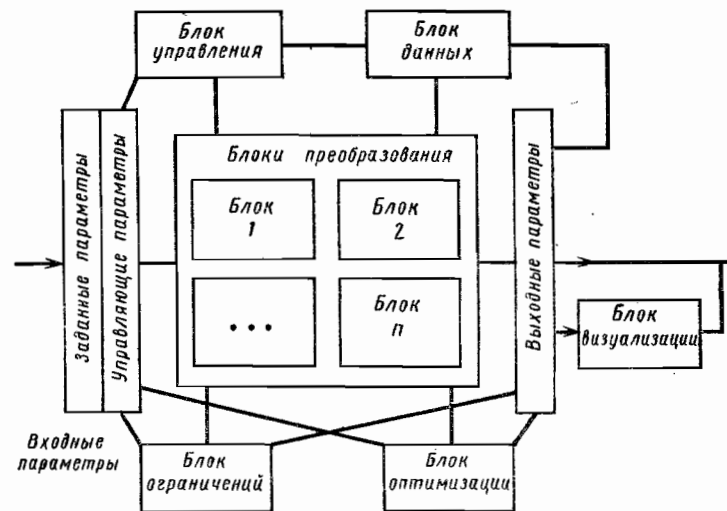


Рис. 2. Структура математической модели

Работа модели осуществляется по принципу последовательных приближений. Сначала принимают начальные значения управляющих параметров. Они вместе с заданными поступают в блок преобразований, где формируются параметры выхода. Выходные параметры направляются в блоки оптимизации и ограничений, в которых вырабатываются указания об изменении исходных значений управляющих параметров. Далее переходят к следующему приближению, причем циклы продолжают до завершения процесса оптимизации.

Окончательные результаты поступают в банк данных и на вход следующих моделей системы.

УРОВНИ И КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ

В процессе автоматизированного проектирования создается большое количество математических моделей отдельных процессов, элементов, узлов и т. п. Будем различать уровни и классы моделей.

Уровень модели характеризует ее «качество» — степень глубины и полноты отображения связей, существующих между параметрами входа и выхода.

Различают модели нулевого, первого, второго и более высоких уровней. Разделение на уровни является условным и зависит от назначения, структуры модели, требований точности и других факторов. Часто используют модели следующих уровней: нулевого — модели, основанные на статистической обработке параметров предшествующих или аналогичных изделий; первого — модели, использующие простейшие одномерные теории, при ряде упрощающих предположений; второго — модели, включающие все инженерные расчеты, проводимые для рассматриваемого элемента, узла и т. п.; третьего — сложные модели, использующие двумерные и трехмерные теории, специальные численные методы типа метода конечных элементов и т. п.

В системе автоматизированного проектирования целесообразно использовать модели нескольких уровней: более простые модели для предварительного отбора вариантов, более сложные — для формирования окончательной математической модели.

Класс модели — определяется ее «объемом», т. е. числом элементов, узлов и т. д., функционирование которых описывает модель. Часто оказывается удобным разбиение на три класса моделей: А — изделия; В — узла; В — элемент.

Например, если класс А представляет собой модель всего двигателя, то модели класса В — модели компрессора, турбины и т. д., класса В — модели лопаток и т. д. При необходимости, могут быть введены подклассы для автономного описания отдельных частей системы.

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ СОЗДАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

При создании систем автоматизированного проектирования целесообразно использовать следующие общие принципы: 1) блочно-модульный; 2) иерархич; 3) адаптации и развития; 4) информационного единства; 5) итерации.

Блочно-модульный принцип построения основан на том, что система создается из отдельных самостоятельных частей блоков и модулей.

Блок системы автоматизированного проектирования называют часть системы, имеющую функциональную определенность (например, блок ограничений, блок газодинамического расчета и т. п.).

Модули — это наименьшие структурные элементы блока (для определения растягивающих напряжений, расчета крутящего момента и т. п.). Каждый из блоков системы выполняет определенные задачи, имеет свою входную и выходную информацию, составляется и доводится отдельно и только после этого включается в систему автоматизированного проектирования. Среди блоков системы следует выделить **стандартные** (например, блок решения систем уравнений, блок плоской задачи теории упругости). Стандартные блоки инвариантны по отношению к элементам и узлам изделия и включаются в математические модели как стандартные элементы. При формировании стандартных блоков широко используют библиотеку стандартных программ. Применение блочно-модульного принципа необходимо, так как попытки создания системы всей «сразу» всегда заканчивались неудачей.

Принцип иерархии моделей состоит в том, что каждая математическая модель включается, как составная часть, в модель более высокого класса. Например, математическая модель элемента входит в модель узла, которая, в свою очередь, включается в модель изделия.

Принцип иерархии отражает соотношения «старшинства» в любой сложной системе.

По принципу адаптации и развития система автоматизированного проектирования должна быть согласована со сложившейся практикой проектирования. Методы расчета и проектирования, их программное обеспечение должны стать основой при разработке моделей нулевого, первого и второго уровней.

Целесообразно, чтобы создаваемые модели и их блоки могли использоваться независимо при проведении инженерных расчетов. Это ускорит и облегчит синтез сложных систем, разработку систем автоматизированного проектирования.

Создаваемая система должна предусматривать возможность включения новых моделей и более широкого взаимодействия с другими системами.

По принципу информационного единства все потоки информации в системе должны быть совместимыми. Программирование должно осуществляться на одном из универсальных языков (например, на языках Алгол или Фортран). Термины, условные обозначения, размерности физических величин должны быть одинаковыми для всей системы. Целесообразно с самого начала создания системы выработать единые требования к программам, реализующим модули и блоки системы (аннотации, инструкции, описание, графы алгоритмов, тестовые примеры и т. д.).

При большом количестве действующих программ оказывается необходимым иметь управляющие программы. Для формирования таких программ и работы с ними удобно использовать специально приспособленные для системы автоматизированного проектирования языки, которые можно построить двумя способами — с помощью дискрипторов (ключевых слов) и командных процедур или путем добавления специальных процедур в универсальные алгоритмические языки.

По принципу итерации система автоматизированного проектирования решается методом последовательных приближений, результаты постепенно уточняются и конкретизируются.

Общая схема функционирования системы показана на рис. 3. Сначала, исходя из потребностей старшей системы и предварительной оптимизации, формулируются технические предложения для основных параметров изделия. Эти параметры поступают в линию анализа, где прорабатываются более детально технические характеристики различных типов изделий и их конструктивных вариантов. Технические условия для всего изделия позволяют указать требуемые параметры узлов и элементов, что дает возможность выбрать их конструктивные схемы, определить размеры, массу, габариты, провести их локальную оптимизацию.

После того, как выяснен «облик» отдельных элементов, начинается синтез. По техническим характеристикам элементов уточняются параметры узлов и всего изделия, и эти параметры поступают в блок оптимизации старшей системы. В блоке оптимизации вырабатываются указания по изменению параметров и характеристик изделия, и их новые значения поступают в линию анализа для второй итерации (второго цикла), и процесс итерации продолжается.

Важно отметить следующую особенность итерационного процесса автоматизированного проектирования. Первые циклы осуществляются только для моделей класса А и лишь частично для моделей класса В. В них проводится разработка проекта на стадиях технического задания и технического предложения.

Полный цикл для всех классов моделей осуществляется только после того, как выбран основной конструктивный вариант изделия.

Если первые циклы проводятся на моделях нулевого и первого уровня, то на стадии эскизного проекта используются модели второго и более высокого уровней.

Принцип итерации используется не только для расчета всей системы в целом, но и отдельных моделей.

ЦЕЛИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Одно из главных преимуществ систем автоматизированного проектирования — возможность выбора оптимального варианта решения.

Автоматизированное проектирование есть одновременно и **оптимальное проектирование**.

Понятие оптимального решения подразумевает выбор наилучшего, в некотором смысле, варианта среди множества возможных. Оценка «качества» варианта является сложной, не всегда формализуемой процедурой. Следует учитывать **основной принцип оптимизации**: оценка «качества» системы данного класса определяется эффективностью ее функционирования в системе более высокого класса. Например, качество ступени компрессора следует оценивать по ее влиянию на работу всего компрессора. В свою очередь, эффективность компрессора должна оцениваться в системе более

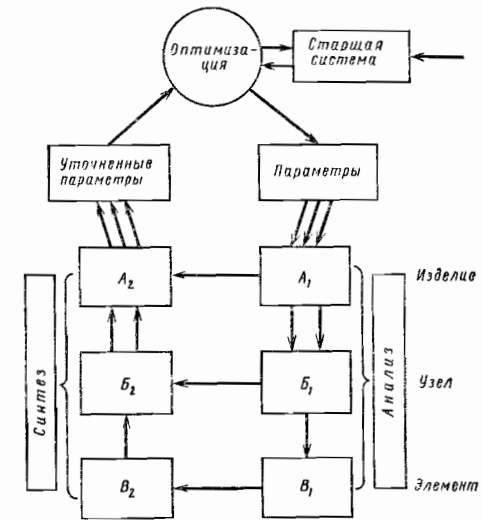


Рис. 3. Схема процесса функционирования системы автоматизированного проектирования

высокого класса (например, газотурбинного двигателя и т. д.). Естественно, что по мере расширения класса цели оптимизации становятся более общими. Однако в практических расчетах в большинстве случаев можно использовать локальную или внутреннюю оптимизацию элементов, узлов и всего изделия, которая, как правило, оказывается полезной и для глобальной оптимизации. К целям локальной оптимизации относятся максимум экономичности (максимум коэффициента полезного действия), минимум массы, минимум трудоемкости изготовления и др.

Допустим, что выбрана система обобщенных характеристик или параметров, характеризующих «качество» системы: g_1, g_2, \dots, g_r .

Условие оптимальности варианта можно записать в виде условия минимума некоторой целевой функции:

$$\omega(g_1, \dots, g_r) = \min. \quad (1)$$

В простейшем случае качество системы характеризуется одним параметром g_1 . Тогда можно принять

$$\omega = g_1, \quad (2)$$

если условию оптимальности соответствует минимум параметра g_1 (например, g_1 — стоимость, масса и т. д.). Если оптимальность достигается при максимуме g_1 (например, g_1 — коэффициент полезного действия), тогда следует принять

$$\omega = -g_1. \quad (3)$$

Весьма сложно образовать целевую функцию для нескольких параметров качества, так как для этого надо знать сопоставимую «ценность» различных свойств изделия. Поэтому рассматривают условный минимум целевой функции по одному из параметров, полагая другие параметры качества лежащими в «допустимой» области:

$$\omega = g_k; \quad a \leq g_i \leq b \quad (i = \overline{1, r}; \quad i \neq k). \quad (4)$$

Например, если g_1 — удельный расход топлива, g_2 — удельная масса (масса конструкции на единицу мощности), то ищется оптимальный вариант, обеспечивающий минимум удельного расхода

$$\omega = g_1$$

при заданной величине удельной массы

$$g_2 \leq B_2.$$

После того как образована целевая функция, возникает задача определения ее минимума.

Параметры качества g_1, \dots, g_r зависят от параметров системы. Последние однозначно определяют условия функционирования системы: скорости, ускорения, напряжения, деформации, усилия, температуры и т. п. Параметры системы связаны условиями взаимодействия и условиями, отражающими закономерности рабочих процессов.

Однако число связей, как правило, меньше числа параметров, и поэтому часть из них можно выбирать независимо.

Такие параметры называют управляющими и обозначают через u_1, u_2, \dots, u_m . С помощью параметров управления проводится процесс оптимизации.

Остальные параметры системы (их обозначают через y_1, y_2, \dots, y_n) условно называют параметрами состояния. Разделение параметров на две группы условно и определяется постановкой задачи оптимизации, особенностями работы элемента, узла и др.

Пусть имеется m управляющих параметров u_i . Так как параметры качества зависят от управляющих параметров, то задача оптимизации в конечном итоге состоит в нахождении минимума целевой функции

$$\omega = L[u_1, \dots, u_m] = \min. \quad (5)$$

Целевая функция ω может сложным образом зависеть от управляющих параметров u_1, \dots, u_m причем эта зависимость может включать интегральные и дифференциальные операции. Параметры состояния и управления связаны условиями связи

$$L_i(y_1, \dots, y_n; u_1, \dots, u_m) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6)$$

выражающими уравнения равновесия, сохранения энергии и т. п.

Как указывалось, параметры системы должны удовлетворять определенным ограничениям

$$A_i \leq y_i \leq B_i; \quad C_j \leq u_j \leq D_j. \quad (7)$$

Разработаны многочисленные методы решения задач оптимизации при различных видах целевой функции, уравнениях связи и типах ограничений (градиентные, случайного поиска, динамического программирования, принцип максимума Понтрягина и др.), позволяющие решать достаточно общие задачи оптимизации и оптимального управления.

Указанные методы описаны в специальной литературе.

Главы 1, 2

1. Конструкционные материалы. В 3-х т./Под ред. А. Т. Туманова. М., Советская энциклопедия, 1966, Т. 1, 416 с.; Т. 2, 407 с.; Т. 3, 528 с.
2. Мэнсон С. Температурные напряжения и металлоцикловая усталость. М., Машиностроение, 1974, 340 с.
3. Фридман Я. Б. Механические свойства сталей, В, 2-х ч. 3-е изд. М., Машиностроение, 1974, Ч. 1, 470 с., Ч. 2, 360 с.
4. Шнейдерович Р. М. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружении, М., Машиностроение, 1968, 343 с.

Глава 3

1. Биргер И. А., Иосилевич Г. Б. Резьбовые соединения. М., Машиностроение, 1973, 254 с.
2. Биргер И. А., Иосилевич Г. Б. Конструктивные и технологические методы повышения выносливости резьбовых соединений из титановых сплавов. — Вестник машиностроения, 1970, № 12, с. 25—27.
3. Иосилевич Г. Б., Осипова Г. В. Распределение напряжений в головках болтов. — Вестник машиностроения, 1978, № 1, с. 46—49.
4. Иосилевич Г. Б., Шарловский Ю. В. Затяжка и стопорение резьбовых соединений М., Машиностроение, 1971, 183 с.

Глава 4

1. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин М., Машиностроение, 1966, 616 с.
2. Иосилевич Г. Б., Ковган С. Т., Мавлютов Р. Р. Расчет усилий в болтах контактирующих фланцевых соединений с податливой оболочкой. — Машинное-дене, 1973, № 6, с. 69—75.

Глава 5

1. Глухарев Е. Г., Зубарев Н. И. Зубчатые соединения. Л., Машиностроение, 1976, 198 с.
2. Иосилевич Г. Б., Куликов В. С. Распределение нагрузки по длине шлицевых соединений оболочек. — В кн.: Прочность элементов авиационных конструкций. Уфа, Уфимский авиационный институт, 1974, Вып. 78, с. 107—118.
3. Левина З. М., Решетов Д. Н. Контактная жесткость машин. М., Машиностроение, 1971, 264 с.
4. Левина З. М., Решетов Д. Н. Циклическое скольжение в прямобочных зубчатых (шлицевых) соединениях и условный расчет их на износостойкость. — Вестник машиностроения, 1974, № 7, с. 11—17.
5. Лейкин А. С., Старичева А. Ф. Концентрация и распределение напряжений при кручении шлицевых валов с зубьями эвольвентного профиля. — Вестник машиностроения, 1975, № 11, с. 19—23.
6. Татур Г. К., Выгонный А. Г. Определение неравномерности распределения нагрузки вдоль зубчатого (шлицевого) соединения. — Вестник машиностроения, 1969, № 4, с. 21—24.

Глава 6

1. Дунаев П. Ф., Леликов О. П. Вероятностный расчет соединений с натягом. — Вестник машиностроения, 1974, № 9, с. 31—33.
2. Решетов Д. Н. Детали машин. М., Машиностроение, 1974, 655 с.

Глава 7

1. Кудрявцев И. В., Наумченков Н. Е. Усталость сварных конструкций. М., Машиностроение, 1966, 271 с.
2. Лоцманов С. Н., Петрушин И. Е. Пайка металлов. М., Машиностроение, 1966, 250 с.

3. Манко Г. Пайка и припой. М., Машиностроение, 1968, 323 с.
4. Проектирование сварных конструкций в машиностроении/Под ред. С. А. Куркина. М., Машиностроение, 1975, 376 с.
5. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. М., Машиностроение, 1975, 480 с.

Глава 8

1. Валы и оси/С. В. Серенсен, М. Б. Громан, В. П. Когаев, Р. М. Шнейдерович. М., Машиностроение, 1970, 319 с.

Глава 9

1. Байзельман Р. Д., Цыпкин Б. В., Пепель Л. Я. Подшипники качения. Справочник. М., Машиностроение, 1967, 546 с.
2. Подшипники качения. Каталог-справочник. М., НИИНАвтопром, 1972, 469 с.

Глава 10

1. Биргер И. А., Расчет кольцевых изгибных пружин. — В кн.: Расчеты на прочность. М., Машгиз, 1961, Вып. 7, с. 110—121.
2. Жуков В. Б. К расчету осадки прорезной пружины. — Вестник машиностроения, 1968, № 8, с. 16—18.
3. Решетов Д. Н. Детали машин. М., Машиностроение, 1974, 655 с.

Глава 11

1. Вулгаков Э. Б. Высоконапряженные зубчатые передачи. М., Машиностроение, 1969, 104 с.
2. Динамические процессы в механизмах с зубчатыми передачами. М., Наука, 1976.
3. Иосилевич Г. Б., Осипова Г. В. Применение численных методов решения задач теории упругости к расчету зубчатых передач. — Вестник машиностроения, 1976, № 4, с. 19—23.
4. Краснощекоев Н. Н., Федякин Р. В., Чесноков В. А. Теория зацепления передач Новикова. М., Наука, 1976, 175 с.
5. Петрусевич А. И., Генкин М. Д., Гринкевич В. К. Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямыми колесами. М., изд.-во АН СССР, 1956, 134 с.
6. Повышение несущей способности механического привода/Под ред. В. Н. Кудрявцева. М.—Л., Машиностроение, 1973, 223 с.
7. Устиненко В. Л. Напряженное состояние зубьев цилиндрических прямозубых колес. М., Машиностроение, 1972, 90 с.
8. Шорр Б. Ф. К расчету динамических нагрузок на зубья прямозубых цилиндрических колес. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М., Машиностроение, 1969, Вып. 5, с. 127—162.
9. Шорр Б. Ф., Егоров В. А. Применение пьезоэлектрических устройств и голографической интерферометрии к исследованию спектров колебаний зубчатых колес. — Вестник машиностроения, 1977, № 12, с. 13—15.

Глава 12

1. Биргер И. А., Иосилевич Г. Б. Резьбовые соединения. М., Машиностроение, 1973, 254 с.

Глава 13

1. Воробьев И. И. Передачи с зубчатым ремнем. — В кн.: Передаточные механизмы. М., Машиностроение, 1971, с. 344—351.
2. Пронин Б. А. Клиноременные передачи. — В кн.: Детали машин/Под ред. Н. С. Ачеркана. 3-е изд. М., Машиностроение, 1969., Т. 3, с. 392—408.
3. Светлицкий В. А. Передачи гибкой связью. М., Машиностроение, 1967, 155 с.
4. Овчинникова В. А. Расчет клиноременной передачи с узкими ремнями. — Вестник машиностроения, 1972, № 2, с. 18—22.
5. Решетов Д. Н. Детали машин. М., Машиностроение, 1974, 655 с.

Глава 14

1. Воробьев Н. В. Цепные передачи. М., Машиностроение, 1968, 251 с.

Глава 15

1. **Авиационные поршневые двигатели**, Кинематика, динамика и расчет на прочность. М., Оборонгиз, 1950.
2. **Ваншейдт В. А.** Конструирование и расчеты прочности судовых дизелей. Л., Судостроение, 1969. 640 с.
3. **Двигатели внутреннего сгорания**. Конструкция и расчет поршневых и комбинированных двигателей/А. С. Орлин, Д. Н. Вырубов, М. Г. Круглов и др. 3-е изд. М., Машиностроение, 1972. 464 с.
4. **Кинасошвили Р. С.** Расчет прочности шатунов авиационных двигателей. — В кн.: Труды ЦИАМ. 1945, № 66.
5. **Кинасошвили Р. С.** Расчет поршневого пальца авиационного двигателя. — В кн.: Труды ЦИАМ, 1947, № 119.
6. **Лейкин А. С.** Напряженность и выносливость деталей сложной конфигурации. М., Машиностроение, 1968. 371 с.
7. **Чайнов Н. Д., Заренбин В. Г., Иващенко Н. А.** Тепломеханическая напряженность деталей двигателей/Под ред. А. С. Орлина, М., Машиностроение, 1977. 150 с.

Глава 16

1. **Биргер И. А.** Вариационные методы в строительной механике турбомашин. М., Оборонгиз, 1959. 28 с.
2. **Биргер И. А., Джамай В. В., Селифонова Л. П.** Напряжения в охлаждаемых лопатках турбин. — Проблемы прочности, 1971, № 6, с. 3—6.
3. **Блииник Б. С., Ефремова В. Т., Шорр Б. Ф.** Расчет собственных частот связанных колебаний лопаток с бандажными полками. — В кн.: Расчеты на прочность. М., Машиностроение, 1975, Вып. 16, с. 240—260.
4. **Гринберг С. М., Шорр Б. Ф.** К теории колебаний шарнирных лопаток с обкатыванием. — В кн.: Расчеты на прочность. М., Машиностроение, 1964. Вып. 10, с. 324—351.
5. **Малинин Н. Н.** Прочность турбомашин. М., Машгиз, 1962. 291 с.
6. **Прочность паровых турбин/Под ред. А. А. Щубенко-Щубина**. 2-е изд. М., Машиностроение, 1973. 452 с.
7. **Скубачевский Г. С.** Авиационные газотурбинные двигатели, конструкция и расчет деталей. 4-е изд. М., Машиностроение, 1974. 520 с.
8. **Хронин Д. В.** Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1970. 412 с.
9. **Шорр Б. Ф.** Изгибно-крутильные колебания закрученных компрессорных лопаток. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М., Машиностроение, 1964. Вып. 1, с. 217—246.
10. **Шорр Б. Ф., Локштанов Е. А., Халатов Ю. М.** Об одном возможном подходе к вероятностной оценке вибрационной прочности деталей турбомашин. — Проблемы прочности, 1972, № 11, с. 11—14.

Главы 17—19

1. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М., Машиностроение 1977.
2. **Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М.** Расчет на прочность деталей машин. 2-е изд. М., Машиностроение, 1966. 612 с.
3. **Бояршинов С. В.** Основы строительной механики машин. М., Машиностроение, 1973. 455 с.
4. **Прочность. Устойчивость. Колебания**. Справочник. В 3-х т. / Под ред. А. И. Биргера и Я. Г. Пановко. М., Машиностроение, 1968, Т. 1, 831 с., Т. 2, 463 с., Т. 3, 567 с.

Глава 20

1. **Биргер И. А.** Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956. 150 с.

2. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. 2-е изд. М., Наука, 1967. 984 с.
3. **Лейтес С. Д.** Справочник по определению свободных длин элементов стальных конструкций. М., Проектстальконструкция, 1963. 160 с.
4. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. 2-е изд. М., Наука, 1967. 420 с.

Главы 21, 22

1. **Бидерман В. Л.** Прикладная теория механических колебаний. М., Высшая школа, 1972. 400 с.
2. **Биргер И. А.** Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956. 150 с.
3. **Паневко Я. Г.** Основы прикладной теории упругих колебаний. М., Машиностроение, 1967. 314 с.
4. **Светлицкий В. А.** Случайные колебания механических систем. М., Машиностроение, 1976. 215 с.

Главы 23, 24

1. **Биргер И. А.** Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1959. 368 с.
2. **Валишвили Н. В.** Методы расчета оболочек на ЭЦВМ. М., Машиностроение, 1976. 227 с.
3. **Тимошенко С. П.** Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
4. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М., Наука, 1966. 635 с.

Глава 25

1. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. М., Машиностроение, 1978. 309 с.
2. **Биргер И. А.** Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961. 368 с.
3. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967. 984 с.
4. **Кармишин А. В., Мяченков В. И., Фролов А. Н.** Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М., Машиностроение, 1976. 376 с.
5. **Основы строительной механики ракет/Л. И. Балабух, К. С. Колесников и др.** М., Высшая школа, 1969. 490 с.
6. **Прочность. Устойчивость. Колебания**. Справочник. В 3-х т./Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М., Машиностроение, 1968, Т. 1, 831 с., Т. 2, 463 с., Т. 3, 567 с.

Глава 26

1. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести. — В кн.: Механика деформируемых сред. М., Наука, 1976, с. 51—73.
2. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975. 539 с.

Глава 27

1. **Гохфельд Д. А.** Несущая способность конструкций в условиях теплосмен. М., Машиностроение, 1970. 260 с.
2. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М., Наука, 1974. 311 с.
3. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., Наука, 1969. 420 с.
4. **Малинин Н. И.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М., Машиностроение, 1975. 399 с.
5. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966. 752 с.
6. **Расчеты на прочность в машиностроении/С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.** М., Машгиз, Т. 1, 1956. 884 с., Т. 2, 1958. 974 с., Т. 3, 1959. 1118 с.
7. **Термопрочность деталей машин/И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, И. В. Демьянушко и др.** М., Машиностроение, 1975. 455 с.

Глава 28

1. Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационные оптические методы механики твердого тела. М., Наука, 1973.
2. Вайнберг Д. В. Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкружек. Киев, Техника, 1969. 220 с.
3. Иосилевич Г. Б., Беляев В. А., Осипова Г. В. Концентрация напряжений и усталостная прочность зубьев цилиндрических передач с прямозубыми колесами, нарезанными долбяками и червячными фрезами. — Вестник машиностроения, 1974, № 10, с. 19—21.
4. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Пер. с. англ. М., Мир, 1977. 301 с.

Глава 29

1. Биргер И. А. Упругий контакт стержней. — В кн.: Расчеты на прочность. М., Машиностроение, 1969, Вып. 14, с. 127—136.
2. Биргер И. А. Контактные задачи теории стержней, пластинок и оболочек. — В кн.: Теория оболочек и пластин. Труды IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Л., Судостроение, 1975, с. 23—25.
3. Иосилевич Г. Б., Мавлютов Р. Р., Ковган С. Т. Расчет соединений с круглыми контактирующими фланцами при действии растягивающих нагрузок. — Вестник машиностроения, 1974, № 6, с. 24—26.
4. Иосилевич Г. Б., Осипова Г. В. Решение конструкционно-контактных задач численными методами. Машиноведение, 1976, № 4, с. 69—73.
5. Расчеты на прочность в машиностроении/С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, В. М. Макушин. М., Машгиз, Т. 1, 1956, 884 с., Т. 2, 1958, 974 с., Т. 3, 1959, 1118 с.

Главы 30, 31

1. Биргер И. А. Об одном критерии разрушения и пластичности. — Механика твердого тела, 1977, № 4, с. 17—19.
2. Когаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М., Машиностроение, 1977, 232 с.
3. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. Киев, Наукова думка, 1969. 209 с.
4. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М., Машиностроение, 1975. 480 с.

Главы 32, 33

1. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин. М., Машиностроение, 1966. с. 590—609.
2. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., Стройиздат, 1965, 279 с.

Глава 34

1. Биргер И. А. Остаточные напряжения. М., Машгиз, 1963, 239 с.
2. Гринченко И. Г. Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов. М., Машиностроение, 1971, 120 с.
3. Кузнецов Н. Д., Цейтлин В. И. Эквивалентные испытания газотурбинных двигателей. М., Машиностроение, 1976. 213 с.
4. Хворостухин Л. И., Волков А. Ф. Влияние адмазного выглаживания на усталостную прочность нержавеющей сталей при повышенных температурах. — Вестник машиностроения. 1975, № 7, с. 42—45.

Глава 35

1. Биргер И. А. Техническая диагностика. М., Машиностроение, 1978. 234 с.

Глава 36

1. Биргер И. А. Основы автоматизированного проектирования. — Изв. вузов. Машиностроение, 1977, № 8, с. 32—35.
2. Принс М. Д. Машинная графика и автоматизация проектирования, Пер. с англ. М., Советское радио, 1975, 232 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания лопаток 324

Амортизатор пневмоэластичный 175

— — резиновый 175

Амплитуда колебаний — Понятие 415

— — переменных напряжений — Понятие 599

— — предельная — Кривая 599, 600

Аналогия гидродинамическая 379

— — мембранная 380

Балки — Изгиб — см. Изгиб стержней

Байеса метод распознавания 657—661

Бандажирование лопаток 313, 314—316, 324—325

Болты — Диаграммы усилий 46 — Допускаемые статические нагрузки 42 — Момент затяжки 42 — Напряжения кручения в стержне 51 — Полное усилие в болте 45

— — фланцевые — Расчет на прочность 77 — Усилие затяжки 76, 77

Бредта формула 383

Валы — Галтели и выточки на валах 128

— Жесткость 134, 136

— Конструктивные формы 126—128

— Критические частоты вращения 140, 141, 431—460

— Материалы 128, 129

— Моменты сопротивления сечения и площадь сечения 132—135

— Нагрузки на валы 130, 131

— Основные технические требования 129, 130

— Расчет на колебания 140

— Расчет на усталостную прочность 136—139

— Расчет статической прочности 131, 134

— Расчетные схемы опор 130, 131

— Сечения 422

— Сопряжения ступеней 127

— Устойчивость 134, 136

— Фланцевое соединение валов 128

— Шлицевое соединение валов 128

— Явление самоустановления 432

Валы гладкие 126, 127

— — жесткие 432

— — коленчатые — Запасы прочности 268, 269 — Материалы 268 —

Определение нагрузок 264, 265 —

Определение номинальных напряжений 265, 266 — Расчет 264 — 270 —

Эпюры изгибающих и крутящих моментов 267

— — круглые — Кручение 376, 377

— — с непрерывно распределенными массами — Определение критических частот вращения 437

— — с несколькими дисками — Расчет критической частоты вращения 436, 437

— — с одним диском — Критические частоты вращения 431—436

— — ступенчатые 126, 127

— — торсионные 126

Велера кривые 25, 26

Вероятность безотказной работы —

Пример определения для экспоненциального закона 636 — Формулы 632

— — прогнозируемая 635

Вероятность разрушения 620, 621 —

Значения в зависимости от запаса прочности по средним напряжениям 626, 627

— — при произвольных законах распределения напряжений и пределов прочности 621—623 — Пример определения 623, 624

Виброгалтовка 647

Виброшлифование 648

Время работы безотказной среднее 633 — — эквивалентное 36

Выкошлифованность — Понятие 17

Выпучивание стержня — Влияние начального прогиба и внецентренного приложения силы 405

— — при упруго-пластических деформациях 409—412

Вязкость ударная 20

Гайки — Предельная высота 59 —

— — Расчет высоты 58

— — растяжения 54

Галтели на валах 128

Гармоники частоты вращения 321

Гибкость стержня — Величины 402 — 404, 408

— — предельная — Значения 408

— — приведенная 400

Гипотеза плоских сечений 7, 354

ГОСТ 520—71 143

591—69 256, 261

1284—68 245
 1643—72 198
 1759—70 37
 2789—73 102
 3189—75 144
 8032—56 * 240
 8787—68 86
 9389—75 158
 13377—75 629
 13552—68 254
 13568—75 252—254
 13755—68 183, 215, 216
 13764—68 168
 14623—69 37
 16530—70 183
 16531—70 183
 21354—75 188, 189, 194, 195,
 197, 199, 211, 212,
 213, 218, 219, 221,
 225
 21425—75 94

Градиент деформаций 549
 — — напряжений 549

Грузоподъемность подшипников качения динамическая 148, 149
 — — статическая 147, 148

Губера — Мизеса критерий 589—591

Гука закон 7

Давления контактные в соединениях с гарантированным натягом — Соединения дисков и валов 101, 102
 — Соединения дисков и толстостенных цилиндров 99—101
 — Соединения тонкостенных колец 97—99

Детали крепежные — Виды покрытий 39
 — Контроль 37, 39
 — Материалы 37—39
 — Покрытия 37

Деформация кольца осесимметричная от неравномерного нагревания 394, 395
 — — под действием осевой силы 393, 394
 — — под действием радиальной силы 394

Деформация линейная температурная 530
 — — остаточная 180, 642
 — — относительная поперечная 7, 8
 — — пластическая 529, 532
 — — ползучести 529
 — — упругая 542
 — — элемента тела — Разложение 6

Деформирование поверхностное пластическое 645

— — упруго-ластическое — Петли гистерезиса 29

Диагностика техническая — Понятие 656 — Постановка задачи 656

Диаграмма деформирования 381
 — — деформирования линейно упругоупрочняющегося материала 408
 — — предельных амплитуд 26
 — — предельных напряжений 26
 — — растяжения 18
 — — растяжения с площадкой текучести 18
 — — сдвига 160

Диски — Граничные условия 328
 — Запас по циклической долговечности 333
 — Запасы прочности 329, 330—332
 — Местные запасы прочности 333
 — Основное уравнение для расчета 337—339
 — Предварительная оценка прочности диска 332, 333
 — Пример расчета 334, 335
 — Расчет напряжений от действия центробежных сил 328—330
 — Рекомендация для выбора материала 334
 — Уравнение равновесия элемента 337, 338
 — Уравнение совместности в напряжениях 338
 — Уравнения упругости 338

Диски переменной толщины — Определение напряжений и деформаций 342—351 — Расчет методом линейной аппроксимации 342—345 — Расчет методом последовательных приближений 347—350 — Пример расчета 345—347
 — — постоянной толщины — Определение температурных напряжений 340, 341 — Расчет напряжений и деформаций 339, 340
 — — постоянной толщины с ободом — Расчет 341, 342
 — — равнопрочные — Профилирование 335—337
 — — центробежных компрессоров — Запас по разрушающим оборотам 351 — Расчет 351

Долговечность — Понятие 629
 — — расчетная — Формула 33

Жесткость вала на кручение — Расчет 421, 422
 — — динамическая — Определение 417 — Понятие и формула 416

— — сечения балки на изгиб — Понятие 11
 — — сечения вала на кручение — Понятие 13
 — — сечения стержня при растяжении — Понятие 7
 — — стержня при кручении 383
 — — цилиндрическая 479

Задачи контактные — Анализ напряженного состояния 569, 571, 573 — Давление штампа 569 — Контакт цилиндров 566, 567, 568, 570 — Основные особенности 565, 566 — Упругий контакт пластинок 580, 581, 582 — Упругий контакт стержней 574—579
 — — конструкционные 565 — Определение функций влияния 585 — Основные уравнения 582—584 — Связь между силовыми факторами и перемещениями 584, 585

Закон надежности экспоненциальный 635, 636

Замок елочного типа — Запас прочности статический хвостовика 318
 — Момент сопротивления 318
 — Нагрузки на зуб 317
 — Напряжения в хвостовике 317, 318
 — Напряжения изгиба в основании зуба 317
 — Напряжения среза 317

Замок типа ласточкин хвост — Расчет напряжений смятия 319
 — Расчет перемычки 320
 — Расчет усилий 318, 319

Замок шарнирный — Расчет на прочность 320, 321 — Схема обкатывания лопатки 311

Заволивание пружин 160

Запас прочности — Выбор 31, 32 — Формула 31
 — — вала по касательным напряжениям 136, 138
 — — вала по нормальным напряжениям 136, 138
 — — вала по переменным напряжениям 139
 — — дисков 329, 330—332, 351
 — — длительной на различных режимах 35, 36
 — — длительной статической 32
 — — длительной эквивалентной 35, 36
 — — колеччатых валов 268, 269
 — — лопаток по переменным напряжениям 327

— — лопаток профильной части 290, 291
 — — по несущей способности 34, 619
 — — при кручении 32

Запас прочности при переменных напряжениях 34, 35
 — — при статических напряжениях 32, 33
 — — резьбового соединения по переменным напряжениям 61, 62
 — — статический — Приближенный метод определения 625—628 — Пример определения 626
 — — усталостной — Определение 609, 610
 — — усталостной при нестационарном нагружении — Определение 612—617
 — — усталостной при работе на различных режимах 36
 — — усталостной при сложном нагруженном состоянии — Определение 611, 612
 — — эквивалентный при ступенчатом нагружении — Определение 613—616

Запас устойчивости 494

Затяжка предварительная резьбовых соединений — Выбор величины 51, 52

Зубчатые передачи — Влияние параметров неточности зубьев 207
 — Влияние смазки и кинематики передачи на выкрашивание 222
 — Выкрашивание 180, 181, 222, 224
 — Деформация зубьев 190, 198, 199
 — Деформация изгибная валов 195, 196
 — Допуски на величину основного шага зубчатых передач 198
 — Жесткость удельная 199
 — Засадание 224
 — Запас усталостной прочности зуба 217, 218
 — Колебания вынужденные 205
 — Колебания резонансные 205
 — Коэффициент безопасности 218, 223
 — Коэффициент влияния ограниченного числа циклов 223, 224
 — Коэффициент динамической нагрузки 207, 208, 210
 — Коэффициент концентрации напряжений теоретический 215
 — Коэффициент концентрации напряжений эффективный 217
 — Коэффициент неравномерности распределения нагрузки 190, 193, 194, 195, 197, 226
 — Коэффициент приработки 226
 — Коэффициент смягчения 210, 211

- Коэффициент статического перекрытия 201
- Коэффициент, учитывающий форму зуба 187, 214, 215, 216
- Кручение ободьев или тел колес 190—194
- Микротрещины 222
- Модуль упругости приведенный 221
- Момент крутящий в шестерне 183
- Нагрузка динамическая 212
- Напряжения допускаемые 223, 224
- Напряжения изгиба 213, 219
- Напряжения касательные 221
- Напряжения контактные 185, 186, 187, 188, 219, 220, 221, 222
- Напряжения местные 214, 215
- Напряжения смятия 221
- Неравномерность начальная общая 196, 197
- Области зацепления зубьев 200
- Определения и обозначения 182, 183
- Оценка возможности резонанса 206
- Пересопряжение зубьев 206
- Полотка зуба 213, 214
- Предел выносливости 215, 218, 223
- Приработка зубьев 197, 226
- Прочность статическая 219
- Радиус кривизны приведенный 221
- Размеры основные колес без смещения 183
- Разрушение зубьев 180
- Распределение нагрузки по ширине зуба 191
- Распределение усилий статическое между зубьями 198
- Расстояние межосевое 184
- Расчет быстроходных передач 210
- Расчет динамических нагрузок в зубьях 208
- Расчет на выносливость зубьев при изгибе 186, 187, 188, 189
- Расчет на контактную выносливость 185, 186, 188
- Расчет на прочность упрощенный прямых зубьев 183—188
- Расчет при кратковременных перегрузках 224
- Сила нормальная удельная 184
- Сила окружная 183
- Сила окружная удельная 184, 188, 189, 214
- Сила ударная 210, 211, 212
- Схема зацепления 181, 183
- Схема зуба при расчете на изгиб 214
- Схема кручения тел сопряженных колес 192
- Схема поворота колеса при деформировании зуба 191
- Схема совместного движения упругих зубьев 204
- Схема сопряжения колес 203
- Угол перекоса осей 195, 196
- Удар кромочный 207, 208, 209
- Удар средний 207, 209, 210
- Усилие, действующее на зуб 183, 184
- Усилия динамические 202
- Усилия контактные 200, 201
- Усилия статические максимальные 202
- Условие выносливости при изгибе зуба 187
- Условие контактной выносливости 186
- Условие обеспечения контактной выносливости зубьев 223
- Условие совместного движения зубьев 203
- Условия статического зацепления зубьев 207
- Факторы, увеличивающие нагрузку 189
- Частота возбуждающей силы 205
- Частота собственных колебаний сопряженных колес 202, 204, 205
- Число циклов нагружения фактическое 218
- Число циклов нагружения эквивалентное 224, 225
- Шаги зубьев 198
- Зубчатые передачи конические** — Диаметры колес 227 — Модуль зацепления 227 — Нагрузка удельная 228 — Напряжения контактные 228 — Расстояние межосевое 228 — Скорость окружная 228 — Число зубьев 227 — Число передаточное 227 — Ширина зуба 228
- — косозубые и шевронные — Длина контактных линий 226 — Радиус кривизны приведенный 227 — Сила нормальная 227 — Сила окружная удельная 226 — Число зубьев эквивалентное 227
- — Новикова М. Л. — Напряжения контактные 229 — Радиус кривизны приведенный 229 — Расчет на изгиб 229 — Сила нормальная 228 — Схема передачи 229
- — с внешним зацеплением 184, 185
- — с внутренним зацеплением 185, 186
- Изгиб** — Момент сопротивления 10, 11 — Примеры определения опасных сечений 9—11
- — чистый — Понятие 9

- — шарнирных лопаток — Расчет 312, 313
- Изгиб стержней** — Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина 367—370
- Зависимость между изгибающим моментом и перерезывающей силой 352
- Максимальные напряжения 643, 644
- Момент инерции сечения 355
- Момент разрушающий предельный 374, 375
- Моменты сопротивления сечения 356, 357
- Напряжения в продольных сечениях 644
- Нормальные напряжения 355, 356
- Определение касательных напряжений 360, 361
- Определение нормальных напряжений в случае изгиба и растяжения 357, 358
- Определение прогибов с помощью интеграла Мора 365, 366
- Определение углов поворота сечений с помощью интеграла Мора 367
- Относительное удлинение волокон 354
- Предельный пластический момент 373, 374
- Примеры определения прогибов 363—365
- Схема 643
- Уравнения упругой линии 361—363
- Условия закрепления 353
- Эпюры изгибающих моментов 354
- Изгиб стержней переменного сечения** — Определение прогибов и углов поворота 370, 371
- — с учетом пластической деформации 371—375
- Изломы** — Виды 30, 31
- Индекс пружины** 161
- Интенсивность отказов** 633 — Общая закономерность изменения по времени наработки 634
- Кармана модуль** 409
- Колебания валов** 140
- — динамических систем — Формулы для определения круговых частот 428, 429
- — изгибные — Расчет двухмассовой системы 425, 426 — Расчет одномассовой системы 424, 425
- — изгибные колец 429, 430
- — изгибные стержней постоянного сечения — Определение 426, 427
- — крутильные 420 — Расчет жесткости вала на кручение 421, 422 — Расчет одномассовой системы 420, 421 — Частота 423, 424
- — маятниковые шарнирных лопаток 310, 311
- — одномассовой системы 415
- — одномассовой системы вынужденные 416
- — поперечные струны 430
- — резонансные лопаток 321
- — системы свободные 415
- Кольца** — Осесимметричная деформация 391—397
- Плоская деформация 384—391
- Расчетные формулы 388—391
- Устойчивость 498, 499
- Эпюры изгибающих моментов 385, 388—391
- Кольца конические тонкостенные** — Деформация осесимметричная 396, 397
- — поршневые — Расчет на прочность 275, 276
- — прямоугольного сечения — Деформация осесимметричная под действием осевой силы 396
- — упругие 453, 454
- Конструирование автоматизированное** — Понятие 671
- Контролеспособность** — Понятие 629
- Концентрация напряжений** 14, 15, 548, 550 — Влияние на свойства материалов 20 — Влияние на усталостную прочность 600, 601
- — в замковых соединениях лопаток 562—564
- — в зубьях храповых колес 561, 562
- — в прямозубых цилиндрических передачах 559, 560
- — в резьбовых соединениях 54—56
- — при кручении 379, 380
- Коэффициент безопасности, учитывающий влияние на долговечность подшипников характера внешних грузов** — Значение 150
- — влияния абсолютных размеров 27, 28
- — влияния шарнирного закрепления лопаток 313
- — внутреннего давления при расчете фланцев 75
- — концентрации деформаций 556
- — концентрации деформаций теоретической 548
- Коэффициент концентрации напряжений** — 14, 556
- — для коленчатых валов 266, 268

- — теоретический 54—56, 548, 551—555, 600
- — теоретический в соединениях с гарантированным натягом 101
- — эффективный 27, 62, 601
- — эффективный в сварных соединениях 115, 118
- — эффективный для валов 137, 138
- Коэффициент масштабный** при кручении и изгибе валов 138
- — на начальные неправильности цилиндрических оболочек 501—503
- — напряжений для круглых пластин 468—473
- — напряжений для прямоугольных пластинок 477
- — настройки частоты при маятниковой форме колебаний лопаток 311
- — неравномерности напряжений для коленчатых валов 266, 268
- — осевой нагрузки для подшипников качения 150
- — осевой нагрузки фланцевого соединения 75
- — осевой статической нагрузки для подшипников качения 148
- Коэффициент податливости** 425
- — болтов 46, 75
- — закрученных лопаток 304
- — прокладки во фланцевом соединении 75
- — промежуточных деталей в резьбовом соединении 46, 47
- — стержня при изгибных колебаниях 429
- — трубы 75
- — фланцев 76, 82
- — фланцев при действии осевой нагрузки 75, 76, 81, 82
- Коэффициент прогибов** для круглых пластин 468—473
- — прогибов для прямоугольных пластинок 477
- — прокладочный 72
- — Пуассона 8
- — радиальной нагрузки для подшипников качения 150
- — радиальной статической нагрузки для подшипников качения 148
- — состояния поверхности 28
- — температурный для подшипников качения 151
- — трения в резьбе 50
- — трения приведенный 50, 51
- — трения при посадках с гарантированным натягом 97
- — углов поворота для круглых пластин 468—473
- — учитывающий влияние масла на трение подшипников 155
- — учитывающий влияние масштабного эффекта для резьбовых соединений 62, 63
- — учитывающий влияние состояния поверхности при изгибе и кручении валов 139
- — чувствительности материала болта (шпильки) к концентрации напряжений 62
- Кривые Велера** 25, 26
- — выносливости 598, 599
- — деформирования 532—534, 545, 642, 643, 645
- — длительной прочности 21
- — плотности распределения переменных напряжений и пределов выносливости 620
- — ползучести 24, 536
- — предельных амплитуд 599
- — убыли изделий из эксплуатации 640, 641
- — усталости 25, 26
- Критерий** длительной и малоцикловой прочности 595, 596
- — интенсивности напряжений 589, 590
- — максимальной деформации растяжения 592
- — максимального нормального напряжения 592
- — максимальных касательных напряжений 590
- — Надаи 594
- — пластичности 591
- — прочности Мора 592, 593
- — прочности обобщенный для пластичных и хрупких материалов 595, 596
- — прочности Писаренко — Лебедева 593, 594
- — статической прочности для пластичных материалов 589, 590
- — статической прочности для хрупких (малопластичных) материалов 592—594
- Кручение** 12, 13
- — вала и втулки совместное 422
- — вала круглого 376, 377
- Кручение стержней** 376—383 — Распределение касательных напряжений 379, 380
- — круглых 376, 377
- — прямоугольного сечения 378, 379
- — с учетом пластических деформаций 380, 381
- — с эллиптическим поперечным сечением 377, 378

- — тонкостенных 379
- — трубчатых 382, 383
- Крылова функции** 484, 485
- Лапласа функция** 621, 637
- Лопатки** — Автоколебания 324
- Бандажирование 324, 325
- Газовые силы, действующие на лопатку 282
- Замки шарнирные 320, 321
- Замок елочного типа 316, 317
- Замок типа ласточкин хвост 318, 319
- Запас прочности 290, 291
- Запас прочности по переменным напряжениям 327
- Конструктивные способы разгрузки от изгиба газовыми силами 284
- Напряжения от центробежных сил 227
- Определение геометрических характеристик по данным чертежа 289
- Определение напряжений от изгиба 285
- Осевая сила, действующая на лопатки 290
- Основные виды колебаний 321—324
- Положение профилей и действительное направление газовых усилий 282
- Приближенный расчет основной частоты колебаний 294—297
- Лопатки** — Пути повышения запаса прочности 327
- Распределение изгибающих моментов по длине пера 313
- Расчет вытяжки 280
- Расчет геометрических характеристик сечения 285—290
- Расчет замков 316—321
- Расчет изгибающих моментов от газовых сил 281—284
- Расчет изгибающих моментов от центробежных сил 284, 285
- Расчет изгибных колебаний 294—301
- Расчет работы центробежных сил при колебаниях лопатки 299—301
- Резонансная частота вращения 322
- Резонансные диаграммы 323, 325
- Резонансные колебания 321—323
- Спектрограмма переменных напряжений 326
- Срывные колебания 324
- Узловые линии 323
- Уточненный расчет собственных частот 297—299
- Частота возбуждения 321
- Лопатки бандажированные** 313—316
- Изгиб бандажной полки 314
- Расчет натяга по бандажным полкам 315, 316
- Лопатки закрученные** 301—309
- Геометрические и жесткостные характеристики (приближенные формулы) 304, 305
- Колебания 307—309
- Основная частота колебания 307
- Параметр закрученности 309
- Пример расчета собственной частоты колебаний 309
- Раскрутка от центробежных сил 305, 306
- Расчет напряжений от центробежных сил 306, 307
- Таблица для расчета собственной частоты колебаний 308, 309
- Упругое удлинение 306
- Лопатки охлаждаемые** — Распределение напряжений в лопатке 293 — Температурное поле 293
- — постоянного сечения — Определение напряжений 277, 278
- — равнопрочные — Варианты 292
- Расчет напряжений 291, 292 — Условия равновесия элемента лопатки 291, 292
- — с изменением площади поперечного сечения по степенному закону 278 — График изменения площади по длине лопатки 279 — Кривые растягивающих напряжений в лопатке 279, 280
- — слабо закрученные 301, 302
- — шарнирные — Кинематика 309, 310 — Коэффициент влияния шарнирного закрепления 313 — Маятниковые колебания 310, 311 — Расчет на изгиб 312, 313 — Схема обкатывания в шарнирном замке 311
- Ляме постоянная** 517
- Материалы конструкционные** — Механические свойства при повышенной температуре 22, 23 — Физические свойства 8
- Матрица диагностическая** 658, 659
- Мембраны прорывные** 475, 476
- Метод вариационно-разностный** расчета конструкций 513—521
- — динамических жесткостей 416—418, 423 — Определение собственных частот системы 418—420
- — конечных элементов расчета конструкций 521—525 — Примеры расчета 525—528

- — минимального риска 661—664
- — разделения в пространстве признаков 666—670
- — распознавания логический 670
- Модели статистические усталостной прочности** 618
- Модель математическая** — Основные факторы 672
- Понятие 672
- Структурная схема 673
- Модуль упругости** 7
- — приведенный 409
- Момент гироскопический** 435
- — изгибающий в сечении 352
- — инерции диска 422, 423
- — инерции полярный 376, 377
- — инерции сечения лопаток турбомашин 305
- — инерции сечения при изгибе 356
- — крутящий 12, 13
- — пластический предельный при изгибе 373, 374
- — разрушающий предельный при изгибе 374, 375
- — сопротивления кручению 13
- — сопротивления при изгибе 356, 375
- Моменты сопротивления сечения валов, ослабленных пазом для одной стандартной шпонки** 133, 134
- — сплошных (круглых) валов 132
- — с центральным каналом 132, 133
- — шлицевых 135
- Мора интеграл** 366
- Мора шестиугольник** 593, 594
- МРТУ 14—2—115—66** 144
- Муфты с резиновыми упругими элементами** — Конструкции 175
- Мэнсона формула** 29
- Нагрузка критическая** 398, 399 — Общий случай расчета 400, 401 — Таблицы для расчета 401—404
- — предельная 34
- — приведенная подшипников качения 149, 151
- — следящая 412
- Надаи критерий** 594
- Надежность** — Количественные показатели 641 — Основное уравнение теории надежности 633, 634 — Понятие 629 — Правила 629—631
- Напряжения** — Концентрация 14
- — во фланце 78
- — главные 5
- — изгиба при упругопластических деформациях 371—373
- — касательные при изгибе 360, 361

- — касательные при кручении 377 — Распределение 379, 380
- — касательные при кручении стержня прямоугольного сечения 378, 379
- — касательные при кручении стержня с эллиптическим поперечным сечением 378
- — касательные при кручении трубчатых стержней 382
- — контактные 15
- — критические 494
- — кручения в стержне болта 51
- — нормальные при изгибе 356—358
- Напряжения остаточные** — Влияние термической и химико-термической обработки 650
- Влияние технологии обработки 648
- Влияние на усталостную прочность 651
- Возникновение 645
- Графики после различных видов обработки поверхности и алмазного выглаживания 649
- Образование 642
- Определение 652, 653
- Понятие 642
- Процесс образования 645
- Эпюры распределения 643, 645
- Напряжения переменные** — Свойства материалов при переменных напряжениях 14—28 — Цикл 25
- — при кручении вала 376, 377
- — статические — Свойства материалов при статических напряжениях 17—20
- — температурные — Расчет 15
- — температурные в стержне прямоугольного сечения 359, 360
- Напряженное состояние линейное (одноосное)** 15
- — объемное (трехосное) 13
- — плоское (двухосное) 16
- Наработка до отказа средняя** — Пример определения для экспоненциального закона надежности 636
- — на отказ — формулы 641
- Натяг потребный** 102 — Пример расчета 103, 104
- — расчетный 102 — Пример расчета 103, 104
- Неймана — Пирсона метод** 662, 663
- Обкатка роликом и шариком** — Инструмент 650
- — виброударная (чеканка) 650
- — сглаживающе-упрочняющая 650
- — упрочняющая 650

- Оболочки анизотропные** — Устойчивость при внешнем давлении 512 — Устойчивость при действии осевых сил 513
- — конические — Устойчивость под внешним давлением 509, 510 — Устойчивость под действием сжимающей силы 509
- — подкрепленные — Устойчивость под внешним давлением 513, 514 — Устойчивость при действии осевых сил 514, 515
- — сферические — Устойчивость под действием внешнего давления 510
- — эллипсоидальные — Устойчивость под внешним давлением 511
- Оболочки цилиндрические** 479 — Напряжения в сечении 480
- Расчет температурных напряжений 492, 493
- Условие устойчивости при совместном действии нагрузок (общий случай) 505—508
- Устойчивость под внешним давлением 499—501
- Устойчивость под действием осевых сил 501, 502
- Устойчивость при изгибе 504, 505
- Устойчивость при кручении 502—504
- Формы потери устойчивости 501
- Оболочки цилиндрические длинные** — Общее решение и основные случаи расчета 481—483 — Понятие 480 — Устойчивость при действии осевых сил 502 — Устойчивость при изгибе 504, 505 — Устойчивость при кручении 503
- — очень короткие — Приближенный метод расчета 491, 492
- Обработка деталей пневмодинамическая** — Схема 646
- — упрочняющая — Эффективность 651
- Опоры жесткие** 433
- — упругодемпфирующие 453
- Оптимизация локальная** — Цели 676
- Оси сечения главные приведенные** 358, 359
- Отказ** 629
- — катастрофический 629
- Палец поршневой** — Виды деформаций 275
- Расчет на прочность 274, 275
- Расчетные схемы нагружения 275
- Параметр закрученности лопаток** 309
- Параметры входные заданные** 672
- — состояния 676
- — управляющие 672, 676
- Паяные соединения** — Виды 108, 110 — Зазоры, применяемые при пайке 124 — Механические характеристики припоев 123
- Прочность при срезе 124, 125
- Передача** — см. *Зубчатая передача, Ременная передача* и т. д.
- Перемещения точек тела при деформации тела** 6
- Период колебания системы** 415
- Пластинки кольцевые** — Устойчивость 498
- Пластинки круглые** — Устойчивость 498
- Примеры расчета пластинок 464—465
- Примеры расчета температурных напряжений 475
- Расчеты по таблицам 465—474
- Расчет температурных напряжений 474, 475
- Расчетные формулы 461—464
- Пластинки прямоугольные** — Расчет на устойчивость 494—497 — Расчетные формулы 476, 478
- — под действием касательных напряжений — Устойчивость 497
- — сжатые в двух направлениях — Устойчивость 496
- — сжатые в одном направлении — Устойчивость 494, 495
- Пластинки с отверстиями** — Распределение деформаций 556, 557
- Распределение напряжений 549, 556 — 559
- Пластичность** — Понятие 17
- Плотность материала приведенная** 351
- — распределения отказов 632
- Поверхность деформированная** 535
- Подшипники качения** — Быстроходность 144
- Выбор 152
- Гироскопический момент 146
- Динамическая грузоподъемность 148, 149
- Контактные напряжения в подшипнике 147
- Материалы 144
- Осевая сила, предотвращающая вращение 147

- Основные характеристики 142—144
- План скоростей в подшипнике 147
- Приведенная нагрузка 149—151
- — Причины преждевременного выхода из строя 156, 157
- Распределение нагрузки в подшипнике 144—146
- Смазка 153—156
- Статическая грузоподъемность 147, 148
- Условное обозначение 144
- Частота вращения сепаратора 146
- Частота вращения шарика 146
- Ползучесть** 23, 535
- Полки бандажные** — Расчет на изгиб 314
- Поршень** — Расчет днища 276
- Правило Верещагина** 369 — Вычисление интеграла Мора 368, 369 — Ограничение для применения 369 — — знаков 9 — — решающее 667
- Предел выносливости** — Понятие 26 — — детали 34 — Расчетно-экспериментальное определение 605, 606 — Экспериментальное определение 604, 605 — — материала — Влияние различных факторов 27, 28 — — ограниченный — Понятие 26
- Предел длительной прочности** 21 — — доверительный для вероятности разрушения 623 — — ползучести 23 — — пропорциональности 17 — — прочности 18 — — прочности истинный 18, 19 — — текучести 17 — — упругости 17
- Прессовые соединения** — См. *Соединения с гарантированным натягом*
- Прецессия прямая синхронная** 435
- Принцип итерации** 675 — — оптимизации основной 675
- Прогиб начальный** — Влияние на выпучивание стержня 405
- Прогиб оси стержня** — Расчет 644 — — наибольший 644 — — остаточный 645
- Проектирование автоматизированное** 671, 675
- Производство автоматизированное** — Понятие 671 — Схема 672
- Прокладки линзовые** — Допустимое давление 74 — Усилие уплотнения 73 — — плоские — Допустимое давление 74 — Рекомендуемые значения толщины и ширины 72 — Усилие уплотнения 71 — — фасонные — Допустимое давление 74 — Усилие уплотнения 73
- Профилирование равнопрочных дисков** 335—337
- Прочность длительная** 21 — — малоцикловая 28, 29 — — материалов при растяжении 17—19 — — материалов при сжатии 19 — — резьбовых соединений при переменных нагрузках 61—64 — Пример расчета 64—66 — — резьбовых соединений при статических нагрузках 56—61 — — соединений с гарантированным натягом 104—107 — Конструктивные способы повышения 105—107 — — термическая 29
- Прочность усталостная** — Влияние абсолютных размеров детали (масштабного фактора) 601, 602 — Влияние концентрации напряжений 600, 601 — Влияние постоянных напряжений 599 — Влияние состояния поверхности и упрочнения 602—604 — Основные закономерности 597—604 — Статистические модели 618 — Условия 606—609
- Прочность усталостная сварных соединений** — Влияние конструктивных и технологических факторов 114—121 — — нахлесточных 117, 118 — — с конструктивными элементами 120, 121 — — стыковых 114—117 — Механическая обработка шва 116 — Напряжения в стыковом соединении 115 — Остаточные напряжения от сварки 116 — Состояние поверхности основного металла в зоне шва 115 — Форма и размеры шва 116 — — тавровых 119
- Прочность фланцев** 77—79 — — фланцевых болтов 77 — — шлицевых соединений 90—93
- Пружины** — Диаграмма предельных напряжений 169 — Заневоливание 160 — Материалы 158, 159 — Пример расчета 177—179 — Расчет на статическую прочность 169 — Расчет на ударную нагрузку 170, 171 — Расчет на усталостную прочность 169, 170 — Резиновые упругие элементы 175—179

- **Пружины витые** — Способы предотвращения выпучивания 160 — — концентричные 160 — — растяжения 158, 160 — — сжатия 158, 160
- **Пружины витые цилиндрические** — График зависимости между нагрузкой и осадкой пружины сжатия 164 — Допускаемые напряжения 162 — Значения максимальной нагрузки и податливости одного витка пружины 166, 167 — Касательное напряжение в сечении 161 — Осевая податливость 162 — Расчет 161—169 — Силовые факторы в сечении нагруженной пружины 161
- **Пружины кольцевые** 173, 174 — — кольцевые волнистые 174, 175 — — многожилные 168, 169 — — прорезные 172, 173 — — тарельчатые 171, 172 — — фасонные 168, 169
- **Пуассона коэффициент** 479
- **Разрушение** в зависимости от числа циклов — Типы 596 — — пластичное 30 — — хрупкое 30
- **Распределение времени безотказной работы Вейбулла** 637, 638 — — нормальное 636, 637
- **Растяжение** — Прочность материалов 17—19 — — стержня 7
- **Расчет витых цилиндрических пружин** 161—169 — — числа изделий, находящихся в эксплуатации 640
- **Расчет на прочность конструкций с учетом пластичности и ползучести** — Метод дополнительных деформаций 539, 543, 544, 546 — Метод переменных параметров упругости 537—539, 542, 543, 546
- **Расчет соединений с фланцами контактирующими** 70, 71 — — неконтактирующими 68, 69 — — неконтактирующими свободными 69, 70 — — неконтактирующими уточненный 71—79
- **Резонанс** — Понятие 415
- **Резьбовые соединения** — Диаграмма предельных напряжений 61 — Диаграмма усилий 43 — — Дополнительные расчетные случаи 41—43 — — Конструктивные способы разгрузки от скручивания при затяжке 51 — — Механические свойства материалов 60 — — Определение коэффициентов податливости болта и промежуточных деталей 46—49 — — Определение усилий в затянутом соединении при действии внешней осевой нагрузки 43—45 — — Основной расчетный случай 40, 41 — — Прочность при переменных нагрузках 61—66 — — Распределение нагрузки по виткам резьбы 52—54 — — Расчет напряжений кручения 49—51 — — Расчет усилий в сложных силовых схемах 48, 49 — — Расчетная схема 43 — — Способы разгрузки от напряжений изгиба 59, 60 — — Способы разгрузки от сил в плоскости стыка 43 — — Способы улучшения распределения нагрузки по виткам 54 — — Типы 41 — — Условие цепного среза 59 — — Уточненный расчет 43—49
- **Релаксация напряжений** — Понятие 24
- **Релея формула** 295
- **Ременная передача** — Быстроходность 243 — Дуга скольжения 240 — Дуга сцепления 240 — Кинематика 242 — Коэффициент динамичности 245, 247 — Коэффициент трения 241 — Коэффициент угла обхвата 245 — Коэффициент, учитывающий влияние длины ремня на ресурс 245 — Коэффициент, учитывающий неравномерное распределение нагрузки 245 — Кривая скольжения 242, 243 — Материал ремней 239 — Мощность общая 245 — Мощность, передаваемая одним ремнем 245, 246 — Нагрузка полезная 245 — Нагрузочная способность 241 — Напряжения в ремнях 243, 244 — Недостатки 239 — Порядок расчета 250, 251 — Преимущества 239 — Применение 239 — Размеры клиновых ремней 240

- Расчет на выносливость 244, 245
- Расчет на тяговую способность 245, 247
- Ресурс 244
- Самозаклинивание ремня 242
- Скольжение относительное 242
- Срок службы 244, 245
- Схема 239
- Схема взаимодействия ремня со шкивом 241
- Схема сил, действующих на элемент ремня 241
- Тяговая способность передачи 242
- Увеличение угла обхвата 242
- Усилия в ремне 240, 241
- Форма сечения ремня 239
- Формула Эйлера 241
- Число передаточное 242
- Ременная передача с зубчатыми ремнями** — Давления удельные на зубья 250
- Материал ремня 247
- Модуль 247, 248
- Мощность, передаваемая клиновым ремнем 248
- Основной конструктивный параметр 247
- Скорость ремня наибольшая 249
- Схема 249
- Усилия окружные расчетные 249
- Шаг на наружном диаметре 249
- Ширина ремня 248, 249
- Ремни клиновые** 239 — Основные размеры и области применения 240
- — поликлиновые 239
- Ремонтпригодность** — Понятие 629
- Ресурс технический** — Понятие 429
- Роликоподшипники** — Типы 142, 143 — Характеристика 142, 143
- Роторы жесткие** 432
- Самоустановление вала** 432
- Сварные соединения** — Влияние основных конструктивных и технологических факторов на усталостную прочность 114—121
- Допускаемые напряжения для сварных швов при статической нагрузке 114
- Контроль качества 108, 111
- Основные виды 108—110
- Расчет на прочность при переменных нагрузках 121, 122
- Расчет на прочность при постоянных нагрузках 111—114
- Сдвиг** — Понятие 7
- Сжатие** — Прочность материалов 19
- — стержня 8
- Сила перерезывающая** — Определение 352
- Система двухмассовая** — Расчет изгибных колебаний 425, 426 — Определение частоты собственных колебаний 420
- — двухмассовая крутильная — Определение частоты колебаний 423
- — многомассовая крутильная — Определение частоты колебаний 423, 424
- — одномассовая — Расчет изгибных колебаний 424, 425 — Расчет крутильных колебаний 420, 421 — Определение частоты собственных колебаний 418
- — параллельных элементов — Анализ надежности 639, 640 — Надежность 638, 639
- — последовательных элементов — Надежность 638
- Скорость угловая критическая** — Общий случай определения 443
- — некоторых роторов 460
- Смазка подшипников** 153—156
- Соединение деталей с гарантированным натягом** — Контактные давления 97—102
- Прочность при переменных нагрузках 104—107
- Условия неподвижности 96, 97
- Соединения** — см. *Резьбовые соединения, сварные соединения* и т. д.
- Срез** — Касательное напряжение при срезе 11
- — заклепок 12
- — цепной в резьбовых соединениях 59
- — шпонки 12
- Стержни** — Влияние начального прогиба и внецентренного приложения силы на выпучивание 405
- Выпучивание при упругопластических деформациях 409—412
- Жесткость сечения на изгиб 409
- Изгиб — см. *Изгиб стержней*
- Кручение — см. *Кручение стержней*
- Потеря устойчивости 408, 409
- Стержни закрученные** — Основные соотношения теории 302—304
- — постоянного сечения — Определение изгибных колебаний 426, 427
- — сжатые — График зависимости предельного напряжения от гибкости 406 — Расчет на прочность и жесткость 405—408 — Условие прочности 407, 408

- — сжатые эксцентрично — График зависимости упругого прогиба от величины сжимающей силы и эксцентриситета 406
- — с кольцевой выточкой — распределение напряжений 557
- СТ СЭВ** 144—75 96, 102—104
- 188—75 87, 88
- 189—75 85
- 218—75 37
- 269—76 88
- Твердость** — Понятие 17
- — материалов 19, 20
- Тензометрирование лопаток** 325, 326
- Теория пластичности деформационная** 531—533
- — пластического течения 534, 535
- — ползучести 536
- Технология автоматизированная** — Понятие 671
- ТУ** 14-1-595—73 144
- Трещина усталостная** 180
- Угол закрутки единицы длины вала** 376
- — закрутки стержня с эллиптическим сечением 377
- — поворота сечения лопатки от действия центробежных сил 305
- Удлинение относительное** 6, 18
- — полное истинное 19
- Упрочнение** — Влияние на усталостную прочность 602—604
- — деталей — Методы 645
- — микрошариками 648, 649
- — отверстий 650
- Упрочнение деталей машин дробью гидродробеструйное** 647
- — пневмодинамическое 647
- — пневмодробеструйное 645
- Упругая линия стержня** 361—363
- Уравновешивание валов** 459, 460
- Усилия затяжки фланцевых болтов** 76, 77
- — обжатия прокладки 74
- — уплотнения, необходимое для герметичности стыка во фланцевых соединениях 71—74
- Условия усталостной прочности** — Простое (однокомпонентное) напряженное состояние 606, 607 — Сложное (многокомпонентное) напряженное состояние 607—609
- Усталость малоцикловая** 28, 29
- Устойчивость** — Динамический анализ 412, 413 — Понятие 494 — Потеря при нагреве 414
- — колец 498, 499
- — пластинок 494—498
- — пластинок при температурных напряжениях 511
- Устойчивость оболочек анизотропных** 512
- — конических 509, 510
- — подкрепленных 513—515
- — при температурных напряжениях 512
- — сферических 510
- — цилиндрических 499—509
- — эллипсоидальных 511
- Устойчивость стержней** — Потеря 398 — Потеря при упруго пластических деформациях 408, 409 — Формы прогибов 399
- Фактор масштабный** — Влияние на усталостную прочность 601, 602
- Фланцевые соединения** — Напряженное состояние фланца и трубы 79—84
- Разрушающая нагрузка 82, 84
- Расчетная схема соединения с контактирующими фланцами 83, 84
- Расчетная схема соединения с неконтактирующими фланцами 79—83
- Типы 67, 73
- Упрощенный расчет 67—71
- Уточненный расчет соединений с неконтактирующими фланцами 71—79
- Фланцы** — Расчет на прочность 77—79
- Хрупкость** — Понятие 17
- Центр тяжести сечения приведенный** 358
- Цепная передача** — Износостойкость 257, 258
- Конструкции 252
- Коэффициент концентрации напряжений эффективный 260
- Недостатки 252
- Основные параметры 252, 255, 256
- Основные размеры 254
- Особенности проектирования 261
- Порядок расчета 262, 263
- Преимущества 252
- Расстояние между осями звездочек 256
- Схема 252
- Тяговая способность 257
- Усилия 254, 255
- Усталостная прочность 260, 261
- Числа зубьев звездочек 255, 256

- Число передаточное 255
- Шаг 256
- Эксплуатация 262
- Цепь** втулочная 253
- — зубчатая 253
- — роликовая 252
- Цикл переменных напряжений** асимметричный 25
- — пульсирующий 25, 26
- — симметричный 24

- Частота вращения вала критическая** 140, 141, 431
- Влияние гироскопического эффекта 435, 436
- Общий случай определения 443—446
- Определение второй и более высоких критических угловых скоростей 449—451
- Примеры расчета ротора компрессора 440—443, 446—449
- Примеры расчета ротора нагнетателя на упругих опорах 455, 456
- Расчет с учетом упругости опор 451—456
- Учет начального эксцентриситета центра тяжести диска 431
- Учет упругости опор 433
- Частота вращения критическая вала** с непрерывно-распределительными массами 437—460
- — с несколькими дисками 436, 437
- — с одним диском 431—436
- — с равномерно распределенной массой 456—460
- Частота колебаний** 415
- — крутильных 423, 424
- Частота переменных напряжений** 28
- Частота системы собственная** — Определение методом динамических жесткостей 418—420

- Шариковинтовые передачи** — Конструкция 230
- Материал винтов и шариков 231
- Напряжение контактное максимальное 236
- Основные достоинства 230
- Основные профили винта и гайки 231
- Податливость витка винта и гайки 235, 236
- Расчет 231, 232, 235—238
- Схема соединения типа болт—гайка 232
- Схема соединения типа стяжки 234
- Уравнение совместности деформаций 232
- Уравнение совместности перемещений 232
- Шариоподшипники** — Оптимальные углы контакта 143 — Типы и характеристика 142, 143
- Шатуны** — определение напряжений 272
- Расчет кривошипной головки 274
- Расчет на прочность стержня 272, 273
- Расчетные схемы нагружения поршневой головки 271
- Шероховатость поверхности** — Влияние на усталостную прочность 602, 603
- Шлицевые соединения** — Износ 94, 95
- Концентрация напряжений 83
- Расчет на прочность 90—93
- Способы центрирования 89, 95
- Схема 90
- Фактические средние напряжения смятия для различных изделий 92
- Шлицевые соединения** прямобочные 87—89
- — с винтовыми зубьями 90
- — соосные 128
- — торцовые 128
- — треугольные 89, 90
- — эвольвентные 87—89
- Шпильки** — Допускаемые статические нагрузки 42 — Момент затяжки 42 — Схема нагружения 48
- Шпонки** призматические обыкновенные 85
- — сегментные 86
- Шпоночные соединения** — основные типы 86 — Расчет 86, 87

Предисловие	3
ОСНОВЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ	
Глава 1. Основные виды напряженного состояния	5
Напряжение и деформация	5
Растяжение и сжатие	7
Изгиб	8
Срез и смятие	11
Кручение	12
Концентрация напряжений	14
Температурные напряжения	15
Напряженные состояния	15
Глава 2. Механические характеристики конструкционных материалов и оценка прочности	17
Свойства материалов при статических напряжениях	17
Свойства материалов при высоких и низких температурах	21
Свойства материалов при переменных напряжениях	24
Малоцикловая и термическая прочность	28
Разрушения и изломы	29
Оценка прочности	31
Запасы прочности при статических напряжениях	32
Запасы прочности по несущей способности	33
Запасы прочности при переменных напряжениях	34
Запасы длительной прочности при работе на различных режимах	35
Запасы усталостной прочности при работе на различных режимах	36
РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ	
Глава 3. Резьбовые соединения	37
Материалы, покрытия и контроль крепежных деталей	37
Упрощенный расчет соединений	39
Уточненный расчет соединений	43
Расчет напряжений кручения	49
Выбор величины предварительной затяжки	51
Распределение нагрузки по виткам резьбы и концентрация напряжений в соединениях	52
Прочность при постоянных нагрузках	56
Прочность при переменных нагрузках	61
Глава 4. Фланцевые соединения	67
Типы фланцевых соединений	67
Упрощенный расчет	67

	Уточненный расчет соединений с неконтактирующими фланцами	71
	Напряженное состояние фланца и трубы	79
Глава 5.	Шпоночные и шлицевые соединения	85
	Шпоночные соединения	85
	Шлицевые соединения	87
	Расчет шлицевых соединений на прочность	90
	Износ соединений	94
Глава 6.	Соединения деталей с гарантированным натягом	96
	Условия неподвижности и контактные давления в соединениях	96
	Расчетный и потребный натяги	102
	Прочность при переменных нагрузках	104
Глава 7.	Сварные и паяные соединения	108
	Основные виды соединений	108
	Контроль качества сварных соединений	103
	Расчет сварных соединений при постоянных нагрузках	111
	Влияние основных конструктивных и технологических факторов на усталостную прочность	114
	Расчет на прочность при переменных нагрузках	121
	Паяные соединения	122
Глава 8.	Валы	126
	Конструктивные формы и материалы валов	126
	Основные технические требования	129
	Нагрузки на валы и расчетные схемы	130
	Расчет статической прочности, жесткости и устойчивости валов	131
	Расчет на усталостную прочность	136
	Расчет на колебания	140
	Критические частоты вращения валов	140
Глава 9.	Подшипники качения	142
	Основные характеристики	142
	Распределение нагрузки между телами качения	144
	Кинематика и динамика подшипников	146
	Несущая способность подшипников	147
	Выбор подшипников	152
	Смазка подшипников	153
	Некоторые причины преждевременного выхода из строя подшипников качения	156
Глава 10.	Пружины	158
	Общие сведения	158
	Витые пружины	158
	Расчет витых цилиндрических пружин	161
	Расчет на статическую прочность	169
	Расчет на усталостную прочность	169
	Расчет на ударную нагрузку	170
	Тарельчатые пружины	171
	Прорезные пружины	172
	Кольцевые пружины	173
	Кольцевые волнистые пружины	174
	Резиновые упругие элементы	175
Глава 11.	Зубчатые передачи	180
	Основные обозначения	181
	Упрощенный расчет на прочность прямых зубьев	183
	Структура расчетных формул по ГОСТ 21354—75	188

	Нагрузки, действующие на зуб	189
	Неравномерность распределения нагрузки по ширине зуба (коэффициент K_F)	190
	Статическое распределение усилий между зубьями (коэффициент K_G)	198
	Динамические усилия на зубьях при крутильных колебаниях (коэффициент K_{HP}) и резонансные режимы	202
	Динамические усилия на зубьях при пересопряжении (коэффициенты K_d и K_n)	206
	Расчет зубьев на прочность при изгибе	213
	Расчет на контактную выносливость активных поверхностей зубьев	219
	Работа передачи при различных режимах	224
	Особенности расчета передач с косыми, шевронными, коническими зубьями и передач М. Л. Новикова	226
	Косозубые и шевронные передачи	226
	Конические передачи	227
	Передача М. Л. Новикова	228
Глава 12.	Шариковинтовые передачи	230
	Конструкции передач и материалы	230
	Расчет передач	231
Глава 13.	Ременные передачи	239
	Материалы и конструкции приводных клиновых ремней	239
	Механика ременной передачи	240
	Расчет ременных передач	244
	Передачи с зубчатыми ремнями	247
	Порядок расчета и проектирования ременных передач	250
Глава 14.	Цепные передачи	252
	Конструкции цепей и материалы	252
	Усилия в передаче	254
	Выбор основных параметров передачи	255
	Несущая способность передачи	257
	Особенности проектирования и эксплуатации передач	261
	Порядок расчета передачи	262
Глава 15.	Расчет деталей поршневых двигателей	264
	Расчет коленчатых валов	264
	Расчет шатунов	271
	Расчет поршневого пальца	274
	Расчет поршневых колец	275
	Расчет днища поршня	276
Глава 16.	Расчет деталей турбомашин	277
	Расчет лопаток на растяжение от центробежных сил	277
	Расчет лопаток на изгиб	281
	Запас прочности профильной части лопатки	290
	Равнопрочные лопатки	291
	Охлаждаемые лопатки	293
	Изгибные колебания лопаток	294
	Закрученные лопатки	301
	Шарнирные лопатки	309
	Бандажированные лопатки	313
	Расчет замков лопаток	316
	Вибрация лопаток	321
	Расчет дисков. Напряжения на контуре	328
	Запасы прочности диска	330
	Профилирование равнопрочных дисков	335

Основные уравнения при расчете дисков	337
Напряжения и деформации в диске постоянной толщины	339
Напряжения и деформации в диске переменной толщины	342
ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ	
Глава 17. Изгиб стержней	352
Перерезывающая сила и изгибающий момент	352
Напряжения и деформации при изгибе	354
Упругая линия стержня	361
Определение прогибов с помощью интеграла Мора	365
Прогибы и углы поворота в стержне переменного сечения	370
Изгиб стержня с учетом пластических деформаций	371
Глава 18. Кручение стержней	376
Круглый вал	376
Стержень с эллиптическим поперечным сечением	377
Стержни прямоугольного сечения и тонкостенные	378
Распределение касательных напряжений	379
Учет пластических деформаций	380
Трубчатые стержни	382
Глава 19. Расчет колец	384
Плоская деформация колец	384
Осесимметричная деформация колец	391
Глава 20. Устойчивость стержней	398
Формула Эйлера	398
Общий случай расчета критической нагрузки	400
Таблицы для расчета критической нагрузки	401
Влияние начального прогиба и внецентренного приложения силы на выпучивание стержня	405
Расчет сжатых стержней на прочность и жесткость	405
Потеря устойчивости при упруго-пластических деформациях	408
Выпучивание стержня при упруго-пластических деформациях	409
Динамический анализ устойчивости. Действие следящих нагрузок	412
Потеря устойчивости при нагреве	414
Глава 21. Колебания упругих систем	415
Основные понятия	415
Метод динамических жесткостей	416
Определение собственных частот системы методом динамических жесткостей	418
Крутильные колебания	420
Изгибные колебания	424
Частоты собственных колебаний некоторых динамических систем	430
Глава 22. Критические частоты вращения валов	431
Вал с одним диском	431
Вал с несколькими дисками	436
Вал с непрерывно распределенными массами	437
Глава 23. Расчет пластинок	461
Круглые пластинки	461
Прорывные мембраны	475
Прямоугольные пластинки	476

Глава 24. Расчет на прочность цилиндрических оболочек	479
Основные зависимости	479
Расчет длинных оболочек	481
Расчет коротких оболочек	483
Температурные напряжения в оболочке	492
Глава 25. Устойчивость пластинок, колец и оболочек	494
Устойчивость пластинок	494
Устойчивость колец	498
Устойчивость цилиндрических оболочек	499
Устойчивость конических оболочек	509
Устойчивость сферических и эллипсоидальных оболочек	510
Устойчивость пластинок и оболочек при температурных напряжениях	511
Устойчивость анизотропных оболочек	512
Устойчивость подкрепленных оболочек	513
Глава 26. Численные методы расчета конструкций	516
Вариационные уравнения	516
Вариационно-разностный метод	518
Метод конечных элементов	521
Глава 27. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести	529
Уравнения упругости	529
Уравнения пластичности	531
Уравнения ползучести	535
Расчет конструкций на прочность с учетом пластичности и ползучести (простое нагружение)	537
Расчет на прочность конструкций при сложном нагружении	541
Глава 28. Концентрация напряжений и деформаций в деталях машин	548
Основные понятия	548
Концентрация напряжений около отверстий	549
Концентрация напряжений в плоских и осесимметричных выточках и галтелях	555
Концентрация напряжений и деформаций в условиях пластических деформаций и ползучести	556
Концентрация напряжений в элементах конструкций	559
Глава 29. Контактные задачи	565
Контакт деталей простой формы	566
Конструкционные контактные задачи	579
Общий метод решения конструктивных контактных задач	582
ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ	
Глава 30. Расчет на прочность при сложном напряженном состоянии	589
Критерии статической прочности	589
Критерии длительной и малоциклового прочности	595
Глава 31. Расчет усталостной прочности	597
Основные закономерности усталостной прочности	597
Определение пределов выносливости деталей	604
Условия усталостной прочности	606
Определение запасов усталостной прочности	609
Статистические модели усталостной прочности	618

Глава 32. Вероятность разрушения и запасы прочности	619
Вероятность разрушения	620
Вероятность разрушения при произвольных законах распределения напряжений и пределов прочности	621
Статистические запасы прочности	624
Глава 33. Элементы теории надежности	629
Основные понятия	629
Правила надежности	629
Вероятность безотказной работы, плотность распределения и интенсивность отказов	632
Основное уравнение теории надежности	634
Общая закономерность изменения интенсивности отказов по времени наработки	634
Прогнозируемая вероятность безотказной работы	635
Экспоненциальный закон надежности	635
Нормальное распределение времени безотказной работы	636
Распределение Вейбулла для времени безотказной работы	637
Надежность системы последовательных элементов	638
Надежность системы параллельных элементов	638
Анализ надежности системы с несколько параллельно работающих элементами	639
Расчет числа изделий, находящихся в эксплуатации	640
Количественные показатели надежности	641
Глава 34. Технологические методы повышения долговечности деталей машин	642
Остаточные напряжения	642
Упрочнение деталей машин поверхностным пластическим деформированием	645
Термическая и химико-термическая обработка	650
Определение остаточных напряжений	651
Глава 35. Основы теории технической диагностики	656
Постановка задач технической диагностики	656
Вероятностные методы распознавания	657
Методы статистических решений	661
Методы статистических решений при наличии зоны неопределенности	663
Метрические методы распознавания	664
Метод разделения в пространстве признаков	666
Логические методы распознавания	670
Глава 36. Основы автоматизированного проектирования	671
Структура автоматизированного производства	671
Структура математической модели	672
Уровни и классы моделей	673
Общие принципы создания систем автоматизированного проектирования	674
Цели и методы оптимизации	675
Список литературы	678
Предметный указатель	684

ИБ № 885

Исаак Аронович Биргер, Борис Федорович Шорр,
Геннадий Борисович Исислевич

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Редакторы Т. С. Грачева, Н. С. Бояршинова,
Технический редактор А. И. Захарова,
Корректоры И. М. Борейша и В. А. Воробьева,
Переплет художника А. Я. Михайлова.

Сдано в набор 26.07.78. Подписано в печать 28.03.79.
Т-01198. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1.
Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл.
печ. л. 44,0. Уч.-изд. л. 54,6. Тираж 50 000 экз. Заказ 102.
Цена 3 р. 20 к.

Издательство «Машиностроение», 107885, Москва,
ГСП-6, 1-й Басманный пер., 3.

с матриц Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская, 26,

отпечатано в Ленинградской типографии № 6 Ленинградского производственного объединения «Техническая книга» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10. Заказ 1389.

ФИГ. 78а

